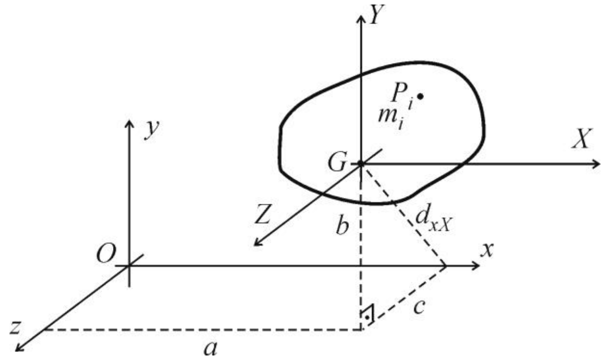
PME3100 Mecânica I

Dinâmica do Sólido

3. Momentos e Produtos de Inércia (continuação)

- Translação de eixos



Sejam *X,Y,Z* eixos cuja origem é o centro de massa *G* do sistema, e *x,y,z* eixos paralelos a *X,Y,Z* respectivamente, com origem em um ponto *O* qualquer. Sejam (*a*,*b*,*c*) as coordenada de G em *Oxyz*.

O momento de inércia em relação ao eixo *Ox* será:

$$J_x = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) = \sum_i m_i[(b + Y_i)^2 + (c + Z_i)^2] =$$

$$= \sum_i m_i(Y_i^2 + Z_i^2) + 2b\sum_i m_i Y_i + 2c\sum_i m_i Z_i + (b^2 + c^2)\sum_i m_i$$

Mas:

$$\sum_i m_i(Y_i^2 + Z_i^2) = J_X$$

$$\sum_i m_i Y_i = mY_G = 0$$

$$\sum_i m_i Z_i = mZ_G = 0$$

$$\sum_i m_i = m$$

$(b^2 + c^2) = d_{xX}^2 =$ quadrado da distância entre os eixos *x* e *X*

Portanto:

$$J_x = J_X + md_{xX}^2$$

Analogamente:

$$J_y = J_Y + md_{yY}^2$$

$$J_z = J_Z + md_{zZ}^2$$

Para os produtos de inércia:

$$J_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i = \sum_i m_i(a + X_i)(b + Y_i) =$$

$$= \sum_i m_i X_i Y_i + a\sum_i m_i Y_i + b\sum_i m_i X_i + ab\sum_i m_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_{xy} = J_{XY} + mab$$

Analogamente:

$$J_{yz} = J_{YZ} + mbc$$

$$J_{zx} = J_{ZX} + mca$$

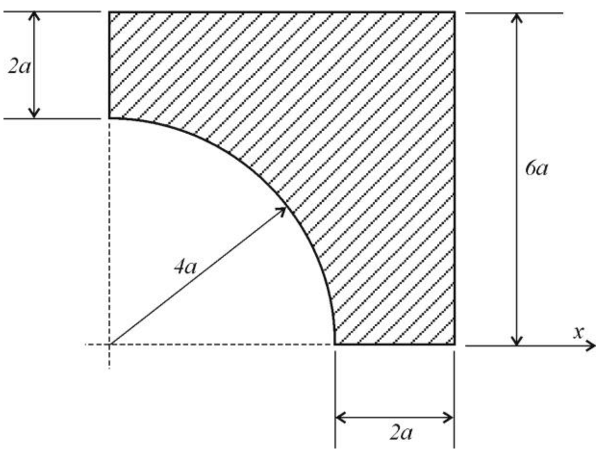
Note-se que, para esta transformação, X,Y,Z *devem sempre ter a origem* no centro de massa G.

Destas equações conclui-se que, para um sistema de eixos de mesma direção, o menor momento de inércia corresponde ao eixo que passa pelo centro de massa do sistema.

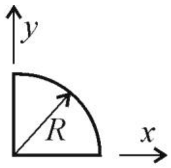
Matriz de inércia (definição):

$$\begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}$$

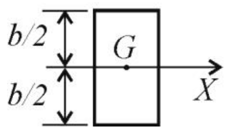
Exemplo 3.1: Determine o momento de inércia e o raio de giração em relação ao eixo x da figura abaixo, sendo σ a densidade superficial da figura.



