Lógica
Aula 17

Renata Wassermann

renata@ime.usp.br

2020

Modelos - definição

Sejam $\mathcal{F}$ os símbolos de funções e $\mathcal{P}$ os símbolos de predicado.
Um modelo $\mathcal{M}$ para $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ é dado por:

1. Um conjunto não vazio $\mathcal{A}$;
2. Para cada constante $c \in \mathcal{F}$, um elemento $c^{\mathcal{M}} \in \mathcal{A}$;
3. Para cada $f \in \mathcal{F}$ de aridade n, uma função $f : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}$;
4. Para cada $P \in \mathcal{P}$ de aridade n, um subconjunto $P^{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{A}^n$.

Interpretação de termos

Seja $\mathcal{M}$ um modelo e a uma função de *atribuição*, que leva uma variável a um elemento do universo de $\mathcal{M}$.

- $\|x\|^{\mathcal{M},a} = a(x)$

Interpretação de termos

Seja $\mathcal{M}$ um modelo e a uma função de *atribuição*, que leva uma variável a um elemento do universo de $\mathcal{M}$.

- $\|x\|^{\mathcal{M},a} = a(x)$
- $\|c\|^{\mathcal{M},a} = c^{\mathcal{M}}$

Interpretação de termos

Seja $\mathcal{M}$ um modelo e a uma função de *atribuição*, que leva uma variável a um elemento do universo de $\mathcal{M}$.

- $\|x\|^{\mathcal{M},a} = a(x)$
- $\|c\|^{\mathcal{M},a} = c^{\mathcal{M}}$
- Se t_1, t_2, ..., t_n são termos e $f \in \mathcal{F}$ tem aridade n, $\|f(t_1, t_2, ..., t_n)\|^{\mathcal{M},a} = f^{\mathcal{M}}(\|t_1\|^{\mathcal{M},a}, \|t_2\|^{\mathcal{M},a}, ..., \|t_n\|^{\mathcal{M},a})$.

Satisfação de fórmulas

Seja $\mathcal{M}$ um modelo e a uma função de *atribuição*.

- $\mathcal{M}, a \models P(t_1, t_2, ..., t_n)$ sse
  $(\|t_1\|^{\mathcal{M},a}, \|t_2\|^{\mathcal{M},a}, ..., \|t_n\|^{\mathcal{M},a}) \in P^{\mathcal{M}}$

Satisfação de fórmulas

Seja $\mathcal{M}$ um modelo e a uma função de *atribuição*.

- $\mathcal{M}, a \models P(t_1, t_2, ..., t_n)$ sse $(\|t_1\|^{\mathcal{M},a}, \|t_2\|^{\mathcal{M},a}, ..., \|t_n\|^{\mathcal{M},a}) \in P^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M}, a \models \neg\varphi$ sse $\mathcal{M}, a \not\models \varphi$

Satisfação de fórmulas

Seja $\mathcal{M}$ um modelo e a uma função de *atribuição*.

- $\mathcal{M}, a \models P(t_1, t_2, ..., t_n)$ sse $(\|t_1\|^{\mathcal{M},a}, \|t_2\|^{\mathcal{M},a}, ..., \|t_n\|^{\mathcal{M},a}) \in P^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M}, a \models \neg\varphi$ sse $\mathcal{M}, a \not\models \varphi$
- $\mathcal{M}, a \models \varphi \wedge \psi$ sse $\mathcal{M}, a \models \varphi$ e $\mathcal{M}, a \models \psi$

Satisfação de fórmulas

Seja $\mathcal{M}$ um modelo e a uma função de *atribuição*.

- $\mathcal{M}, a \models P(t_1, t_2, ..., t_n)$ sse $(\|t_1\|^{\mathcal{M},a}, \|t_2\|^{\mathcal{M},a}, ..., \|t_n\|^{\mathcal{M},a}) \in P^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M}, a \models \neg\varphi$ sse $\mathcal{M}, a \not\models \varphi$
- $\mathcal{M}, a \models \varphi \wedge \psi$ sse $\mathcal{M}, a \models \varphi$ e $\mathcal{M}, a \models \psi$
- $\mathcal{M}, a \models \varphi \vee \psi$ sse $\mathcal{M}, a \models \varphi$ ou $\mathcal{M}, a \models \psi$

Satisfação de fórmulas

Seja $\mathcal{M}$ um modelo e a uma função de *atribuição*.

