HIDROLOGIA E RECURSOS HÍDRICOS (SHS-403)
AULA 6- Estatísticas da Precipitação

Profa. Luisa Fernanda Ribeiro Reis

e-mail: fernanda@sc.usp.br

Motivação:

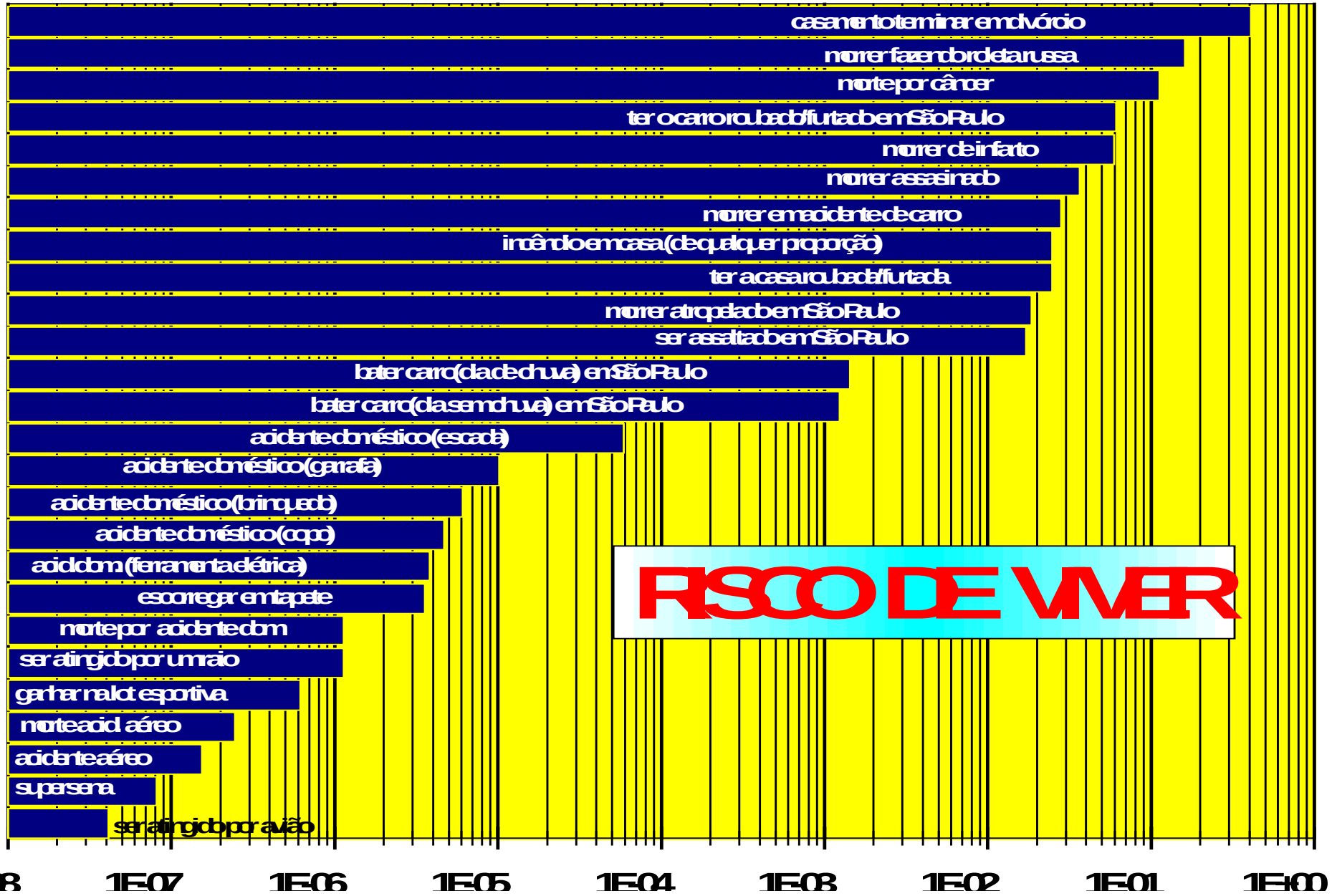
- Na engenharia não existe projeto de risco zero (razões econômicas)

- no caso de dimensionamento de canais, obras de desvio do cursos d´água, dimensionamento de galerias de águas pluviais, etc...:
- é preciso conhecer a ***magnitude*** de **enchentes** que podem ocorrem com dada ***frequência*****.**

- no caso de projetos de irrigação e abastecimento de água:
- é preciso conhecer a ***magnitude*** de **estiagens** e com que ***frequência*** elas podem ocorrer.

necessidade de avaliar e assumir o risco de ocorrência

Porque o conceito do risco é importante?