Dados:



$$J_x = \frac{MR^2}{4}$$



$$J_X = \frac{Mb^2}{12}$$

Resolução:

A maneira mais simples de se calcular o momento de inércia, neste caso, é por composição:

$$J_{x,figura} = J_{x,quadrado} - J_{x,semicirculo}$$

$J_{x,quadrado}$: Quadrado de lado $6a$

$$M = (6a \cdot 6a)\sigma = 36a^2\sigma$$

$$J_X = \frac{M(6a)^2}{12} = 108a^4\sigma$$

Translação de eixos:

$$J_{x,quadrado} = J_X + M\left(\frac{6a}{2}\right)^2 = 108a^4\sigma + 324a^4\sigma = 432a^4\sigma$$

$J_{x,semicirculo}$:

$$M = \pi \frac{(4a)^2}{4} \sigma = 4\pi a^2 \sigma$$

$$J_{x,semicirculo} = \frac{MR^2}{4} = 16\pi a^4 \sigma$$

Portanto, fazendo a composição:

$$\boldsymbol{J_x = 432a^4\sigma - 16\pi a^4\sigma = 16(27-\pi)a^4\sigma}$$

e, com a massa:

$$M = 36a^2\sigma - 4\pi a^2\sigma = 4(9-\pi)a^2\sigma$$

temos o raio de giração:

$$r_x^2 = \frac{J_x}{M} = \frac{4(27-\pi)}{9-\pi} a^2 \Rightarrow \boldsymbol{r_x = 2a\sqrt{\frac{27-\pi}{9-\pi}}}$$

---

4. Teorema da Energia Cinética (TEC)

A energia cinética de um sistema de pontos materiais P_i é a soma das energias cinéticas de cada ponto:

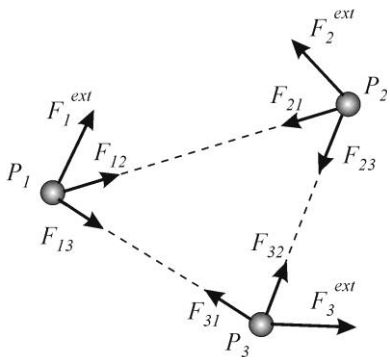
$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\dot{T} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{v}_i + \vec{v}_i \cdot \dot{\vec{v}}_i\right) = \sum_i m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{v}_i + \sum_i \vec{F}_i^{int} \cdot \vec{v}_i$$

Para as forças internas, já vimos que:

$$\vec{F}_i^{int} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{int}$$
$$\vec{F}_{ij}^{int} = \lambda_{ij}\left(P_j - P_i\right) \text{ e}$$
$$\vec{F}_{ji}^{int} = -\lambda_{ij}\left(P_j - P_i\right)$$



Assim:

$$\dot{T} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{v}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}\left(P_j - P_i\right) \cdot \vec{v}_i$$

Multiplicando por *dt* e integrando de 0 a *t*:

$$\int_0^t \dot{T} dt = \int_0^t \sum_i \vec{F}_i^{ext} \cdot \vec{v}_i \, dt + \int_0^t \sum_i \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}\left(P_j - P_i\right) \cdot \vec{v}_i \, dt$$

Sendo O um ponto fixo:

$$\vec{v}_i dt = \frac{d(P_i - O)}{dt} dt = d(P_i - O) = dP_i$$

Portanto:

$$T(t) - T(0) = \int_{P(0)}^{P(t)} \sum_i \vec{F}_i^{ext} \cdot dP_i + \int_{P(0)}^{P(t)} \sum_i \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}\left(P_j - P_i\right) \cdot dP_i$$

A primeira integral é o trabalho das forças externas de 0 a *t*, sobre seus respectivos pontos de aplicação.

