

Campo tensorial objetivo

SEM5936 - Fundamentos da mecânica do contínuo aplicada a sólidos

November 2020

1 Campo tensorial objetivo

A descrição do movimento de uma propriedade física, geralmente depende do referencial escolhido. Considerando a mudança de observador, de um vetor escrito na descrição espacial (Euleriana), dada pela equação 1.

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Q}(\mathbf{t})\mathbf{x} + \mathbf{c}(\mathbf{t}) \quad (1)$$

A mudança de observador para a velocidade se dá pela equação 2.

$$\dot{\mathbf{x}}^*(\mathbf{X}, \mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\mathbf{t})\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, \mathbf{t}) + \dot{\mathbf{c}}(\mathbf{t}) + \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{t})\mathbf{x}(\mathbf{X}, \mathbf{t}) \quad (2)$$

Percebe-se que as quantias $\dot{\mathbf{c}}(\mathbf{t})$, $\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{t})$ dependem do referencial escolhido [11]. Considerando a transformação do tensor gradiente de mudança de configuração, quando a configuração de referência não depende do observador escolhido, tem-se $J^* \equiv \det(\mathbf{F}^*) = \det(\mathbf{F}) \equiv J$. Esse fato é facilmente comprovado fisicamente uma vez que a mudança de volume de um corpo independe do observador escolhido ($\rho_0 = J\rho$). Considerando que a configuração de referência é independente do observador, tem-se que um elemento de curva em um corpo, utilizando a descrição espacial, transforma de acordo com a equação 1, por outro lado, um elemento de curva em um corpo na configuração inicial, não serão afetadas pela mudança de observador.

Considerando \mathbf{T} um tensor Euleriano de orden n ($n = 1, 2, 3, \dots$) este é considerado objetivo quando transforma de acordo com a equação 3 para o caso de $n = 2$.

$$\mathbf{T}^*(\mathbf{x}^*, \mathbf{t}) = \mathbf{Q}(\mathbf{t})\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{t})\mathbf{Q}(\mathbf{t}) \quad (3)$$

No caso de \mathbf{T} ser um tensor lagrangeano de orden n ($n = 1, 2, 3, \dots$) este é considerado objetivo quando transforma de acordo com a equação 4 para o caso de $n = 2$.

$$\mathbf{T}^*(\mathbf{X}^*, \mathbf{t}) = \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{t}) \quad (4)$$

Ou seja, \mathbf{T} , na descrição Lagrangeana, não é afetado por uma mudança de observador [11].

Nesse ponto é interessante notar que o tensor gradiente de mudança de configuração \mathbf{F} é um tensor objetivo de dois pontos, ou seja, conecta a configuração de referência com a configuração corrente. Esse fato decorre que os elementos dX e dx são arbitrários.

Tem-se que campos escalares Eulerianos são associados de maneira unívoca com campos escalares Lagrangeanos (ou vice e versa), porém para campos vetoriais e tensoriais essa conexão se dá pelo tensor gradiente de mudança de configuração \mathbf{F} e seu inverso, porém essa associação não é única como pode-se comprovar considerando o campo vetorial de velocidades, \mathbf{v} , (Euleriano). Portanto $\mathbf{F}^T \mathbf{v}$ e $\mathbf{B}^T \mathbf{v}$ são campos vetoriais Lagrangeanos, porém não são iguais. Esses caso o campo vetorial é covariante e contravariante respectivamente.

$\mathbf{F}^T \mathbf{v}$ e $\mathbf{B}^T \mathbf{v}$ são conhecidos como campo Lagrangeano induzidos. No caso de V ser um campo Lagrangeano, \mathbf{FV} e \mathbf{BV} são conhecidos como campo Euleriano induzido [11].