- $\mathcal{M}, a \models P(t_1, t_2, ..., t_n)$ sse $(\|t_1\|^{\mathcal{M},a}, \|t_2\|^{\mathcal{M},a}, ..., \|t_n\|^{\mathcal{M},a}) \in P^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M}, a \models \neg\varphi$ sse $\mathcal{M}, a \not\models \varphi$
- $\mathcal{M}, a \models \varphi \wedge \psi$ sse $\mathcal{M}, a \models \varphi$ e $\mathcal{M}, a \models \psi$
- $\mathcal{M}, a \models \varphi \vee \psi$ sse $\mathcal{M}, a \models \varphi$ ou $\mathcal{M}, a \models \psi$
- $\mathcal{M}, a \models \varphi \rightarrow \psi$ sse $\mathcal{M}, a \not\models \varphi$ ou $\mathcal{M}, a \models \psi$

Satisfação de fórmulas

Seja $a[x \rightarrowtail d]$ a função tal que $a[x \rightarrowtail d](x) = d$ e $a[x \rightarrowtail d](y) = a(y)$ para todo $y \neq x$.

- $\mathcal{M}, a \models \forall x \varphi$ sse para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \varphi$

Satisfação de fórmulas

Seja $a[x \rightarrowtail d]$ a função tal que $a[x \rightarrowtail d](x) = d$ e $a[x \rightarrowtail d](y) = a(y)$ para todo $y \neq x$.

- $\mathcal{M}, a \models \forall x \varphi$ sse para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \varphi$
- $\mathcal{M}, a \models \exists x \varphi$ sse para algum $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \varphi$

Satisfação de fórmulas

Seja $a[x \rightarrowtail d]$ a função tal que $a[x \rightarrowtail d](x) = d$ e $a[x \rightarrowtail d](y) = a(y)$ para todo $y \neq x$.

- $\mathcal{M}, a \models \forall x \varphi$ sse para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \varphi$
- $\mathcal{M}, a \models \exists x \varphi$ sse para algum $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \varphi$

Satisfação de fórmulas

Seja $a[x \rightarrowtail d]$ a função tal que $a[x \rightarrowtail d](x) = d$ e $a[x \rightarrowtail d](y) = a(y)$ para todo $y \neq x$.

- $\mathcal{M}, a \models \forall x \varphi$ sse para qualquer $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \varphi$
- $\mathcal{M}, a \models \exists x \varphi$ sse para algum $d \in \mathcal{A}$, $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail d] \models \varphi$

OBS.: Se a fórmula não tem variáveis livres, a é irrelevante.

Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

$\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y)$

Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

$\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que: $\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x, y)$

Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

$\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que: $\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:

$\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1][x \rightarrowtail d_2] \models R(x, y)$

Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

$\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que: $\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1][x \rightarrowtail d_2] \models R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:

Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

$\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que: $\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1][x \rightarrowtail d_2] \models R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$(d_2, d_1) \in R^{\mathcal{M}}$

Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

$\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que: $\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1][x \rightarrowtail d_2] \models R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$(d_2, d_1) \in R^{\mathcal{M}}$

Seja $d_1 = 2$. Para todo $d_2 \in \mathcal{A}$ vale que $(d_2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$

Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

$\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que: $\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1][x \rightarrowtail d_2] \models R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$(d_2, d_1) \in R^{\mathcal{M}}$

Seja $d_1 = 2$. Para todo $d_2 \in \mathcal{A}$ vale que $(d_2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$

$\iff$ $(1, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ e $(2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ e $(3, 2) \in R^{\mathcal{M}}$

Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

$\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que: $\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1][x \rightarrowtail d_2] \models R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$(d_2, d_1) \in R^{\mathcal{M}}$

Seja $d_1 = 2$. Para todo $d_2 \in \mathcal{A}$ vale que $(d_2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$

$\iff$ $(1, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ e $(2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ e $(3, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ ✓

Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ ?$$

$\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y)$ ✓

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que: $\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1][x \rightarrowtail d_2] \models R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$(d_2, d_1) \in R^{\mathcal{M}}$

Seja $d_1 = 2$. Para todo $d_2 \in \mathcal{A}$ vale que $(d_2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$

$\iff$ $(1, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ e $(2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ e $(3, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ ✓

Exemplo 1

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \{1, 2, 3\} \quad R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

$$\mathcal{M} \models \exists y \forall x R(x, y) \ \checkmark$$

$\mathcal{M}, a \models \exists y \forall x R(x, y) \ \checkmark$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que: $\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1] \models \forall x R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$\mathcal{M}, a[y \rightarrowtail d_1][x \rightarrowtail d_2] \models R(x, y)$

$\iff$ existe um $d_1 \in \mathcal{A}$ tal que para todo $d_2 \in \mathcal{A}$:
$(d_2, d_1) \in R^{\mathcal{M}}$

Seja $d_1 = 2$. Para todo $d_2 \in \mathcal{A}$ vale que $(d_2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$

