

Controle H_∞ - Aula 9

Prof. Diego Colón

10 de noviembre de 2020

Critério de Nyquist Multivariável - 1

Seja um sistema MIMO de modo que a matriz de funções de transferência em malha aberta é $L(s) = G(s)K(S)$. Suponha ainda que $L(s)$ possui uma representação em espaço de estados:

$$L(s) = C_{ol}(sI - A_{ol})^{-1}B_{ol} + D_{ol}$$

deste modo, os polos de malha aberta são as raízes do polinômio característico $\phi_{ol}(s) = \det(sI - A_{ol})^{-1}$. O sistema em malha fechada e dado pela realimentação do erro na entrada de L , ou seja, tem-se que:

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_{ol}x + B_{ol}(r - y) \\ y &= C_{ol}x + D_{ol}(r - y) \end{cases}$$

de modo que se isolarmos y , teremos $(I - D_{ol})y = C_{ol}x + D_{ol}r$, de modo que o sistema em malha fechada fica com a seguinte realização em espaço de estados:

$$\dot{x} = \underbrace{[A_{ol} - B_{ol}(I - D_{ol})^{-1}C_{ol}]}_{A_{cl}} x + \underbrace{B_{ol}[I - (I - D_{ol})^{-1}D_{ol}]}_{B_{cl}} r$$

de modo que o polinômio característico em malha fechada é $\phi_{cl}(s) = \det(sI - A_{cl})^{-1}$

Lema (Fórmula de Schur)

Dada uma matriz particionada F , tem-se que:

$$\det \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \det F_{11} \det(F_{22} - F_{21}F_{11}^{-1}F_{12}) = \det F_{22} \det(F_{11} - F_{12}F_{22}^{-1}F_{21}) \quad (1)$$

Deste modo, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\det[I + L(s)] &= \det[I + C_{ol}(sI - A_{ol})^{-1}B_{ol} + D_{ol}] = \\ &= \det[(I + D_{ol}) + C_{ol}(sI - A_{ol})^{-1}B_{ol}] = \\ &= \frac{\det(I + D_{ol})}{\det(sI - A_{ol})} \det[sI - A_{ol} + B_{ol}(I + D_{ol})^{-1}C_{ol}] = \\ &= \det(I + D_{ol}) \frac{\det(sI - A_{cl})}{\det(sI - A_{ol})} \quad (2)\end{aligned}$$

As seguintes modificações devem ser feitas: 1) o percurso de Nyquist se mantém igual ao do caso SISO; 2) deve-se traçar o correspondente gráfico polar de Nyquist para a função $\det(I + L(s))$; 3) N é o número de voltas em torno da origem [?]. O critério de estabilidade de Nyquist MIMO fica então enunciado como:

Teorema

Se P é o número de polos de malha aberta de $L(s)$ no semiplano direito, o sistema em malha fechada é estável se e somente se o gráfico de Nyquist de $\det(I + L(j\omega))$:

- 1* **1** *Dá P voltas em torno da origem no sentido anti-horário*
- 2* **2** *Não passa pela origem (ou seja, não tem polos de malha fechada no eixo imaginário)*

exemplos Para o sistema do exemplo anterior, considerando que o controlador é da forma $K(s) = kI$, tem-se os gráficos de Nyquist para valores de k até 0.25. Neste último caso, vê-se que o gráfico polar está quase envolvendo a origem, o que indica o limiar de estabilidade. Esta situação corresponde aos valores altos de $\|S\|_{\infty}$.