Por fim define-se que um campo tensorial é dito objetivo, se e somente se, cada um de seus campos induzidos forem objetivos [11]. Portanto:

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{Qv} \Leftrightarrow \mathbf{A}^* \mathbf{T} \mathbf{v}^* = \mathbf{A}^T \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{B}^* \mathbf{T} \mathbf{v}^* = \mathbf{B}^T \mathbf{v}$$

Segue que a equação 2 não é considerado um campo tensorial objetivo, uma vez que $\dot{\mathbf{x}}^*(\mathbf{X}, \mathbf{t}) \neq \mathbf{Q}(\mathbf{t}) \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, \mathbf{t})$. Portanto, pode-se afirmar que:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{campo Euleriano Objetivo}) \neq \text{campo Euleriano Objetivo}$$

Uma vez que (sendo \mathbf{v} um campo vetorial objetivo Euleriano):

$$\dot{\mathbf{v}}^* = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{v}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\text{campo Lagrangeano Objetivo}) = \text{campo Lagrangeano Objetivo}$$

Uma vez que $\mathbf{F}^T \mathbf{v}$ é um campo Lagrangeano objetivo, tem-se o seguinte campo objetivo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{F}^T \mathbf{v}) = \mathbf{F}^T(\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{v})$$

Onde $\Gamma_{ij} = \partial v_i / x_j$ é o gradiente de velocidade [11].

1.0.1 Objetividade da taxa do tensor de tensão

Na mecânica do contínuo, a taxa do tensor de tensões objetiva, é definida como sendo a derivada no tempo do tensor de tensões que não depende do referencial escolhido para realizar as análises. Esta possui grande relevância na descrição do comportamento do material por suas equações constitutivas [11].

As leis constitutivas, que governam o comportamento do material, são comumente escritas de forma incremental, ou seja utilizando as razões de tensão

e deformação. Estas leis devem ser independentes do referencial adotado (objetivas). No caso do tensor de tensões e de deformações serem Lagrangeanos, essa condição é automaticamente satisfeita, porém no caso de se utilizar a descrição Euleriana, como é o caso do tensor das taxa das tensões de Cauchy, a objetividade não é garantida mesmo em se utilizando tensor de deformação objetivos.

Como mencionado anteriormente, o tensor de tensões de Cauchy se transforma como mostrado na equação 5

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T \quad (5)$$

Já a taxa desse tensor fica escrita conforme apresentado na equação 6

$$\frac{\partial \mathbf{T}^*}{\partial \mathbf{t}} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{T}\dot{\mathbf{Q}}^T \neq \mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T \quad (6)$$

Portanto a taxa do tensor de tensões de Cauchy não é objetiva [9].

Adicionalmente, quando um elemento sólido passa por grandes deformações, as componentes do tensor de tensão variam como resultado de uma rotação material, sendo que essas mudanças ocorrem mesmo na ausência de deformação adicional, e portanto estas também devem ser levadas em conta na formulação das leis constitutivas que envolvem [7].

Por outro lado, as leis constitutivas formuladas para pequenas deformações e distorções, várias vezes são generalizadas para aplicações com grandes deformações simplesmente aplicando essas leis considerando o sistema de referências não rotacionado, ou equivalentemente, usando a taxa de rotação. Essas aproximações podem resultar em estimativas incorretas de tensão [6].

Adicionalmente, análises não lineares utilizando o método dos elementos finitos (MEF) estão se tornando cada vez mais importantes no desenvolvimento de projetos de engenharia modernos. As fontes de não linearidades advêm basicamente de três fontes distintas, uma relacionada ao comportamento não linear do material (não linearidade constitutiva ou física), outra devido a geometria (equilíbrio calculado na posição deslocada - não linearidade geométrica) e há também o problema de contato.

Considerando a não linearidade constitutiva, tem-se que as equações que governam o comportamento não linear do material normalmente é escrita de forma incremental (como mencionado anteriormente), onde a solução do problema, em muitas vezes é construída como sendo uma série de problemas lineares [10].

Já a não linearidade geométrica foi inicialmente considerada como uma rigidez geométrica incremental [10]. Ambas não linearidades podem levar a grandes deformações, onde as equações escritas para pequenas deformações podem resultar em erros consideráveis. Uma das características importantes nesse tipo de análise é que os tensores devem ser objetivos.