Fonte: Porto e Zahed Filho

Porque o conceito do risco é importante?

- Porque geralmente os recursos são limitados e é muito caro dimensionar as estruturas hidráulicas para que nunca falhem

- Assim é usual admitir-se uma **probabilidade ou risco** de que a estrutura falhe.

- O **risco admitido** pode ser **maior ou menor**, dependendo do tipo de estrutura e das implicações da falha.

- Risco admitido = probabilidade que uma estrutura falhe num ano qualquer – ***é função da responsabilidade da obra.***

Período de Retorno-TR

- Definição: Inverso da probabilidade de ocorrência da falha num ano qualquer: TR = 1/P

- TR típicos 2, 5, 10, 25, 50, 100 anos

  – A vazão máxima de período de retorno 10 anos é excedida em média 1 vez a cada dez anos.

  – Isto não significa que 2 cheias de TR = 10 anos não possam ocorrem em 2 anos seguidos.

Tempos de retorno (TR) admitidos para algumas estruturas hidráulicas

Estrutura	TR (anos)
Bueiros de estradas pouco movimentadas	5 a 10
Bueiros de estradas muito movimentadas	50 a 100
Pontes	50 a 100
Diques de proteção de cidades	50 a 200
Drenagem pluvial	2 a 10
Grandes barragens (vertedor)	10.000 (decamilenar) Mét. Hidrometeorológicos
Pequenas barragens	100

Frequência relativa dos dados observados (F)

- Classificação dos dados observados:

Os dados observados devem ser classificados em ordem decrescente de magnitude e a cada um deles atribui-se o seu **número de ordem m** em um **registro de N anos**

A **frequência acumulada (F)** ou probabilidade com que o dado de número de ordem m ser igualado ou superado pode ser calculada por fórmulas empíricas como:

Mais usuais

$$F = \frac{m}{N} (Método\ Califórnia)$$

$$F = \frac{m}{N+1} (Método\ de\ Kimbal\ ou\ Weibull)$$

Período de Retorno ou Tempo de Recorrência dos dados observados

- o tempo de recorrência é avaliado então como :

$$T_r = \frac{1}{F}(dados\ observados)$$

Exercício de aplicação de conceitos:

A Tabela abaixo contém os anos de ocorrência da precipitação máxima anual (de 2100 mm) no Município de Cachoeira do Sul do Sul, RS.
Com base nessas informações ESTIMAR:

(a) a probabilidade que uma precipitação anual máxima na bacia do Rio do Sinos exceda P = 2100 mm em um ano qualquer

(b) a probabilidade de o evento com período de retorno (intervalo de recorrência) de T anos ocorra pelo menos uma vez em 50 anos-próximo slide

(c) a probabilidade que a precipitação anual máxima X na bacia do Rio dos Sinos exceda os 2100 mm **uma vez** durante os próximos 3 anos

Tabela. Anos de ocorrência de 2100 mm anuais

Ano	1936	1940	1941	1942	1958	1961	1967	1972	1977
Recorrência	4	1	1	16	3	6	5	5	

média=5 anos

Conceito de Risco

- **Risco (R)** é a probabilidade de uma obra falhar pelo menos uma vez durante sua vida útil, N. Pode ser deduzido como:

$$R = 1 - (1 - 1/TR)^N$$

- Exemplo:
- Qual o risco que a canalização do rio Tamanduateí tem de falhar pelo menos uma vez durante sua vida útil, estimada em 50 anos? A obra foi projetada para TR = 500 anos.

Se Tr<<N(número de observações)

nesse caso, F (frequência relativa dos dados observados) pode dar uma boa idéia do valor real de P (probabilidade de ocorrência):

Número de Ordem *m*	Vazão Q	Freq. rel. obs F(>=Q)	Período de Retorno T=1/P
1	Q_1	1/(N+1)	(N+1)
2	Q_2	2/(N+1)	(N+1)/2
3	Q_3	3/(N+1)	(N+1)/3
|	|	|	|
|	|	|	|
N	Q_N	N/(N+1)	(N+1)/N

E se Tr grande(>>N)?

- necessário supor que os dados se ajustem a uma distribuição probabilística teórica para cálculo da probabilidade de ocorrência P

Qual a vazão de projeto?