Critério de Nyquist Multivariável - 6

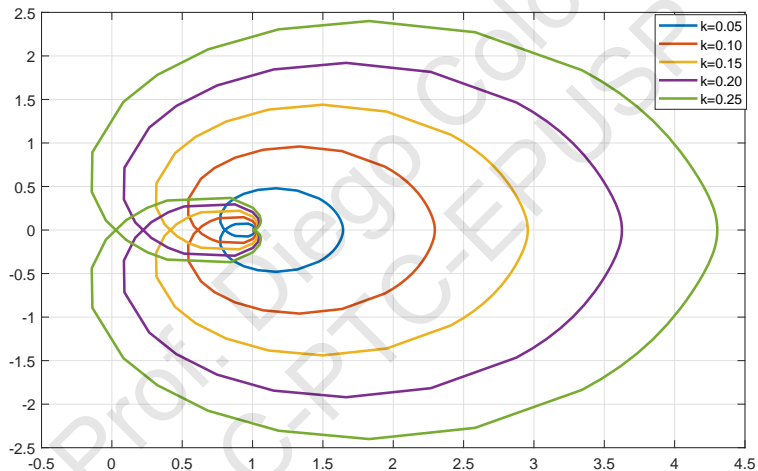


Figura: Diagrama de Nyquist para Vários Valores

Teorema do Pequeno Ganho - 1

O teorema do pequeno ganho é um resultado que vale para sistemas MIMO que é uma condição suficiente (mas não necessária) para estabilidade em malha fechada. Em geral, é dito como sendo um resultado *conservador*, no sentido que acaba limitando demasiadamente o desempenho de um sistema quando aplicado para se garantir robustez de estabilidade.

Definição (Raio Espectral)

Define-se o raio espectral da função de transferência em malha aberta $L(j\omega)$ como sendo:

$$\rho(L(j\omega)) = \max_i |\lambda_i(L(j\omega))|$$

ou seja, trata-se do máximo autovalor para cada frequência.

Deste modo, pode-se enunciar o chamado:

Teorema (Teorema do Raio Espectral)

Se $L(j\omega)$ é estável, o sistema em malha fechada é estável se:

$$\rho(L(j\omega)) < 1, \text{ para qualquer } \omega$$

Teorema do Pequeno Ganho - 3

Demonstração.

De fato, se $L(s)$ é estável, então $P = 0$, de modo que para ser ter instabilidade, é necessário que $\det(I + L(j\omega))$ envolva uma ou mais vezes a origem. Se isto acontece, então vai existir um $1 > \epsilon > 0$ tal que para alguma frequência $\bar{\omega}$, teremos que $\det(I + \epsilon L(j\bar{\omega})) = 0$. Isto ocorre porque ao fazer esta multiplicação é o mesmo que atenuar o função de transferência e malha aberta de modo que ela cruze a origem em algum ponto. Como o determinante é igual ao produto dos autovalores, então tem-se que:

$$\det(I + \epsilon L(j\bar{\omega})) = \prod_i \lambda_i(I + \epsilon L(j\bar{\omega})) = 0$$

Sendo assim, para algum i , o correspondente autovalor deve ser nulo. Como $\lambda(I + \alpha A) = 1 + \alpha \lambda(A)$, então tem-se que para algum i , tem-se que $1 + \epsilon \lambda_i(L(j\bar{\omega})) = 0$, o que só é possível se $|\lambda_i(L(j\bar{\omega}))| \geq 1$. Como o raio espectral é o máximo autovalor para cada frequência, então, o único jeito de não se ter instabilidade é se o raio espectral for menor que um, o que é o resultado. ■

Para o caso SISO, tem-se que o raio espectral é simplesmente o módulo $|L(j\omega)|$, de modo que uma condição suficiente para se ter estabilidade para um sistema SISO é $|L(j\omega)| < 1$. Isto é equivalente a dizer que o gráfico de Nyquist da função de transferência em malha aberta nunca sai do círculo unitário. Se est critério fosse usado para encontrar um controlador $K(s)$, isto resultaria em um sistema muito restritivo, pois não permitiria, por exemplo, altos valores em baixas frequências, que são importantes para se ter erro estacionário pequeno.

Teorema (Teorema do Pequeno Ganho)

Se $L(j\omega)$ é estável, o sistema em malha fechada é estável se:

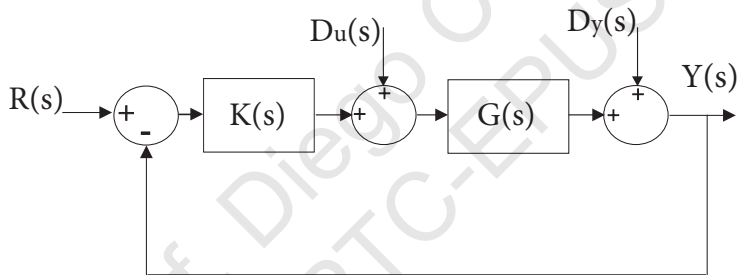
$$\|L(j\omega)\| < 1, \text{ para qualquer } \omega$$

onde esta normal de matriz pode ser qualquer norma desde que satisfaça $\|A.B\| \leq \|A\|\|B\|$.