Embora a escolha da formulação adotada ser uma questão de conveniência, é preferível escolher uma formulação que seja objetiva [4]. Para tal é importante escolher tensores de deformação, e principalmente de tensão objetivos. Existem

diversas taxas de tensores de tensão que resultam campos tensoriais objetivos como o tensor de Truesdell, Green-Naghdi, Zaremba-Jaumann, Piola Kirchoff, etc. Algumas formas de taxas objetivas estão apresentadas abaixo [3] e [1].

$$\begin{aligned}
\dot{T}_{ij}^{GN} &= \dot{T}_{ij} - \Omega_{ik}T_{kj} - T_{ik}\Omega_{kj} \rightarrow \text{Green - Naghdi} \\
\dot{T}_{ij}^{JC} &= \dot{T}_{ij} - \omega_{ik}T_{kj} - T_{ik}\dot{\omega}_{kj} \rightarrow \text{Jaumann - Cauchy} \\
\dot{T}_{ij}^0 &= \dot{T}_{ij} - \omega_{ik}T_{kj} - T_{ik}\dot{\omega}_{kj} + T_{ij}\nu_{k,k} \rightarrow \text{Jaumann - Kirchoff} \\
\dot{T}_{ij}^{\Delta} &= \dot{T}_{ij} + L_{ki}T_{kj} - T_{ik}L_{kj} \rightarrow \text{Convected} \\
\dot{T}_{ij}^{\nabla} &= \dot{T}_{ij} - L_{ki}T_{kj} - T_{ik}L_{jk} \rightarrow \text{Oldroyd}
\end{aligned}$$

Por outro lado, há problemas relacionados com a conservação de energia, que para alguns materiais podem ser ignorados pois resultam em pequenos erros, porém isso não é verdade para alguns materiais como para espumas rígidas, solos, alguns tecidos biológicos, rochas, alguns tipos de madeiras leves, etc [3]. E esses erros afetam vários códigos comerciais de elementos finitos. Ainda segundo Bazant (2014), existem 3 tipos de violações da consistência de energia. Um primeiro tipo é devido a omissão de termos volumétricos na taxa de Jaumann-Cauchy e na taxa de Green-Naghdi, afetando materiais altamente compressíveis.

Um segundo tipo é devido a mensuração errada das rotações na taxa de Green-Naghdi. Já o terceiro tipo é devido a utilizar uma taxa de tensão com um tensor de deformações que não são conjugados energéticos. Vale mencionar que a taxa de Green-Naghdi não possui conjugado energético com nenhum tensor de deformação [3].

Haja visto que as taxas de tensão de Green-Naghdi e Jaumann-Cauchy, que são mais comumente empregadas nos pacotes de elementos finitos comerciais, levam a erros de conservação de energia, Bazant2014 recomenda utilizar a taxa de Jaumann da tensão de Kirchoff, uma vez que essa taxa conserva energia. Vale mencionar que o tensor de deformação de Green-Lagrange é conjugado energético dessa taxa de tensão.

Com o uso de materiais compósitos se tornando cada vez mais comum, devido às suas excelentes propriedades mecânicas e baixo peso, torna-se de suma importância se simular a estrutura fabricada com esse material, assim como o processo de fabricação dessa estrutura. Nesses materiais, as fibras possuem um diâmetro muito pequeno (5 – 7 μ m para fibra de carbono), e essas fibras são reunidas em formas de fios ou laminas, que em uma escala macroscópica formam tecidos, com vários tipos de arranjos. O comportamento mecânico desses tecidos são bastante específicos devido ao deslocamento relativo das fibras, sendo que estas possuem um elevada rigidez e resistência quando tracionadas, porém com muito baixa rigidez à flexão e ao cisalhamento, devido ao movimento relativo das fibras [2].

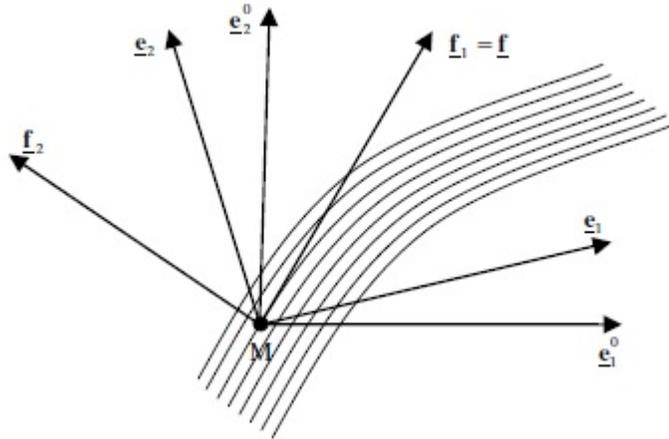


Figure 1: Base rotacionada de Green-Naghdi [2]

Porém a utilização mais comum desses materiais faz-se com a resina em estado sólido, o que evita o deslocamento relativo das fibras. Mas, para esses mesmos materiais, durante alguns tipos de processo de fabricação, como é o caso da termoformação, RTM (*Resin Transfer Moulding*), LCM (*Liquid Composit Moulding*), etc, a resina está ausente ou não está curada (caso dos termofixos) ou solidificada (caso dos termoplásticos).