Na dupla somatória, sempre que aparecer o termo $\vec{F}_{ij}^{int} \cdot dP_i = \lambda_{ij}\left(P_j - P_i\right) \cdot dP_i$, aparecerá também o termo $\vec{F}_{ji}^{int} \cdot dP_j = -\lambda_{ij}\left(P_j - P_i\right) \cdot dP_j$.

Somando os dois:

$$\vec{F}_{ij}^{int} \cdot dP_i + \vec{F}_{ji}^{int} \cdot dP_j = -\lambda_{ij}\left(P_j - P_i\right) \cdot d\left(P_j - P_i\right)$$

No caso de ***corpos rígidos***, as distâncias $\left(P_j - P_i\right)$ entre seus pontos não variam, o que implica em:

$$\left(P_j - P_i\right) \cdot d\left(P_j - P_i\right) = 0$$

ou seja, *no caso de <u>corpos rígidos</u> as forças internas não realizam trabalho*.

Portanto, podemos afirmar que:

"*A variação da energia cinética de um sólido é igual ao trabalho realizado pelas forças externas*":

$$\boldsymbol{\Delta T = \tau_{ext}}$$

Este é o ***Teorema da Energia Cinética***.

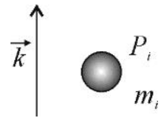
4.1 Exemplos de cálculo de trabalho

a) Trabalho da força peso

Suponhamos que o versor $\vec{k}$ represente a vertical ascendente e seja g a aceleração da gravidade.

Cada partícula Pi está sujeita a uma força:

$$\vec{F}_i^{ext} = -m_i g\vec{k}$$



O deslocamento elementar dP_i, em termos de suas componentes, será:

$$dP_i = dx_i\vec{\imath} + dy_i\vec{\jmath} + dz_i\vec{k}$$

O trabalho elementar da força será o produto escalar:

$$d\tau_i = \vec{F}_i^{ext} \cdot dP_i = -m_i g dz_i$$

Integrando no tempo, entre os instantes t_0 e t, o trabalho realizado por $\vec{F}_i^{ext}$ será:

$$\Delta\tau_i = -m_i g[z_i(t) - z_i(\,t_0)]$$

Estendendo a todas as partículas do sistema:

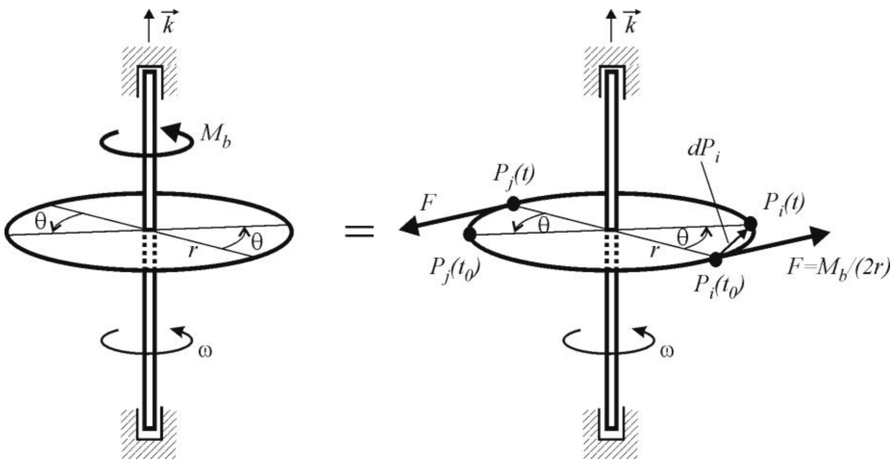
$$\Delta\tau = \sum_i \Delta\tau_i = g\sum_i m_i[z_i(\,t_0) - z_i(t)]$$

Pela definição do centro de massa G (ou baricentro, neste caso): $\sum_i m_i z_i = m z_G$