$\iff$ $(1, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ e $(2, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ e $(3, 2) \in R^{\mathcal{M}}$ $\checkmark$

Exemplo 2

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \mathbb{Z} \;\; e^{\mathcal{M}} = 1 \;\; .^{\mathcal{M}}$: multiplicação $\;\; \leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

$$\mathcal{M} \models \forall x(x \leq x.e) \;\; ?$$

$\mathcal{M}, a \models \forall x(x \leq x.e)$

Exemplo 2

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \mathbb{Z} \;\; e^{\mathcal{M}} = 1 \;\; .^{\mathcal{M}}$: multiplicação $\;\; \leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

$$\mathcal{M} \models \forall x(x \leq x.e) \;\; ?$$

$\mathcal{M}, a \models \forall x(x \leq x.e)$

Exemplo 2

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \mathbb{Z} \;\; e^{\mathcal{M}} = 1 \;\; .^{\mathcal{M}}$: multiplicação $\;\; \leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

$$\mathcal{M} \models \forall x(x \leq x.e) \;\; ?$$

$\mathcal{M}, a \models \forall x(x \leq x.e)$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $\;\; \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail n] \models x \leq x.e$

Exemplo 2

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \mathbb{Z} \;\; e^{\mathcal{M}} = 1 \;\; .^{\mathcal{M}}$: multiplicação $\;\; \leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

$$\mathcal{M} \models \forall x(x \leq x.e) \;\; ?$$

$\mathcal{M}, a \models \forall x(x \leq x.e)$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $\;\; \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail n] \models x \leq x.e$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $\;\; (\|x\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}, \|x.e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}}$

Exemplo 2

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \mathbb{Z} \;\; e^{\mathcal{M}} = 1 \;\; .^{\mathcal{M}}$: multiplicação $\;\; \leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

$$\mathcal{M} \models \forall x(x \leq x.e) \;\; ?$$

$\mathcal{M}, a \models \forall x(x \leq x.e)$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $\;\; \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail n] \models x \leq x.e$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $\;\; (\|x\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}, \|x.e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}}$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $\;\; (n, \|x.e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}}$

Exemplo 2

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \mathbb{Z} \;\; e^{\mathcal{M}} = 1 \;\; .^{\mathcal{M}}$: multiplicação $\;\; \leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

$$\mathcal{M} \models \forall x(x \leq x.e) \;\; ?$$

$\mathcal{M}, a \models \forall x(x \leq x.e)$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $\;\; \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail n] \models x \leq x.e$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $\;\; (\|x\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}, \|x.e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}}$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $\;\; (n, \|x.e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}}$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $\;\; (n, \|x\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]} .^{\mathcal{M}} \|e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}}$

Exemplo 2

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \mathbb{Z} \;\; e^{\mathcal{M}} = 1 \;\; .^{\mathcal{M}}$: multiplicação $\;\; \leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

$$\mathcal{M} \models \forall x(x \leq x.e) \;\; ?$$

$\mathcal{M}, a \models \forall x(x \leq x.e)$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail n] \models x \leq x.e$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $(\|x\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}, \|x.e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}}$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $(n, \|x.e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}}$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $(n, \|x\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]} .^{\mathcal{M}} \|e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}}$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $(n, n * 1) \in \leq^{\mathcal{M}}$

Exemplo 2

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \mathbb{Z} \;\; e^{\mathcal{M}} = 1 \;\; .^{\mathcal{M}}$: multiplicação $\;\; \leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

$$\mathcal{M} \models \forall x(x \leq x.e) \;\; ?$$

$\mathcal{M}, a \models \forall x(x \leq x.e)$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail n] \models x \leq x.e$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $(\|x\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}, \|x.e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}}$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $(n, \|x.e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}}$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $(n, \|x\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]} .^{\mathcal{M}} \|e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}}$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $(n, n * 1) \in \leq^{\mathcal{M}}$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $(n, n) \in \leq^{\mathcal{M}}$

Exemplo 2

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \mathbb{Z} \;\; e^{\mathcal{M}} = 1 \;\; .^{\mathcal{M}}$: multiplicação $\;\; \leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

$$\mathcal{M} \models \forall x(x \leq x.e) \;\; ?$$

$\mathcal{M}, a \models \forall x(x \leq x.e)$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $\mathcal{M}, a[x \rightarrowtail n] \models x \leq x.e$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $(\|x\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}, \|x.e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}}$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $(n, \|x.e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}}$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $(n, \|x\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]} .^{\mathcal{M}} \|e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}}$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $(n, n * 1) \in \leq^{\mathcal{M}}$