A simulação dos processos que envolvem tecidos devem modelar de forma correta o comportamento mecânico desse meio fibroso através de leis constitutivas adequadas. A natureza multi-escala dos materiais compósitos permitem uma abordagem contínua ou discreta para modelos de elementos finitos utilizados durante o processo de termoformação. [5]. No modelo discreto, cada fibra ou fio de fibras são modelados, o que limita esse tipo de abordagem a pequenos dominios [12]. Por outro lado os modelos contínuos consideram esse material como um contínuo, não fazendo distinção das fibras e fios [8]. Mais detalhes sobre modelos discretos e contínuos serão discutidos mais adiante no texto em seções dedicadas.

Como o material utilizado nesse trabalho são laminas unidirecionais, a lei constitutiva que descreve o comportamento desse material é orientada pelo vetor unitário \mathbf{f} (figura 1). A base não rotacionada é dada pelos versores e_i^0 . Essa base é rotacionada pelo tensor \mathbf{Q} , resultando na base e_i . A direção de \mathbf{f} não é necessariamente constante em relação a e_i [2].

Dado que a orientação da fibra é material (Lagrangeana), esta é transformada pelo tensor gradiente de mudança de configuração $\mathbf{f}_i = \mathbf{F}\mathbf{f}$, por outro lado, como mencionado anteriormente, a base é rotacionada por $\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i^0$ (figura 1). Para resolver esse problema Badel2008 sugere dois métodos.

O primeiro utiliza a taxa objetiva de Juamann, sendo esta a mais utilizada e realizando os calculos no sistema rotacionado correspondente. Uma vantagem

desse método é a possibilidade de se utilizar o sistema rotacionado fornecido pelos pacotes de elementos finitos comerciais.

Uma segunda abordagem consiste em utilizar uma taxa objetiva do tensor de tensões aplicada na equação abaixo.

$$\mathbf{T}^\nabla = \mathbf{C} : \mathbf{D} \quad (3)$$

Onde \mathbf{T}^∇ é uma taxa objetiva para o tensor de tensões de Cauchy, \mathbf{D} é a taxa do tensor de deformações.

1.0.2 Rastreamento da direção da fibra

Considere que o tensor \mathbf{Q} seja o mesmo que o tensor de rotação \mathbf{R} da decomposição polar. Esse procedimento é realizado pelos códigos comerciais de elementos finitos. Esses códigos fornecem o tensor de tensão do incremento anterior, $[\mathbf{T}^n]_{\mathbf{e}_i^n}$, e o incremento de deformação do incremento atual, $[\Delta\epsilon]_{\mathbf{e}_i^{n+1/2}}$, sendo necessário somente calcular o tensor constitutivo, conforme apresentado na equação 4 no caso de materiais reforçados por fibra [2].

$$[\mathbf{T}^{n+1}]_{\mathbf{e}_i^{n+1}} = [\mathbf{T}^n]_{\mathbf{e}_i^n} + [\mathbf{C}^{n+1/2}]_{\mathbf{e}_i^{n+1/2}} [\Delta\epsilon]_{\mathbf{e}_i^{n+1/2}} \quad (4)$$

Esse tensor constitutivo é conhecido no sistema ortonormal dado pela base \mathbf{f} , sendo que a direção da fibra é paralela a f_1 . Segue que a mudança de base deve ser realizada entre $\mathbf{f}_i^{n+1/2}$ e $\mathbf{e}_i^{n+1/2}$. Assume-se que as duas bases são coincidentes quando $t = 0$. A base e_i é rotacionada pelo tensor \mathbf{R} através da relação $e_i = R_{ij} \cdot e_j^0$. Enquanto a direção da fibra, \mathbf{f}_1 é obtida pela equação 5.