- 1. Estabelecer Tr
- 2. Processamento dos dados existentes
- 3. Identificar a distribuição de probabilidade a ser usada: relação *Q = f(T)-verificação de ajuste a uma lei de distribuição de probabilidade teórica*

Processamento dos dados existentes-cont

- ordenação, atribuição dos números de ordem (m), avaliação de P e Tr

Número de Ordem *m*	Vazão Q	Probabilidade P(q>=Q)	Período de Retorno T=1/P
1	Q_1	1/(N+1)	(N+1)
2	Q_2	2/(N+1)	(N+1)/2
3	Q_3	3/(N+1)	(N+1)/3
|	|	|	|
|	|	|	|
N	Q_N	N/(N+1)	(N+1)/N

Escolha da Distribuição de Probabilidade Teórica

Usuais:

- Totais precipitados anuais/médias anuais
  - Distribuição normal de probabilidades

- Eventos extremos de máximo (Máximas precipitados anuais, Vazões de pico)-mais usuais

  - Log Pearson III
  - Log Normal
  - Gumbel

Escolha da Distribuição de Probabilidade Teórica

- Verificação do ajuste da distribuição teórica
  - Papel de probabilidade ← Hoje
  - Testes: X^2; Kolmogorov-Smirnov, etc.

  - Estimação dos parâmetros
  - Métodos
    - Momentos
    - Máxima verossimilhança
    - Mínimos quadrados

$$média = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum x}{n}$$

$$desvio\ padrão = S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$$coef.de\ assimetria = g = \frac{n^2 \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{n} \right)}{(n-1)\cdot(n-2)\cdot S_x^{\ 3}}$$

g < 0 : Assimetria Negativa
g = 0 : Simetria
g > 0 : Assimetria Positiva

Funções de Frequência aplicáveis à Hidrologia

- Chow mostrou que a maioria das funções de frequência aplicáveis na análise hidrológica pode ser expressa como:

$$x = \bar{x} + K\sigma_x$$

x - =magnitude do evento

$\bar{x}$ - =média dos valores de magnitude observados

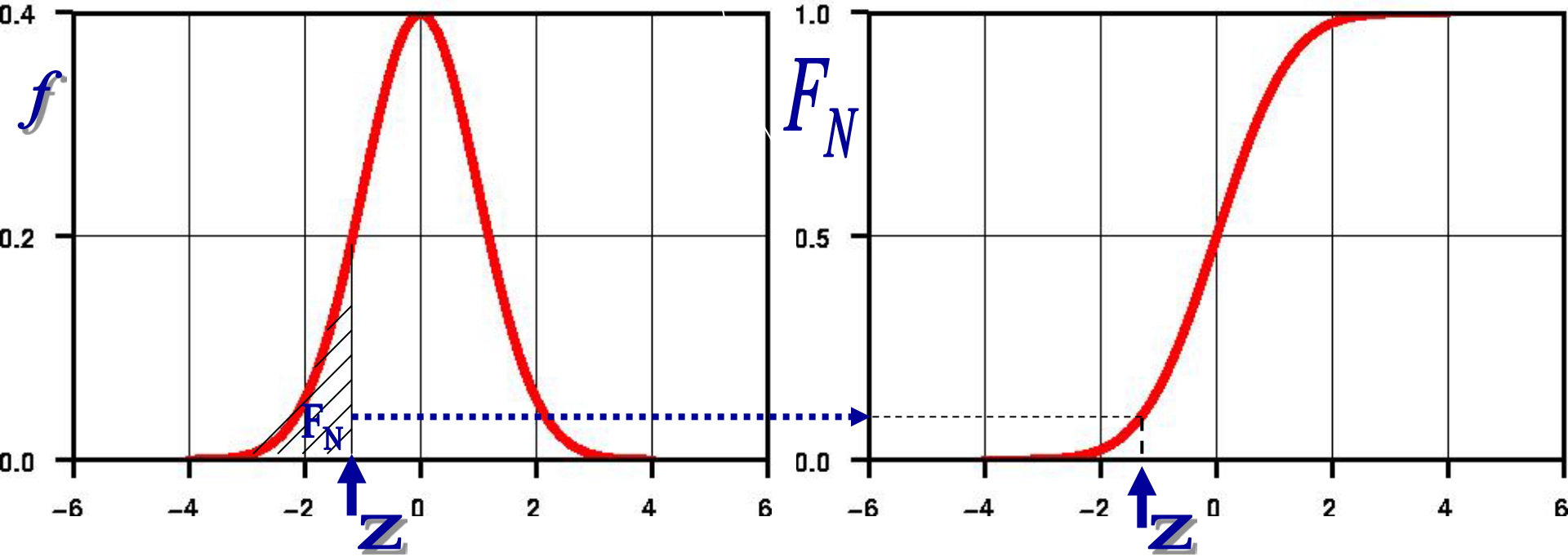
K - **=fator de frequência=K(n, Tr, distribuição)-tabelado**

