EACH

Escola de Artes, Ciências e Humanidades
da Universidade de São Paulo

Cálculo II:
Máximos e Mínimos Relativos e Otimização Condicionada

ACH 4553 Cálculo II - Marketing
Prof. Andrea Lucchesi

A2W

Agenda

1. Máximos e mínimos relativos – exemplo aplicado
2. Otimização Condicionada

Referência:

Cap 11:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

Agenda

1. Máximos e mínimos relativos – exemplo aplicado
2. Otimização condicionada

Referência:

Cap 11:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

1. Aplicação Máximos e Mínimos relativos

- **<u>Exercício 1</u>**: Um armazém vende duas marcas de vinho. Uma de procedência nacional, que é adquirida pelo dono do armazém por R$ 30 e outra marca de vinho que é importada e o dono do armazém compra por R$ 40. Supondo que o preço do vinho nacional = x e o preço do vinho importado = y, a quantidade vendida de vinho nacional será $Q_{nac} = 70 - 5x + 4y$ e a quantidade vendida do vinho importado será $Q_{imp} = 80 + 6x - 7y$. Quanto devem ser x e y para que o dono do armazém maximize o seu lucro?

Lucro Total = **Lucro vinho nacional** + **Lucro vinho importado**

Lucro Total = $RT_{nac} - CT_{nac}$ + $RT_{imp} - CT_{imp}$

Lucro Total (x,y) = $(Q_{nac}.\ P_{nac}) - (Q_{nac}.\ 30)$ + $(Q_{imp}.\ P_{imp})$ - $(Q_{imp}.\ 40)$

Lucro Total (x,y) = $Q_{nac}\ (P_{nac} - 30)$ + $Q_{imp}\ (P_{imp} - 40)$

Lucro Total (x,y) = $(70 - 5x + 4y)$ (x-30) + $(80 + 6x - 7y)$. (y-40)

1. Aplicação Máximos e Mínimos relativos

- **<u>Exercício 1</u>**: Um armazém vende duas marcas de vinho. Uma de procedência nacional, que é adquirida pelo dono do armazém por R$ 30 e outra marca de vinho que é importada e o dono do armazém compra por R$ 40. Supondo que o preço do vinho nacional = x e o preço do vinho importado = y, a quantidade vendida de vinho nacional será $\boldsymbol{Q_{nac}} = 70 - 5\mathrm{x} + 4\mathrm{y}$ e a quantidade vendida do vinho importado será $\boldsymbol{Q_{imp}} = 80 + 6\mathrm{x} - 7\mathrm{y}$. Quanto devem ser x e y para que o dono do armazém maximize o seu lucro?

Lucro Total (x,y) = $\boldsymbol{(70 - 5x + 4y)}$ **(x-30)** + $\boldsymbol{(80 + 6x - 7y)}$**. (y-40)**

Lucro Total (x,y) = $70x - 5x^2 + 4xy$ – 2100 + 150x -120y + $80y + 6y - 7y^2$ – 3200 – 240x + 280y

Lucro Total (x,y) = $\boldsymbol{-20x - 5x^2 + 10xy}$ **– 5300 + 240y** $\boldsymbol{-7y^2}$ $\Rightarrow$ *essa é a função a ser maximizada*

1. Aplicação Máximos e Mínimos relativos

- **<u>Exercício 1</u>**:

Lucro Total (x,y) = $-20x - 5x^2 + 10xy$ – 5300 + 240y $-7y^2 \Rightarrow$ *essa é a funçao a ser maximizada*

1) Calcular as derivadas parciais e igualar a zero (Condiçao de 1ª ordem, CPO):

$$f_x = -20 - 10x + 10y$$

$$f_y = 10x + 240 - 14y$$

$\Rightarrow$ Resolver o sistema para achar o(s) ponto(s) crítico(s):

$$\begin{cases} -20 - 10x + 10y = 0 \\ 10x + 240 - 14y = 0 \end{cases}$$

Utilizando o método da adição: cancela o termo 10x nas duas equações:

= 220 – 4y = 0

4y = 220

y = 55

Substituindo y = 55 na 1ª equação do sistema:
-20 – 10 x + 10 (55) = 0
-10x = -530
x = 53

1. Aplicação Máximos e Mínimos relativos

- **<u>Exercício 1</u>**:

=> Portanto tem-se o **ponto crítico (53, 55)**

2) Verificar se o ponto crítico é ponto de máximo, mínimo, sela ou nenhum dos anteriores:

- Para tanto, calcular as derivadas de 2ª ordem e o determinante da matriz hessiana (condição de 2ª ordem ou CSO):

$$f_{xx} = -10$$

$$f_{xy} = 10$$

$$f_{yy} = -14$$

$$f_{yx} = 10$$

A matriz hessiana será:

H(a,b) = $\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$ => H(53, 55) = $\begin{vmatrix} f_{xx}(53,55) & f_{xy}(53,55) \\ f_{yx}(53,55) & f_{yy}(53,55) \end{vmatrix}$ =>

H(53,55) = $\begin{vmatrix} \mathbf{-10} & \mathbf{10} \\ \mathbf{10} & \mathbf{-14} \end{vmatrix}$ => **D(53,55) = (-10).(-14) – (10.10) = 140 – 100 = 40**

1. Aplicação Máximos e Mínimos relativos

- **<u>Exercício 1</u>**:

$\Rightarrow$ Portanto tem-se o **ponto crítico (53, 55)**

3) Analisar o sinal do determinante D(53,55) e de f_{xx} relativo ao ponto crítico:

- Ponto crítico (53,55):

D(53,55) > 0 e $f_{xx}(53,55) < 0$ =>

Portanto, (53,55) é **<u>ponto de máximo relativo</u>**

=> Ou seja, para que o dono do armazém maximize o seu lucro, ele deve cobrar 53 reais pelo vinho nacional e 55 reais pelo vinho importado.