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_1^0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_1^0\|} \quad (5)$$

O tensor gradiente de mudança de configuração, \mathbf{F} , e o tensor de rotação \mathbf{R} são fornecidos pelo programa de elementos finitos para cada incremento. De forma análoga, utilizando \mathbf{e}_2^0 e \mathbf{F} a direção transversal à fibra dada pelo vetor \mathbf{f}_2 conforme as equações 6 e 7.

$$\tilde{\mathbf{f}}_2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_2^0 \quad (6)$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{\tilde{\mathbf{f}}_2 - (\tilde{\mathbf{f}}_2 \cdot \mathbf{f}_1) \mathbf{f}_1}{\|\tilde{\mathbf{f}}_2 - (\tilde{\mathbf{f}}_2 \cdot \mathbf{f}_1) \mathbf{f}_1\|} \quad (7)$$

Por fim, o terceiro vetor, \mathbf{f}_3 é obtido pelo produto vetorial entre \mathbf{f}_1 e \mathbf{f}_2 . A rotação entre as bases \mathbf{e}_i e \mathbf{f}_i é dada pela equação 8.

$$\Theta = \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i = (\mathbf{f}_j)_i \otimes \mathbf{e}_j = (\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (8)$$

Essa rotação resulta nas matrizes de mudança de base \mathbf{A} e \mathbf{A}' . Essa matriz é apresentada na equação 9.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (f_b)_a^2 & 2(f_e)_a(f_f)_a \\ (f_b)_c(f_b)_d & (f_e)_c(f_f)_d + (f_f)_c(f_e)_d \end{bmatrix} \quad (9)$$

A matriz \mathbf{A}' é dada por:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} (f_a)_b^2 & 2(f_e)_a(f_f)_a \\ (f_c)_b(f_d)_b & (f_c)_e(f_d)_f + (f_c)_f(f_d)_e \end{bmatrix} \quad (10)$$

Onde: $a = 1, 2, 3$ refere-se ao índice das linhas, $b = 1, 2, 3$ refere-se ao índice das colunas, $(c, d) = (1, 2); (2, 3); (3, 1)$ refere-se os índices das linhas e $(e, f) = (1, 2); (2, 3); (3, 1)$ refere-se os índices das colunas.

Portanto o tensor de tensão rotacionado para a base \mathbf{e}_i é dado pela equação 11.

$$[\mathbf{T}]_{\mathbf{e}_i} = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{T}]_{\mathbf{f}_i} \quad (11)$$

Já o tensor de tensão na base \mathbf{f}_i é dado pela equação 12.

$$[\mathbf{T}]_{\mathbf{f}_i} = \mathbf{A}' \cdot [\mathbf{T}]_{\mathbf{e}_i} \quad (12)$$

A lei constitutiva é rotacionada pela equação 13.

$$[\mathbf{C}]_{\mathbf{e}_i} = \mathbf{A} \cdot [\mathbf{C}]_{\mathbf{f}_i} \mathbf{A}' \quad (13)$$

Por outro lado, pode-se definir o sistema rotacionado em relação a direção da fibra, conforme mostra a figura 2. Nessa abordagem o sistema rotacionado é \mathbf{f}_i , e a direção da fibra dada pelo vetor \mathbf{f}_1 , assim como mencionado anteriormente.

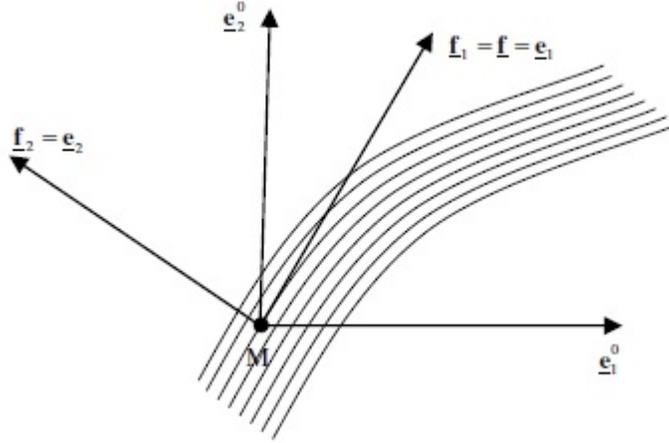


Figure 2: Bases adotadas para o rastreamento da fibra [2]