σ_x - =Desvio padrão da variável x

Distribuição normal padrão

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(-\frac{1}{2}z^2\right)} \Rightarrow F_N(z) = \int_{-\infty}^{z} f(z).dz$$

tabelada p/ a variável aleatória padronizada z(média=0;d.p.=1)



- Definindo:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \text{var}\,iável\ \ padrão\ ou\ reduzida$$

$$\mu = \bar{x} = média\ \ dos\ valores\ x\ do\ registro$$

$$\sigma = S_x = desvio\ \ padrão\ \ dos\ valores\ x\ do\ registro$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

- Vantagem da padronização= valores tabelados

Distribuição normal

No caso da Distribuição Normal, o período de retorno é definido por:

$$T = \frac{1}{[1 - F_N(x)]}$$

Distribuição normal

pontos característicos:

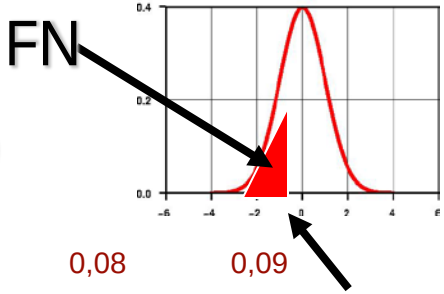
$$\mu : F_N(\mu) = 50\,\%$$
$$\mu - \sigma : F_N(\mu - \sigma) = 15{,}87\,\%$$
$$\mu + \sigma : F_N(\mu + \sigma) = 84{,}13\,\%$$

$$\textit{como} \quad z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$x = \mu + \sigma \quad \textit{corresponde a} \quad z = 1$$

$$x = \mu - \sigma, \quad \textit{corresponde a} \quad z = -1$$

Tabela da Distribuição Normal Padrão



Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

Tabela da Distribuição Normal Padrão-cont.

	0,0000	0,0100	0,0200	0,0300	0,0400	0,0500	0,0600	0,0700	0,0800	0,0900
2,1000	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2000	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3000	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4000	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5000	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6000	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7000	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8000	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9000	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0000	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1000	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2000	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3000	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4000	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5000	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6000	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

exemplo: se x é normalmente distribuída com média=0 e dp=1, então Pr(x<=1,23)=0,8907

A variável reduzida z pode ser estimada analiticamente, a partir da probabilidade de ocorrência p=1/Tr

$$z=W-(2{,}515517+0{,}802853W+0{,}01032*W^2+0{,}001308*W^3)/(1+1{,}432788W+0{,}189269W^2+0{,}001308W^3)$$

Sendo $W=[\ln(1/p^2)]^{1/2}$ para p<=0,5

Para p>0,5, substituir p por 1-p na expressão de W (acima) e o valor de z é produzido com sinal negativo

Exemplo: dada a amostra

ano	Q
1950	804
1951	1090
1952	1580
1953	487
1954	719
1955	140
1956	1583
1957	1642
1958	1587
1959	218
1960	623
1961	507
1962	1303
1963	197
1964	583
1965	377
1966	348
1967	804
1968	328
1969	245
1970	140
1971	49
1972	1651

The error in this formula is less than 0.00045 in (Abramowitz and Stegun, 1965)

ano	Q
1973	716
1974	286
1975	671
1976	3069
1977	306
1978	116
1979	162
1980	425
1981	1982
1982	277
1983	1254
1984	430
1985	260
1986	276
1987	1657
1988	937
1989	714
1990	855
1991	399
1992	1543
1993	360
1994	348

Tr (anos)	Prob., p	W	Knormal	var. reduzida normal, z	Média amostral	dp amostral	Qnormal
20	0,05	2,448	1,642	1,642	756,6	639,5	1806,6

OBS:
a última tabela foi construída com o suporte da planilha eletrônica Excel, usando a função estatística
DIST.NORMP(z)

Usando a distribuição normal passo a passo

- Calcular a média
- Calcular desvio padrão
- Obter os valores de K da tabela para probabilidades de 90, 50, 20, 10, 4, 2 e 1%, que correspondem aos TR 1,1; 2; 5; 10; 25; 50 e 100 anos.
- Calcular a magnitude para cada TR por

$$X = \overline{X} + K\sigma_X$$

Distribuição Normal

- fator de frequência=K(Tr, dist. Normal)

$$K = z_{teórico} = z(1 - F_N)$$

Outras possibilidades:

- Usar o papel de probabilidade

- Usar Excel:
- Funções:
  - DIST.NORMP(z) e INV.NORMP(F)

Daqui para frente: curiosidades

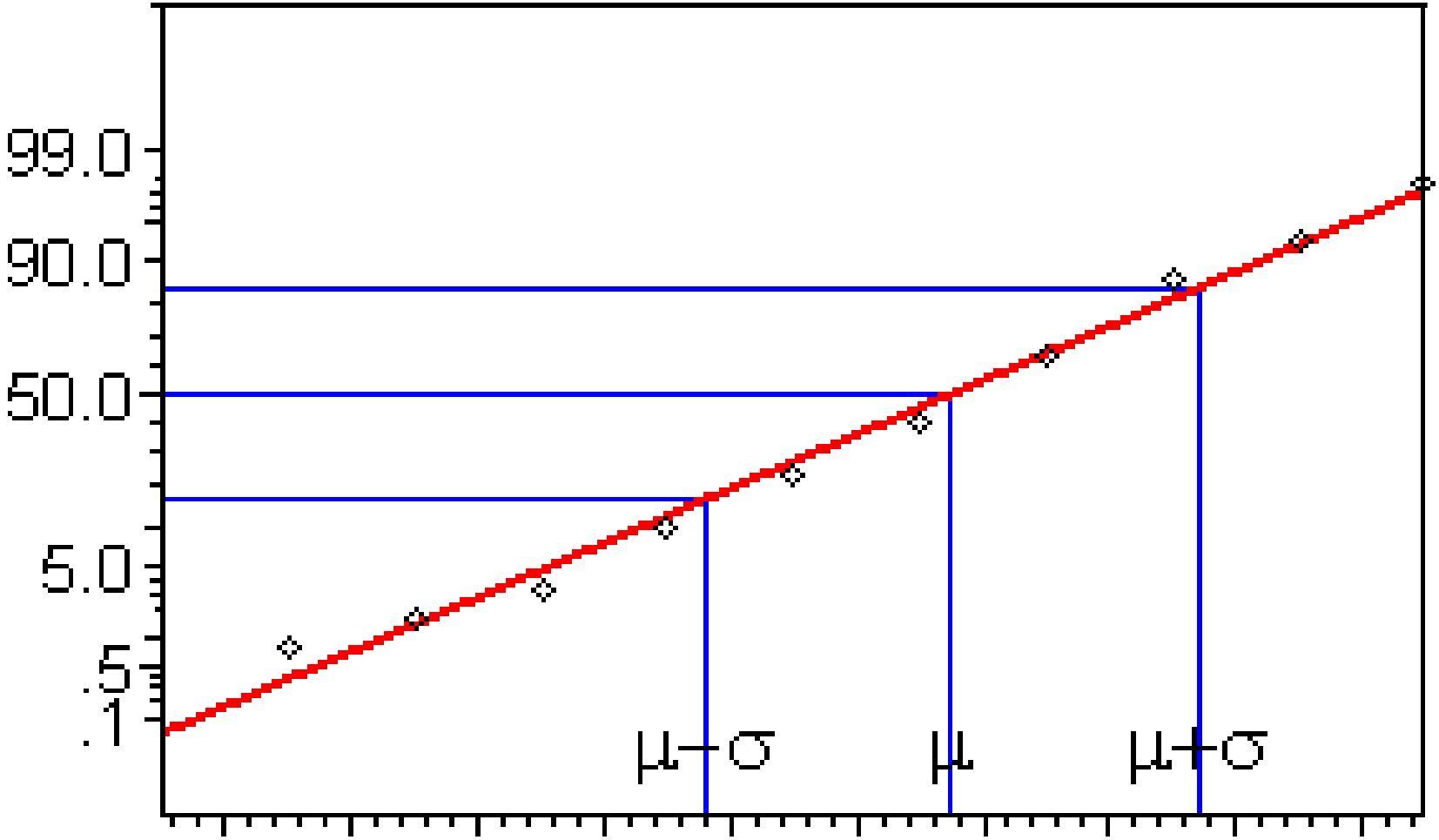
- construção do papel de probabilidade normal

- Lembrar que ele é especialmente construído para linearizar dados normalmente distribuídos