O interessante do teorema do pequeno ganho é que ele vale para uma classe mais ampla de sistemas não-lineares, onde não se pode aplicar o critério de Nyquist.

A estabilidade interna de um sistema MIMO em malha fechada é equivalente a dizer que qualquer representação em espaço de estados deste sistema tem a origem (que é um ponto de equilíbrio) assintoticamente estável. Entretanto, o gráfico de Nyquist MIMO depende somente dos pólos de $L(s)$. Os pólos que se cancelam com zeros, correspondentes a modos não-controláveis e/ou não-observáveis não aparecem em $L(s)$, logo o gráfico de Nyquist independe deles.

Não está garantida a estabilidade em MF se houver algum cancelamento de pólo com zero no semiplano direito e interno a $G(s)$, a $K(s)$ ou entre $G(s)$ e $K(s)$. Diz-se que um sistema em MF é *internamente estável* se para uma representação em espaço de estados do sistema, a origem do espaço de estados é assintoticamente estável para quaisquer sinais d_u e d_y e r



Para que o sistema seja internamente estável, é necessário que:

- 1 Não haja polos internos nem a K nem a G que sejam ocultos e instáveis
- 2 Não haja cancelamento de pólos de K com zeros de G no semiplano direito (e vice-versa)
- 3 para $L = GK$, o critério de Nyquist resulte em $Z = 0$.

Teorema

Suponha que G e K não tenham polos ocultos e instáveis. Então, o sistema realimentado é internamente instável se e só se as funções de transferência em malha fechada:

$$GK(1+GK)^{-1}, \quad G(1+KG)^{-1}, \quad K(1+GK)^{-1}G, \quad -KG(1+KG)^{-1}$$

forem todas estáveis

Lema

Dado um sistema em malha fechada com realimentação negativa onde G_1 é o ramo direto e G_2 é o ramo de realimentação, então vale a seguinte identidade:

$$G_1(I + G_2 G_1)^{-1} = (I + G_1 G_2)^{-1} G_1$$

Demonstração.

Se multiplicarmos $G_1(I + G_2 G_1)^{-1} = (I + G_1 G_2)^{-1} G_1$ à esquerda por $(I + G_1 G_2)$ e à direita por $(I + G_2 G_1)$, teremos que:

$$\begin{aligned}(I + G_1 G_2)G_1(I + G_2 G_1)^{-1} &= G_1 \rightarrow (I + G_1 G_2)G_1 = G_1(I + G_2 G_1) \\ &\rightarrow G_1 + G_1 G_2 G_1 = G_1 + G_1 G_2 G_1 \quad (3)\end{aligned}$$

Deste modo, como GK está no ramo direto, então $GK(1 + GK)^{-1} = (1 + GK)^{-1}GK$

Para o caso de sistemas MIMO, infelizmente a situação é mais complicada para se obter a família de controladores estabilizantes, pois é necessário encontrar fatorações coprimas da planta $G(s)$, ou seja, encontrar matrizes de funções de transferência $M(s)$ e $N(s)$ pertencentes ao espaço \mathcal{H}_∞ e tal que $G(s) = N(s)M^{-1}(s)$ e os controladores são encontrados através da solução da equação diofantina:

$$U(s)N(s) + V(s)M(s) = I$$

O controlador dado por $K(s) = U(s)V^{-1}(s)$ é um controlador estabilizante. O conjunto de todos os controladores estabilizantes para $G(s)$ são então dados por:

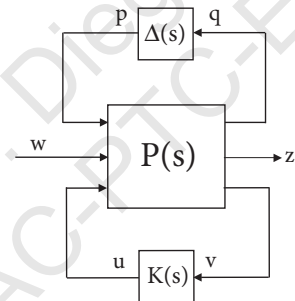
$$K_Q(s) = [U(s) + M(s)Q(s)][V(s) + N(s)Q(s)]^{-1}$$

onde $Q(s)$ é qualquer matriz de funções de transferência em \mathcal{H}_∞ . Existe uma parametrização também para a fatoração coprima $G(s) = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$ similar à anterior. Neste caso, há formulas diretas par solução das equações diofantinas.