$\iff$ para todo $n \in \mathcal{A}$: $(n, n) \in \leq^{\mathcal{M}}$ ✓

Exemplo 2

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \mathbb{Z} \;\; e^{\mathcal{M}} = 1 \;\; .^{\mathcal{M}}$: multiplicação $\;\; \leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

$$\mathcal{M} \models \forall x(x \leq x.e) \;\; ?$$

$\mathcal{M}, a \models \forall x(x \leq x.e)$ ✓

$$\begin{aligned}
\iff & \text{ para todo } n \in \mathcal{A}: \quad \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail n] \models x \leq x.e \\
\iff & \text{ para todo } n \in \mathcal{A}: \quad (\|x\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}, \|x.e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}} \\
\iff & \text{ para todo } n \in \mathcal{A}: \quad (n, \|x.e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}} \\
\iff & \text{ para todo } n \in \mathcal{A}: \quad (n, \|x\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]} .^{\mathcal{M}} \|e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}} \\
\iff & \text{ para todo } n \in \mathcal{A}: \quad (n, n * 1) \in \leq^{\mathcal{M}} \\
\iff & \text{ para todo } n \in \mathcal{A}: \quad (n, n) \in \leq^{\mathcal{M}} \;\; ✓
\end{aligned}$$

Exemplo 2

$\mathcal{M} : \mathcal{A} = \mathbb{Z} \;\; e^{\mathcal{M}} = 1 \;\; .^{\mathcal{M}}$: multiplicação $\;\; \leq^{\mathcal{M}}$: menor ou igual

$$\mathcal{M} \models \forall x(x \leq x.e) \;\; \checkmark$$

$\mathcal{M}, a \models \forall x(x \leq x.e) \;\; \checkmark$

$$\begin{aligned}
&\iff \text{para todo } n \in \mathcal{A}: \quad \mathcal{M}, a[x \rightarrowtail n] \models x \leq x.e \\
&\iff \text{para todo } n \in \mathcal{A}: \quad (\|x\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}, \|x.e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}} \\
&\iff \text{para todo } n \in \mathcal{A}: \quad (n, \|x.e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}} \\
&\iff \text{para todo } n \in \mathcal{A}: \quad (n, \|x\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]} .^{\mathcal{M}} \|e\|^{\mathcal{M},a[x\rightarrowtail n]}) \in \leq^{\mathcal{M}} \\
&\iff \text{para todo } n \in \mathcal{A}: \quad (n, n * 1) \in \leq^{\mathcal{M}} \\
&\iff \text{para todo } n \in \mathcal{A}: \quad (n, n) \in \leq^{\mathcal{M}} \;\; \checkmark
\end{aligned}$$

Consequência Lógica

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi$$

Consequência Lógica

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi$$

$$\Updownarrow$$

Para qualquer modelo $\mathcal{M}$ e qualquer atribuição a,
se $\mathcal{M}, a \models \varphi_i$, então $\mathcal{M}, a \models \psi$

Dois usos de $\models$

1. Para verificar $\mathcal{M} \models \varphi$, se $\mathcal{A}$ for infinito, podemos ter de testar infinitos elementos.

Dois usos de $\models$

1. Para verificar $\mathcal{M} \models \varphi$, se $\mathcal{A}$ for infinito, podemos ter de testar infinitos elementos.
2. Para verificar $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_n \models \psi$, temos de verificar **todos** os modelos.

Exemplo 1

$$\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x) \models \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

Exemplo 1

$$\forall x P(x) \to \forall x Q(x) \models \forall x (P(x) \to Q(x))$$

Seja $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{A} = \{a, b\}$

Exemplo 1

$$\forall x P(x) \to \forall x Q(x) \models \forall x (P(x) \to Q(x))$$

Seja $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- $P^{\mathcal{M}} = \{a\}$

Exemplo 1

$$\forall x P(x) \to \forall x Q(x) \models \forall x (P(x) \to Q(x))$$

Seja $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- $P^{\mathcal{M}} = \{a\}$
- $Q^{\mathcal{M}} = \{b\}$

Exemplo 1

$$\forall x P(x) \to \forall x Q(x) \models \forall x (P(x) \to Q(x))$$

Seja $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- $P^{\mathcal{M}} = \{a\}$
- $Q^{\mathcal{M}} = \{b\}$

Exemplo 1

$$\forall x P(x) \to \forall x Q(x) \models \forall x (P(x) \to Q(x))$$

Seja $\mathcal{M}$:

- $\mathcal{A} = \{a, b\}$
- $P^{\mathcal{M}} = \{a\}$
- $Q^{\mathcal{M}} = \{b\}$

$$\forall x (P(x) \to Q(x)) \models \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$$