Portanto:

$$\boldsymbol{\Delta\tau = \tau(t_0, t) = mg[z_G(\,t_0) - z_G(\,t)]}$$

b) Trabalho de um binário



No caso da figura, o binário $\vec{M}_b$ pode ser substituído por $2rF\vec{k}$, onde $F = |\vec{M}_b|/(2r)$ é o módulo do par de forças opostas $\vec{F}$, agindo no mesmo disco como mostrado. O trabalho do binário será o trabalho das forças $\vec{F}$:

$$d\tau_b = F|dP_i| + F|dP_j| = 2Frd\theta = M_b d\theta$$

Mas $d\theta = \omega dt$; portanto:

$$d\tau_b = M_b \omega dt$$

Assim:

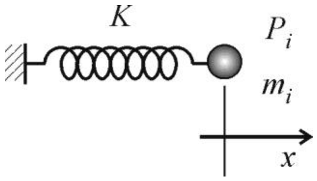
$$\tau_b(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} M_b \omega dt = \int_{\theta(t_0)}^{\theta(t)} M_b d\theta$$

No caso geral:

$$\boldsymbol{\tau_b(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \vec{M}_b \cdot \vec{\omega} dt}$$

---

c) Trabalho de força elástica



A força elástica que a mola exerce sobre o ponto P_i é:

$$F_i = -Kx$$

Para um deslocamento *dx* do ponto, essa força realiza o trabalho:

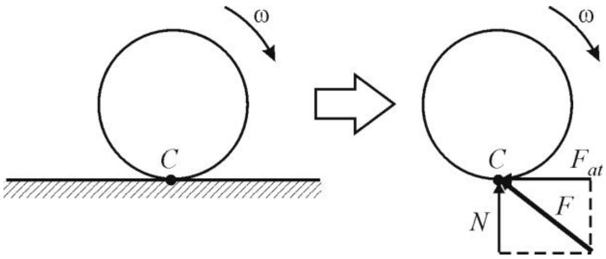
$$d\tau = F_i dx = -Kx dx$$

Entre duas posições x_0 e x, o trabalho realizado será:

$$\tau(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} -Kx dx \Rightarrow \boldsymbol{\tau(x_0, x) = \frac{K(x_0^2 - x^2)}{2}}$$

---

d) Trabalho das forças de contato em rolamento puro (sem escorregar)



Não havendo escorregamento, no instante em que a força de reação do solo *F* é aplicada no ponto C, a velocidade deste é nula; portanto:

$$\boldsymbol{d\tau = \vec{F} \cdot \underbrace{\vec{v}_C}_{\vec{0}} dt = 0}$$

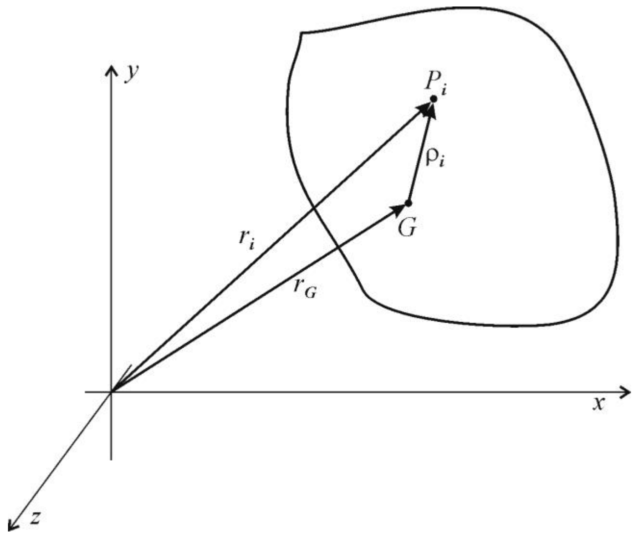
4.2 Cálculo da energia cinética de um sólido

Sendo $\vec{\omega}$ o vetor rotação de um sólido e $\vec{v}_O$ a velocidade de um de seus pontos num instante qualquer t, podemos escrever que a velocidade de um ponto qualquer P_i do sólido é:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P_i - O)$$

Sendo m_i a massa de P_i, a energia cinética total do sólido é:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$



Usando o centro de massa *G* do sistema, temos:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_G + \vec{\rho}_i$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \dot{\vec{\rho}}_i$$