Antes de entrarmos nos diversos tipos de situações que vamos querer resolver com a técnica de Controle H_∞ , devemos introduzir o chamado *problema padrão*, que é a forma que os algoritmos de projeto (em particular, o Robust Control Toolbox do MATLAB) requerem que o problema esteja de forma o poder operar. Esta forma padrão é apresentada na Fig. ??, que é composta por três matrizes de funções de transferência:

Problema Geral: Planta Estendida - 2

- $P(s)$: é a chamada planta estendida, que deve conter a planta combinada com matrizes de funções peso, cujo papel será esclarecido mais adiante;
- $K(s)$: o controlador, que é o objeto de estudo e projeto, que deve ter parâmetros invariantes no tempo
- $\Delta(s)$: a matrizes de funções de transferência de incertezas, conhecida como matriz das perturbações, e tal que $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$.



Problema Geral: Planta Estendida - 3

Os sinais apresentados neste diagrama de blocos são denominados:

- **w**: vetor dos sinais externos, que contem, dentre outros, sinais de referência, distúrbio e ruído;
- **z**: vetor os sinais conhecidos como *saídas de desempenho*, que não necessariamente contem as saídas tradicionais (medidas por sensores), mas podem contem qualquer sinal que se use para fins de projeto e análise de desempenho;
- **v**: vetor de entrada do controlador, que normalmente é o vetor de erros;
- **u**: vetor de sinais de controle fornecido pelo controlador à planta de modo a efetuar o controle em tempo real;
- **q**: é o vetor de sinais *virtuais* que são usados pela matriz de perturbações para criar as incertezas;
- **p**: é o vetor de sinais *virtuais* através dos quais a matriz de perturbações causa incertezas na planta.

É importante esclarecer que estes dois últimos sinais não existem fisicamente, mas somente durante o período de projeto do sistema, para efeito de representar as incertezas do sistema. O bloco $\Delta(s)$ nunca entra na fase de projeto do controlador $K(s)$. Deste modo, a matriz de funções de transferência da planta estendida pode ser particionada em:

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

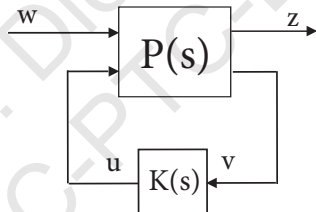
e uma representação em espaço de estados tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ v = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{cases}$$

Problema Geral: Planta Estendida - 5

Este pode ainda ser representada em um forma mais compacta, que é:

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (4)$$



de modo que a matriz de funções de transferência em malha fechada que relaciona \mathbf{w} e \mathbf{z} é dada pela fórmula:

$$\mathbf{z} = \underbrace{[P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}]}_{\mathcal{F}_l(P,K)} \mathbf{w}, \quad (5)$$

onde \mathcal{F}_l é conhecida como *transformação linear fracionária inferior* das matrizes P e K . Em seguida, busca-se encontrar o controlador $K(s)$ que estabiliza internamente o sistema em malha fechada com a planta estendida $P(s)$ e tal que satisfaz o problema de otimização:

$$\min_{K(s) \text{ inter. stab.}} \|\mathcal{F}_l(P, K)\|_{\infty}. \quad (6)$$

Se for encontrada a solução para este problema de otimização, teremos um controlador internamente estabilizante tal que o máximo ganho de energia entre os sinais de entrada (distúrbios e referências) e o erro filtrado é minimizado. As especificações estão incluídas em W_b e as incertezas na planta em W , de modo que se espera robustez.

Para o caso de um problema de regulação, onde a referência é nula e o controlador deve somente levar o sistema ao equilíbrio, atendendo certas especificações, mesmo na presença de distúrbios, temos a planta estendida apresentada na Fig. 2. Como $v = -y = -w - Gu$, tem-se que a planta estendida é dada pela equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p w + W_p G u \\ W_u u \\ -w - G u \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} W_p & W_p G \\ 0 & W_u \\ \hline -I & -G \end{array} \right] \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

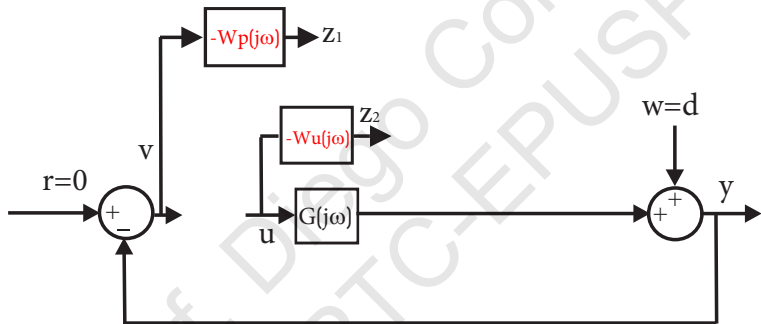


Figura: Planta estendida para problema de regulação

Deste modo, temos que:

$$\mathcal{F}_l(P, K) = \begin{bmatrix} W_p \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_p G \\ -W_u \end{bmatrix} K(I + GK)^{-1} = \begin{bmatrix} W_p(I - GKS) \\ W_u KS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u KS \end{bmatrix} \quad (7)$$