Nesse caso o tensor de rotação é Θ e Badel2008 propôs uma nova taxa objetiva para o tensor de tensões dada pela equação 14

$$\mathbf{T}^{\nabla\phi} = \Phi \cdot \left(\frac{d}{dt}(\Phi^T \cdot \mathbf{T}\Phi) \right) \cdot \Phi^T = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} \cdot \Omega_\phi - \Omega_\phi \cdot \mathbf{T} \quad (14)$$

Onde $\Omega_\phi = \dot{\Phi} \cdot \Phi^T$. Sendo que o incremento no tensor de tensão é calculado conforme a equação 15.

$$[\mathbf{T}^{n+1}]_{\mathbf{f}_i^{n+1}} = [\mathbf{T}^n]_{\mathbf{f}_i^n} + [\mathbf{C}^{n+1/2}]_{\mathbf{f}_i^{n+1/2}} [\Delta\epsilon]_{\mathbf{f}_i^{n+1/2}} \quad (15)$$

A orientação da fibra é dada pelo vetor \mathbf{f}_i obtido utilizando o tensor gradiente de mudança de configuração, \mathbf{F} , e a rotação entre as bases \mathbf{e}_i^0 e \mathbf{f}_i é dada pela equação 16.

$$\Theta = \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{e}_i^0 = (\mathbf{f}_j)_i^0 \cdot \mathbf{e}_i^0 \otimes \mathbf{e}_j^0 = (\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{e}_i^0) \mathbf{e}_i^0 \otimes \mathbf{e}_j^0 \quad (16)$$

No programa de elementos finitos comercial *ABAQUSTM*, o incremento de deformação $\Delta\epsilon$ é fornecido na base de Green-Naghdi, \mathbf{e}_i . Portanto obtendo o tensor de rotação Φ da fibra, pode-se efetuar a mudança de base. No caso do *ABAQUSTM*, pode-se obter o tensor de rotação através da decomposição polar, e portanto o tensor de mudança de base é dado pela equação 17 [2]

$$\Phi \mathbf{R}^T = \Theta \quad (17)$$

O procedimento descrito deve ser implementado para calcular o incremento do tensor de tensão. Um exemplo de aplicação é para calcular o comportamento de um tecido de material compósito de fibras de carbono unidirecional, pré-impregnado com resina epóxi, durante a simulação o processo de termoformação.

References

- [1] Rohan Abeyaratne. *Continuum Mechanics: Volume II of Lecture Notes on The Mechanics of Elastic Solids*. MIT, 2012.
- [2] Pierre Badel, Emmanuelle Vidal-Sallé, and Philippe Boisse. Large deformation analysis of fibrous materials using rate constitutive equations. *Computers & Structures*, 86(11):1164 – 1175, 2008.
- [3] J. Bazant, Z.; Vorel. Energy-conservation error due to use of green-naghdi objective stress rate in commercial finite element codes and its compensation. *Journal of applied mechanics*, 81, 2014.
- [4] Z.P. Bazant. A correlation study of formulations of incremental deformation and stability of continuous bodies. *Journal of Applied Mechanics*, 38(4):919–928, 1971.
- [5] P. Boisse. 3 - finite element analysis of composite forming. In A.C. Long, editor, *Composites Forming Technologies*, Woodhead Publishing Series in Textiles, pages 46 – 79. Woodhead Publishing, 2007.

- [6] R. M. Brannon. Caveats concerning conjugate stress and strain measures for frame indifferent anisotropic elasticity. *Acta Mechanica*, 129(1):107–116, Mar 1998.
- [7] J. K. Dienes. On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies. *Acta Mechanica*, 32(4):217–232, Dec 1979.
- [8] L. Dong, C. Lekakou, and M. G. Bader. Processing of composites: Simulations of the draping of fabrics with updated material behaviour law. *Journal of Composite Materials*, 35(2):138–163, 2001.
- [9] Morton E. Gurtin, Eliot Fried, and Lallit Anand. *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. Cambridge University Press, 2010.
- [10] H.D. Hibbitt, P.V. Marcal, and J.R. Rice. A finite element formulation for problems of large strain and large displacement. *International Journal of Solids and Structures*, 6(8):1069 – 1086, 1970.
- [11] R.W. Ogden. *Non-linear Elastic Deformations*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, 1997.
- [12] Anthony K. Pickett, Gavin Creech, and Patrick de Luca. Simplified and advanced simulation methods for prediction of fabric draping. *Revue Européenne des Mécaniques Finis*, 14(6-7):677–691, 2005.