Portanto: $v_i^2 = v_G^2 + 2\vec{v}_G \cdot \dot{\vec{\rho}}_i + \dot{\rho}_i^2$

Assim:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \vec{v}_G \cdot \sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\rho}_i^2$$

Mas: $\sum_i m_i \dot{\vec{\rho}}_i = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_G) = \sum_i m_i \vec{v}_i - m\vec{v}_G$

Como $\sum_i m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_G$, este termo é nulo, e ficamos com:

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\rho}_i^2$$

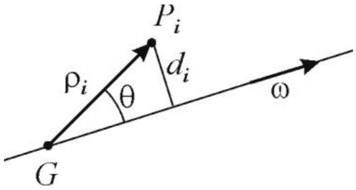
Como estamos tratando de um sólido, a distância de qualquer de seus pontos ao centro de massa é sempre a mesma, ou seja:

$$|\vec{\rho}_i| = \text{cte}$$

Portanto:

$$\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{\rho}_i \Rightarrow \dot{\rho}_i^2 = (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho}_i)^2 = (|\vec{\omega}||\vec{\rho}_i| \sin\theta_i)^2 = \omega^2 d_i^2$$

com $d_i =$ distância do ponto P_i à reta que contém *G* e é paralela a $\vec{\omega}$.



Assim sendo, temos:

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\rho}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 d_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 J_{G\omega}$$

com $J_{G\omega} =$ momento de inércia do sólido em relação ao eixo paralelo a $\vec{\omega}$ que passa por *G*.

Finalmente, a energia cinética total de um sólido será:

$$\boldsymbol{T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_{G\omega} \omega^2}$$

Como já vimos, o movimento qualquer de um sólido pode ser considerado como a superposição de um movimento de translação com outro de rotação. Esta expressão da energia cinética ressalta isso: a primeira parcela ($\frac{1}{2} m v_G^2$) refere-se ao movimento de translação, e a segunda ($\frac{1}{2} J_{G\omega} \omega^2$) ao de rotação.

<u>NOTA:</u> Se ao invés de usar o centro de massa *G*, tivéssemos usado um ponto *A* qualquer do sólido, a expressão da energia cinética seria:

$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 + m \vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \wedge (G - A) + \frac{1}{2} J_{A\omega} \omega^2$$

com $J_{A\omega}$ = momento de inércia do sólido em relação ao eixo paralelo a $\vec{\omega}$ que passa por *A*.

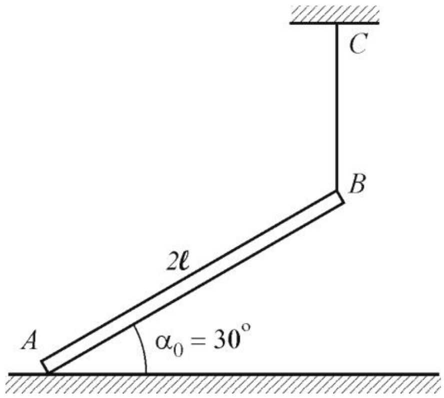
No caso em que o ponto *A* tem velocidade nula:

$$T = \frac{1}{2} J_{A\omega} \omega^2$$

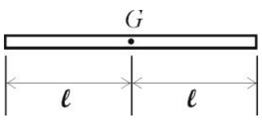
<u>Exemplo 4.1</u>: A barra *AB*, homogênea de comprimento $2\boldsymbol{\ell}$ e massa *M*, tem a extremidade *A* apoiada no plano horizontal e a extremidade *B* presa pelo fio *BC*, formando um ângulo $\alpha_0 = 30°$ com a horizontal. O atrito entre a barra e o plano é desprezível. Se o fio *BC* é cortado, calcule:

a) a velocidade e a aceleração angulares da barra em uma posição genérica;

b) a velocidade angular da barra quando está prestes a se chocar com o plano horizontal.