Deste modo, se minimizarmos a norma

$$\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty$$

ou como já fizemos, buscarmos uma solução sub-ótima) estaremos resolvendo o problema de sensibilidade mista S/KS .

Para o caso de um problema de rastreamento, onde o distúrbio é nulo, atendendo certas especificações, temos a planta estendida apresentada na Fig. 3. Como $v = r - y = r - Gu$, tem-se que a planta estendida é dada pela equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p r - W_p G u \\ W_u u \\ r - G u \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} W_p & -W_p G \\ 0 & W_u \\ \hline I & -G \end{array} \right] \begin{bmatrix} r \\ u \end{bmatrix}$$

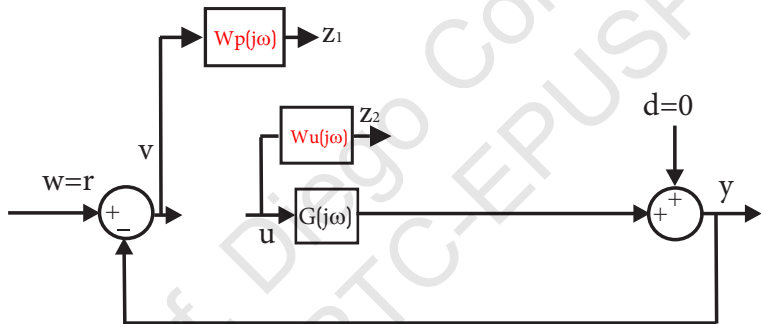


Figura: Planta estendida para problema de rastreamiento

Deste modo, temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_I(P, K) &= \begin{bmatrix} W_p \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -W_p G \\ W_u \end{bmatrix} K(I + GK)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} W_p(I - GKS) \\ W_u KS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u KS \end{bmatrix} \quad (8) \end{aligned}$$

o que mostra que a minimização a ser feita é igual tanto para o problema de regulação quanto para o problema de rastreamento.

Se acrescentarmos uma saída de desempenho $z_3 = W\bar{y}$, onde $\bar{y} = Gu$, teremos o diagrama de blocos apresentado na Fig. 4.

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p r - W_p G u \\ W_u u \\ W G u \\ r - G u \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} W_p & -W_p G \\ 0 & W_u \\ 0 & W G \\ \hline I & -G \end{array} \right] \begin{bmatrix} r \\ u \end{bmatrix}$$

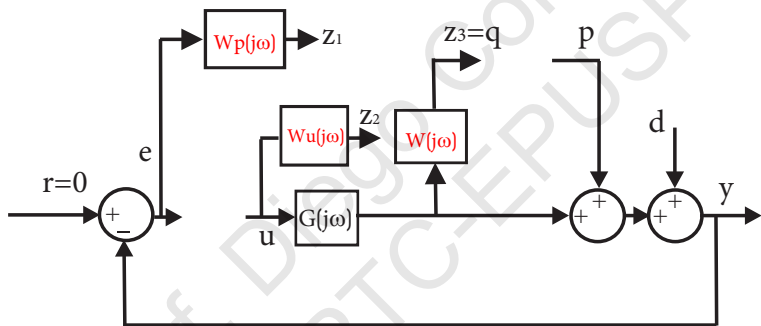


Figura: Planta estendida para problema de rastreamiento

Deste modo, temos que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_l(P, K) &= \begin{bmatrix} W_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -W_p G \\ W_u \\ WG \end{bmatrix} K(I + GK)^{-1} \\
 &= \begin{bmatrix} W_p(I - GKS) \\ W_u KS \\ WGKS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u KS \\ WT \end{bmatrix} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Já sabemos que o problema de otimização em Eq. (6) é em geral impossível de se resolver. O que se faz, entretanto, é buscar um controlador sub-ótimo. O que se faz então é buscar um controlador (ou melhor, uma família de controladores) estabilizante tal que a matriz de funções de transferência $T_{zw} = \mathcal{F}_l(P, K)$ seja tal que:

$$\|T_{zw}\|_{\infty} < 1$$

Os algoritmos que buscam soluções subótimas garantem entretanto somente que:

$$\|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma$$

ou seja, as especificações somente são atendidas se $\gamma < 1$.