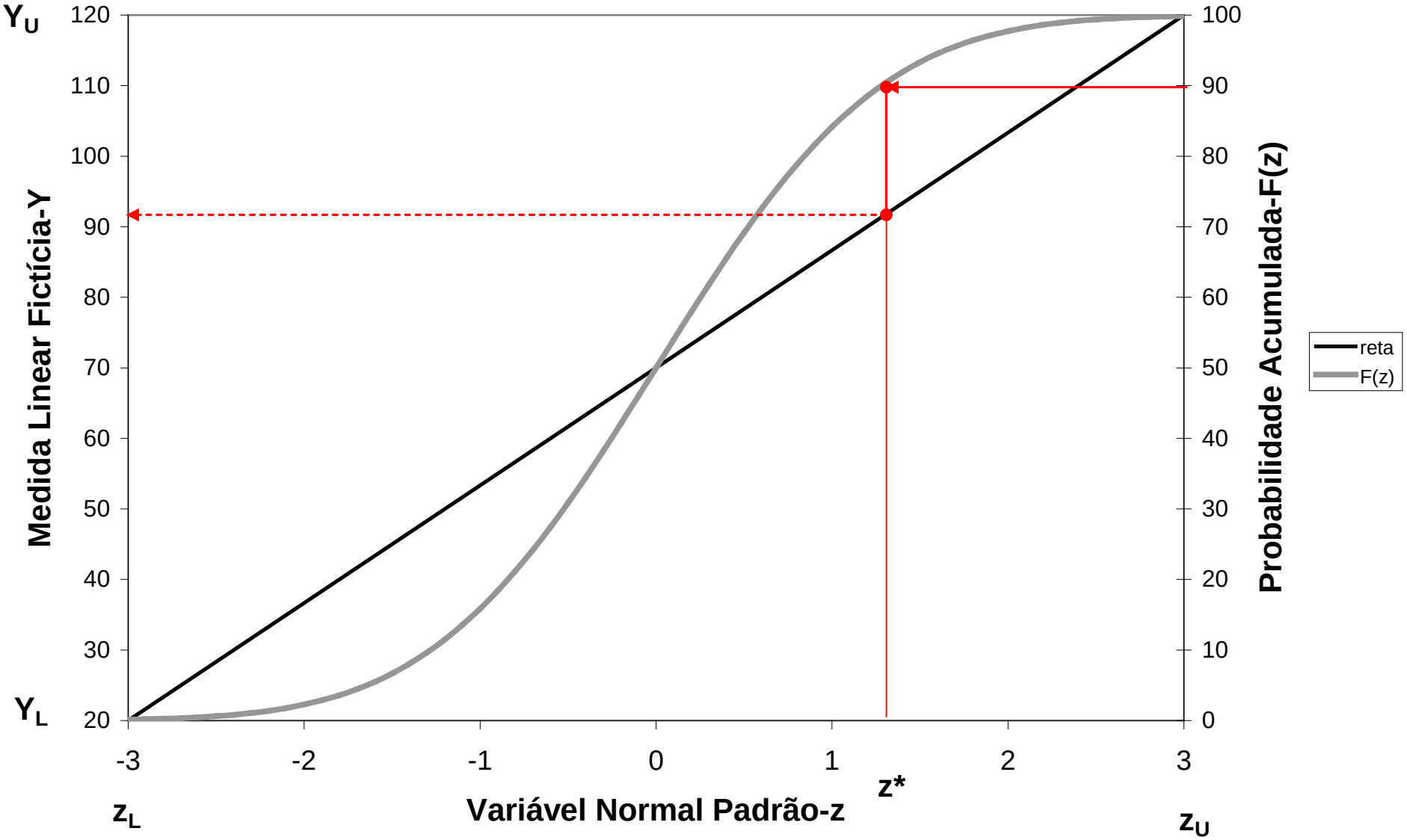
Papel de Probabilidade Normal

$$F_N(\%)\ ou\ [1 - F_N](\%)$$

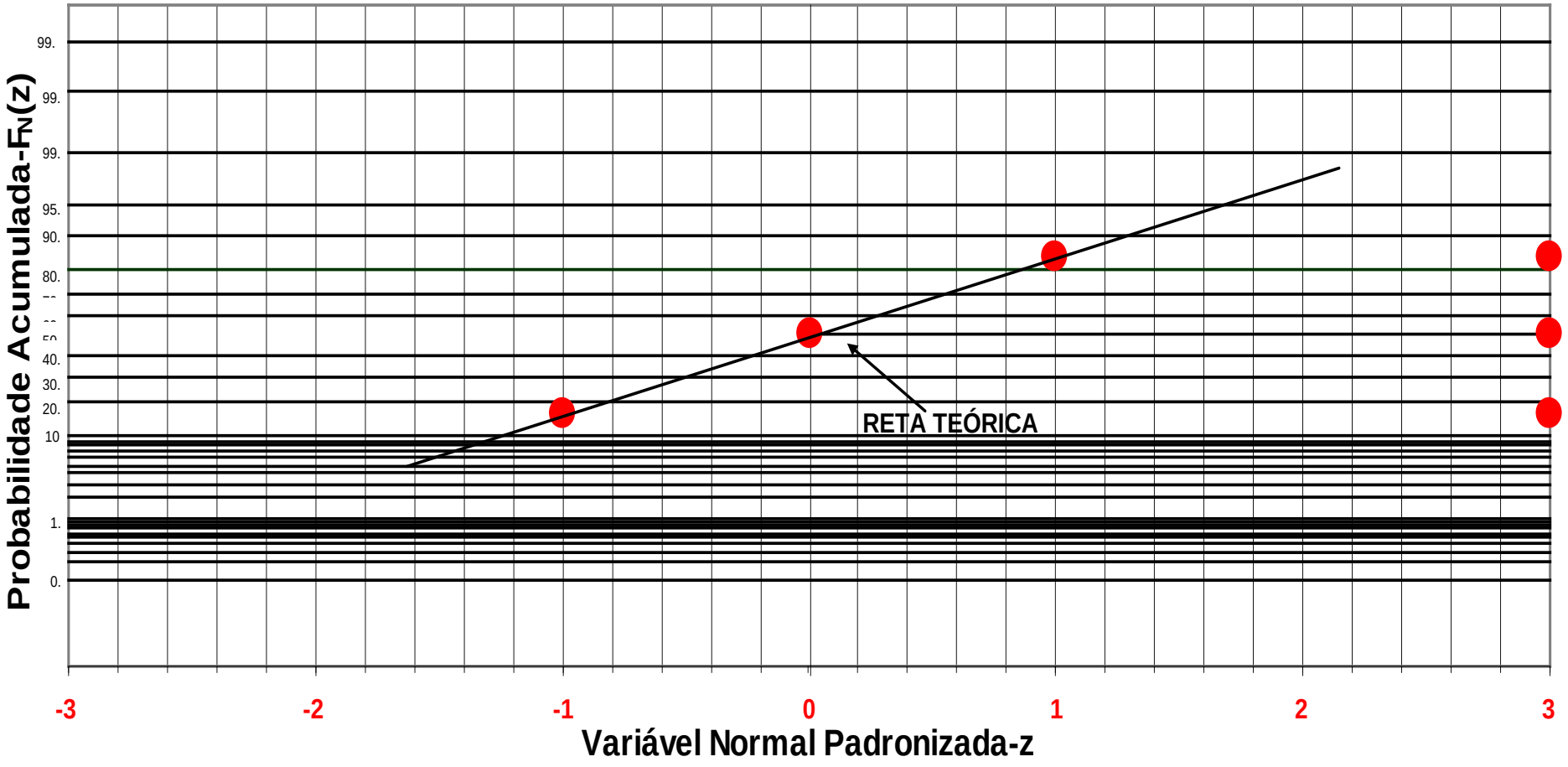
$$neste\ caso, F_N(\%)(\ prob.cresce\ com\ valores\ da\ var\ iável\ )$$



Papel de Probabilidade Normal construção: $Y = Y_L + (Y_U - Y_L).(z^* - z_L)/(z_U - z_L)$



Papel de Probabilidade Normal



Vamos fazer o teste do papel de distribuição normal entregue em sala?

- Procedimento:

- No meio do eixo x coloque o valor 0 para a variável reduzida z, que representa a média dos dados normalmente distribuídos de interesse.

- Do lado direito de 0 dê um espaço e coloque o valor 1. Usando o mesmo espaçamento à esquerda de 0, coloque o valor -1. Esses valores representam respectivamente (média + desvio padrão) e (média – desvio padrão) de dados normalmente distribuídos.

- Para esses 3 valores, os valores correspondentes no eixo y são as probabilidades de excedência de z= -1, 0 e 1, respectivamente, ou seja 84,13%, 50% e 15,87 % da distribuição normal correspondentes e verificar se eles se alinham segundo uma reta(reta da distribuição normal teórica). Caso isso não ocorra, o papel de probabilidade entregue não foi construído adequadamente.