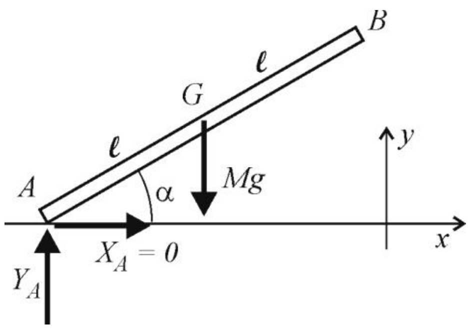
Dados:



$$J_G = \frac{M l^2}{3}$$

Resolução:

a) Isolemos a barra em uma posição genérica, após o corte do fio:



Relacionemos v_G com ω; por Poisson:

$$\vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (G - A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_G \vec{j} = v_A \vec{i} + \omega \vec{k} \wedge l(\cos\alpha\, \vec{i} + \sin\alpha\, \vec{j}) =$$
$$= (v_A - \omega l \sin\alpha)\vec{i} + \omega l \cos\alpha\, \vec{j} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_G = \omega l \cos\alpha$$

Apliquemos o TEC:

$$\Delta T = \tau^{ext}$$

A variação de energia cinética será:

$$T(0) = \frac{1}{2} M v_{G_0}^2 + \frac{1}{2} J_G \omega_0^2 = 0 \text{ (repouso)}$$
$$T(t) = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2$$

$$\Delta T = T(t) - T(0) = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}J_G\omega^2 =$$
$$= \frac{1}{2}M\omega^2 l^2 \cos^2\alpha + \frac{1}{2}\frac{Ml^2}{3}\omega^2 = \frac{Ml^2\omega^2(3\cos^2\alpha + 1)}{6}$$

Quanto às forças externas que realizam trabalho, temos apenas o peso, pois Y_A é vertical e o ponto A move-se apenas na horizontal. O trabalho realizado pela força peso será:

$$Mg[y_G(0) - y_G(t)] = Mg[l\sin 30° - l\sin\alpha] = \frac{Mgl(1 - 2\sin\alpha)}{2}$$

Finalmente, a expressão do TEC fica:

$$\frac{Ml^2\omega^2(3\cos^2\alpha + 1)}{6} = Mgl(1 - 2\sin\alpha) \Rightarrow \boldsymbol{\omega^2 = \frac{6g(1-2\sin\alpha)}{l(3\cos^2\alpha+1)}}$$

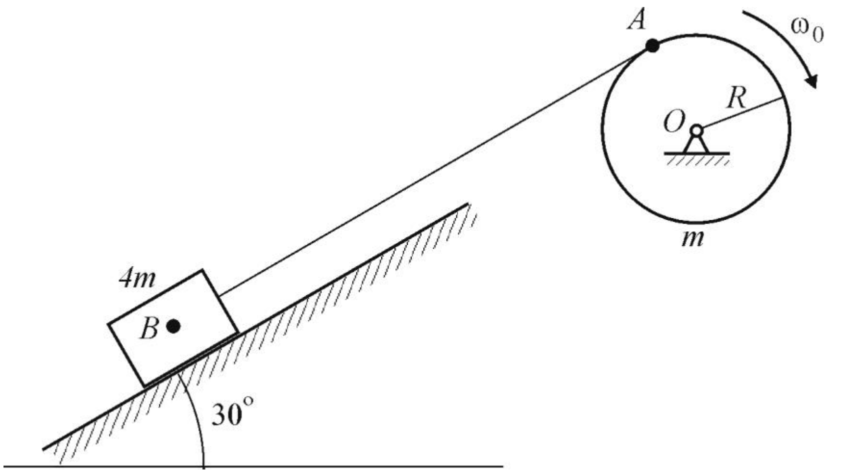
Está expressão é válida para qualquer valor de α; assim, podemos derivar, lembrando que $\dot{\alpha} = \omega$:

$$2\omega\dot{\omega} = \frac{d}{dt}\left[\frac{6g(1-2\sin\alpha)}{l(3\cos^2\alpha+1)}\right] \Rightarrow \boldsymbol{\dot{\omega} = \frac{3g}{l}\left[\frac{3\sin\alpha\cos\alpha(1-2\sin\alpha) - \cos\alpha(3\cos^2\alpha+1)}{(3\cos^2\alpha+1)^2}\right]}$$

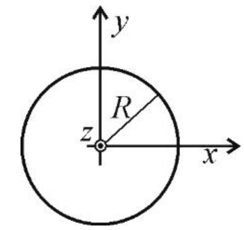
b) prestes a se chocar com o plano horizontal → $\alpha = 0$.