Teorema

Se T_{zw} é tal que:

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u KS \\ WT \end{bmatrix}$$

então se $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, temos que:

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq \gamma \underline{\sigma}(W_p^{-1}(j\omega))$$

$$\bar{\sigma}(KS(j\omega)) \leq \gamma \underline{\sigma}(W_u^{-1}(j\omega))$$

$$\bar{\sigma}(T(j\omega)) \leq \gamma \underline{\sigma}(W^{-1}(j\omega))$$

Há algoritmos comerciais que buscam o sub-ótimo de forma iterativa, com algum critério de parada. Eventualmente, após várias iterações, γ pode ficar próximo de um, ou até menor (quem sabe até chegue próximo do ótimo), o que também satisfaz as especificações. Se o melhor valor de γ a que se chegar for muito acima de um, há algum problema com as especificações (não podem ser atendidas) ou com a planta em si (não-controlável/observável, por exemplo).

O algoritmo de Doyle, como apresentado em [?] busca encontrar um controlador na forma de realimentação de estados com observador, através da solução de duas *equações algébricas de Riccati* (ARE). Entretanto, há também a abordagem por *desigualdades matriciais lineares* (ou LMI) que é bastante popular [?].

Dado que se deseja projetar um controlador como na Fig. ?? e tal que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, inicialmente é necessário uma representação em espaço de estados como em (4). Esta forma padrão também pode ser usada para minimizar $\|T_{zw}\|_2$ que, esta sim, pode ser minimizada.

Para que estes problemas possam ser resolvidos pelos algoritmos clássicos, as seguintes restrições são impostas:

- 1 A tripla (A, B_2, C_2) deve ser estabilizável e detectável, de modo que haja controlador estabilizante;
- 2 D_{12} e D_{21} devem ter posto pleno para que haja controladores realizáveis;
- 3 As matrizes $\begin{bmatrix} A-j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} A-j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ devem ter posto pleno para todo ω , de modo a assegurar que o controlador resultante não cancel pólos com zeros no eixo imaginário;
- 4 $D_{11} = 0$ e $D_{22} = 0$, que é uma hipótese essencial para a síntese H_2 , já que isto garante que o sistema seja estritamente próprio;
- 5 Pode-se fazer $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ e $D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$ sem perda de generalidade.

Em geral, os problemas práticos satisfazem estas restrições.

Supondo que o vetor de sinais $\mathbf{w}(t)$ é um ruído branco, ou seja, tal que $E\{\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(t)^T\} = I\delta(t - \tau)$, então se calcularmos:

$$E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \mathbf{z}(t)^T \mathbf{z}(t) dt \right\} = \text{trace} (E\{\mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t)^T\}) = \|T_{zw}\|_2^2$$

onde a última igualdade vem do teorema de Parseval. Deste modo, minimizar a norma H_2 significa minimizar a potência da saída de desempenho. O algoritmo para solução pode ser encontrado com mais detalhes em [?].

Dado um sistema com distúrbios de processo w_d e de saída w_n que são ruídos brancos:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + w_d + B_2 u \\ y &= Cx + w_n \end{cases}$$

e tal que as matrizes de covariância são:

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w_d \\ w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_d^T & w_n^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \delta(t - \tau)$$

e o funcional que se deseja otimizar é:

$$J = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x^T Q x + u^T R u] dt \right\}$$

onde $Q = Q^T \geq 0$ e $R = R^T > 0$. Este problema é conhecido como LQG (Linear Quadratic Gaussian) e sua solução é bem conhecida, pois se trata de um problema linear quadrático. Para colocar este problema na forma de um problema de otimização H_2 , podemos definir:

$$z = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} & 0 \\ 0 & \sqrt{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} w_d \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{W} & 0 \\ 0 & \sqrt{V} \end{bmatrix} w$$

onde $E\{ww^T\} = I\delta(t - \tau)$. A planta estendida para este problema tem a seguinte representação em espaço de estados:

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} A & \sqrt{W} & 0 & B \\ \hline \sqrt{Q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{R} \\ C & 0 & \sqrt{V} & 0 \end{array} \right]$$