- Exercício:
- Você recebeu o seguinte conjunto de dados de totais precipitados anuais (mm) e gostaria de verificar se eles se ajustam à distribuição normal, usando o papel de probabilidade normal.

ano	P(mm)	ano	P(mm)	ano	P(mm)
1970	1348,3	1980	1662,2	1990	1385,2
1971	1265,8	1981	1375,5	1991	1880,6
1972	1346,2	1982	1754,1	1992	1406,7
1973	1396,2	1983	2172,8	1993	1413,5
1974	1181,2	1984	1180,1	1994	1255,9
1975	1378	1985	1130	1995	2056
1976	2097,2	1986	1633,1	1996	1846,4
1977	1353,5	1987	1532,8	1997	1296,5
1978	1113,7	1988	1727,3	1998	1432,8
1979	1407,6	1989	1333,6	1999	1168,8
				2000	1614,5

- Em caso afirmativo, tais dados devem quando pré-processados e plotados no papel, estar aderidos à reta teórica que você acabou de plotar.

Resolução: pré-processamento dos dados

ano	total anual (mm)	z	m	F=m/N+1 (%)	z teórico=z(1-F)	Total anual normal (mm)
1983	2172,8	2,415	1	3,13		
1976	2097,2	2,148	2	6,25		
1995	2056	2,003	3	9,38		
1991	1880,6	1,384	4	12,50		
1996	1846,4	1,263	5	15,63		
1982	1754,1	0,937	6	18,75		
1988	1727,3	0,843	7	21,88		
1980	1662,2	0,613	8	25,00		
1986	1633,1	0,510	9	28,13		
2000	1614,5	0,444	10	31,25		
1987	1532,8	0,156	11	34,38		
1998	1432,8	-0,197	12	37,50		
1993	1413,5	-0,265	13	40,63		
1979	1407,6	-0,286	14	43,75		
1992	1406,7	-0,289	15	46,88		
1973	1396,2	-0,326	16	50,00		
1990	1385,2	-0,365	17	53,13		
1975	1378	-0,390	18	56,25		
1981	1375,5	-0,399	19	59,38		
1977	1353,5	-0,477	20	62,50		
1970	1348,3	-0,495	21	65,63		
1972	1346,2	-0,503	22	68,75		
1989	1333,6	-0,547	23	71,88		
1997	1296,5	-0,678	24	75,00		
1971	1265,8	-0,786	25	78,13		
1994	1255,9	-0,821	26	81,25		
1974	1181,2	-1,085	27	84,38		
1984	1180,1	-1,089	28	87,50		
1999	1168,8	-1,129	29	90,63		
1985	1130	-1,266	30	93,75		
1978	1113,7	-1,323	31	96,88		
média	1488,584					
DP	283,3401					

Próximo passo:
plotar os valores das colunas destacadas em amarelo (eixo x) e azul (eixo y)

Por inspeção visual, dizer se os dados ajustam-se bem à distribuição normal

Exercícios

- 1. Analisando uma série de dados pluviométricos de um posto para o período de 1941 a 1968, vê-se que a precipitação de 1000 anos é de 2000 mm e a precipitação de 5 anos é de 1500 mm. Admitindo-se que a distribuição esteja de acordo com a distribuição de Gauss, responder (usando o papel e analiticamente):
- a. qual a probabilidade de se ter uma altura precipitada igual ou maior a 1400 mm?
- b. qual o valor da altura precipitada para um período de retorno de 20 anos?
- c. qual a probabilidade de haver uma altura precipitada de um período de retorno
- de 100 anos nos próximos 6 anos?
- d. calcular o valor da altura precipitada média anual?
- e. calcular o valor do desvio padrão das alturas precipitadas.

Exercícios(cont.)

- 2. A precipitação anual em um certo posto pluviométrico durante 85 anos está assim distribuída:
-
- inferior a 150 mm 6 vezes
- entre 150 a 249 mm 14 vezes
- entre 250 a 349 mm 20 vezes
- entre 350 a 449 mm 35 vezes
- superior a 450 mm 10 vezes
-
- com base em tais dados, responder:
- a. qual a probabilidade mais verossímil de haver uma precipitação anual superior a 450 mm durante um ano qualquer no futuro?
- b. qual a mais verossímil probabilidade de haver três anos consecutivos com precipitação superior a 450 mm/ano?

Exercícios(cont.)

- 3. Qual a probabilidade de um total anual de chuva maior ou igual ao total anual de chuva de 10 anos não ocorrer em nenhum período de 10 anos?

- Fim!