Portanto: $\boldsymbol{\omega^2 = \frac{3g}{2l}}$

<u>Exemplo 4.2</u>: No sistema indicado na figura, o disco de centro O possui raio r e massa m. O bloco possui massa $4m$. O atrito em todos os contatos é desprezado. Sabemos que no instante $t = 0$ a velocidade angular do disco é ω_0 no sentido indicado. Determine após quanto tempo a velocidade angular se anula, usando o Teorema da Energia Cinética.



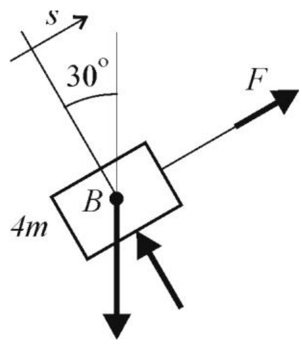
Dado:



$$J_z = \frac{MR^2}{2}$$

Resolução:

Isolando o bloco e o disco:

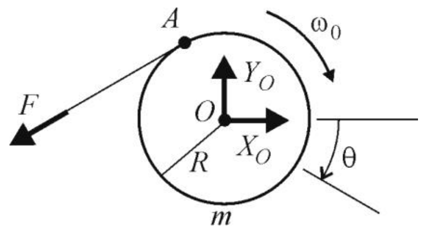


<u>Bloco:</u>

$$\tau^{ext} = \tau_F + \tau_{peso} =$$
$$= \int_{s_0}^{s} F ds + 4mg(s_0 - s)\sin 30° = \int_{s_0}^{s} F ds - 2mgs$$
$$\Delta T = \frac{1}{2} 4m\left(v_{B_0}^2 - v_B^2\right)$$

TEC: $\int_{s_0}^{s} F ds - 2mgs = 2m\left(v_{B_0}^2 - v_B^2\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{s_0}^{s} F ds = 2mgs + 2m\left(v_{B_0}^2 - v_B^2\right) \qquad \text{(I)}$$



<u>Disco:</u>

$$\tau^{ext} = \int_{\theta_0}^{\theta} (-F) r d\theta$$
$$\Delta T = \frac{1}{2} J_G(\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{mr^2}{4}(\omega^2 - \omega_0^2)$$

TEC: $\int_{\theta_0}^{\theta} F r d\theta = -\frac{mr^2}{4}(\omega^2 - \omega_0^2) \qquad \text{(II)}$

Como o fio é inextensível, temos:

$$s = r\theta \Rightarrow ds = r d\theta \ \text{ e } \ \dot{s} = r\dot{\theta} = r\omega$$

Assim, re-escrevendo (I):

$$\int_{\theta_0}^{\theta} F r d\theta = 2mgr\theta + 2mr^2(\omega^2 - \omega_0^2)$$

Substituindo em (II):

$$2mgr\theta + 2mr^2(\omega^2 - \omega_0^2) = -\frac{mr^2}{4}(\omega^2 - \omega_0^2) \Rightarrow \theta = \frac{9r}{8g}(\omega_0^2 - \omega^2)$$

Derivando em relação ao tempo: $\dot{\theta} = -\frac{9r}{4g}\omega\dot{\omega}$

Com $\dot{\theta} = \omega$, obtemos: $\dot{\omega} = -\frac{4g}{9r} \Rightarrow \omega = \omega_0 - \frac{4g}{9r}t$

Para $\omega = 0$, temos:

$$\boldsymbol{t}^{*} = \frac{\boldsymbol{9r}}{\boldsymbol{4g}}\boldsymbol{\omega_0}$$