O controlador obtido desta forma tem a estrutura

$$K_{\text{LQG}}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A - BK_r - K_f C & K_f \\ \hline -K_r & 0 \end{array} \right]$$

onde:

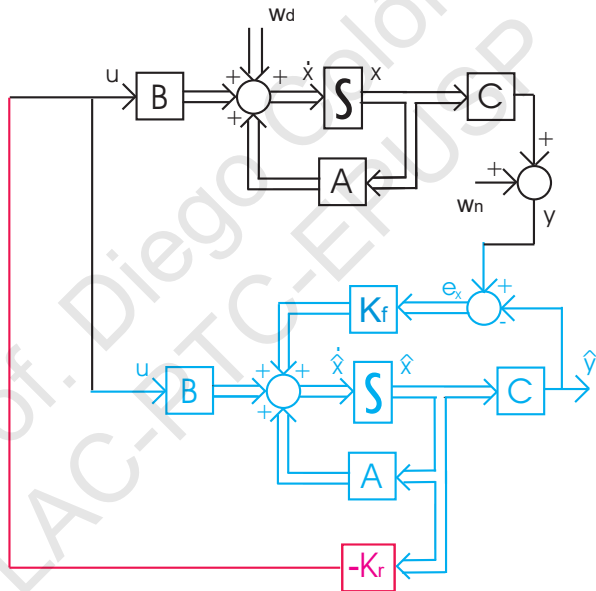
- $K_r = R^{-1}B^T X$ e $X = X^T \geq 0$ é a única solução semidefinida positiva da Equação Algébrica de Riccati:

$$A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + Q = 0$$

- $K_f = YC^T V^{-1}$ e $Y = Y^T \geq 0$ é a única solução semidefinida positiva da Equação Algébrica de Riccati:

$$YA^T + AY - YC^T V^{-1}CY + W = 0$$

Deste modo, a estrutura completa do sistema em malha fechada é apresentada na Fig. ???. Este controlador, entretanto, não é robusto.



No problema de síntese H_∞ o que se busca é um controlador $K(s)$ tal que:

$$\|T_{wz}\|_\infty = \|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty < \gamma$$

e isto se dá através de um algoritmo iterativo. Há um teorema que dá as condições necessárias para que exista um controlador tal que tal que $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$ tenha solução. Se γ_0 é o ínfimo do conjunto de valores de γ para os quais existe controlador admissível, é possível se aproximar de γ_0 por uma técnica de busca, podendo até ser possível resolver o problema de Controle Ótimo H_∞ .

De fato, temos que $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ se e só se:

- 1** Existe $X_\infty \geq 0$ que seja solução da EAR:

$$A^T X_\infty + X_\infty A + C_1^T C_1 + X_\infty (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty = 0$$

tal que $\Re \lambda_i [A + (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T)] < 0$ para qualquer i , e:

- 2** Existe $Y_\infty \geq 0$ que seja solução da EAR:

$$A^T Y_\infty + Y_\infty A + B_1^T B_1 + Y_\infty (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y_\infty = 0$$

tal que $\Re \lambda_i [A + (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2)] < 0$ para qualquer i , e

- 3** $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$

De fato, há uma família de controladores estabilizantes $K(s) = \mathcal{F}_l(K_C, Q)$ onde

$$K_C(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ \hline F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{array} \right]$$

e onde $F_\infty = -B_2^T X_\infty$, $L_\infty = -Y_\infty C_2^T$, $Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}$ e $A_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$ e $Q(s)$ é qualquer matriz de funções de transferência estável e própria tal que $\|Q\|_\infty < \gamma$. O dito *controlador central* é aquele membro da família para o qual $Q(s) \equiv 0$ e que tem a expressão:

$$K(s) = -F_\infty (sI - A_\infty)^{-1} Z_\infty L_\infty$$

Além disso:

- O controlador central possui o mesmo número de estados que a planta generalizada $P(s)$.
- O controlador central possui também uma estrutura de separação na forma de um *observador* de estados e uma realimentação dos estados estimados pelo observador da forma:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \underbrace{B_1\gamma^{-2}B_1^T X_\infty}_{\hat{w}_{\text{pior}}}\hat{x} + B_2u + Z_\infty L_\infty(C_2\hat{x} - y)$$

$$u = F\hat{x}$$