Agenda

1. Máximos e mínimos relativos – exercício aplicado
2. Otimização condicionada

Referência:

Cap 11:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

2. Máximos e Mínimos Condicionados

- Em muitos problemas práticos, a função de duas variáveis a ser otimizada está sujeita a restrições nas variáveis.

- Nessas situações, para encontrar o máximo ou mínimo de uma função de duas variáveis utiliza-se o método dos Multiplicadores de Lagrange (λ).

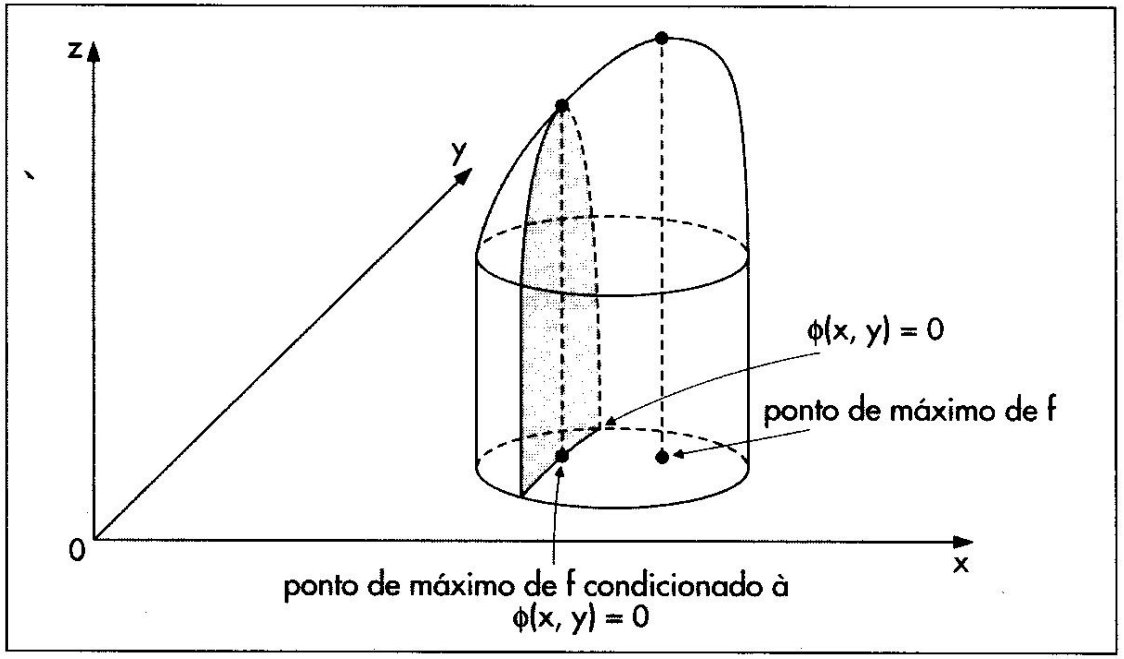
- Seja f(x,y) a função a ser otimizada e condicionada à restrição g(x,y):

Max f(x,y)

s.a. g(x,y)

Obs: s.a. = sujeito à

Figura 11.23: Máximo condicionado.



Na Figura acima: ϕ(x,y) = curva da função de restrição.

- O ponto de máximo (ou mínimo) condicionado não necessariamente coincide com o ponto de máximo (ou mínimo) da função f(x,y) (ou não condicionado).

2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

Ex: otimização da função produção condicionada à sua função custo (ou orçamento da empresa)

- Seja f(x,y) a função a ser otimizada e condicionada à restrição g(x,y):

  Max f(x,y)

  s.a. g(x,y)

- Para resolver o problema de otimização condicionada, deve-se construir o *lagrangeano* ($\mathcal{L}$) da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = f(x,y) - \lambda . g(x,y)$$

$\Rightarrow$ Essa será a função a ser maximizada (ou minimizada).

2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

- A partir do *lagrangeano* ($\mathcal{L}$) , calcular as seguintes derivadas parciais:

$\mathcal{L}$ = f(x,y) - λ.g(x,y)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = f_x - \lambda g_x \qquad \textbf{(1)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f_y - \lambda g_y \qquad \textbf{(2)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\mathrm{g}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \qquad \textbf{(3)}$$

2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

- **<u>Exemplo 1</u>**: Calcule os valores de máximo e mínimo da função f(x,y) = xy, sujeito à função restrição g(x,y):

$x^2 + y^2 = 8$.

Max f(x,y) ou seja, **Max xy**

s.a. g(x,y) **s.a. $x^2 + y^2 = 8$**

- Nesse caso precisamos reescrever a função restrição g(x,y) da seguinte forma:

Max xy

s.a. $x^2 + y^2 - 8 = 0$

1) Construir o lagrangeano ($\mathcal{L} = f(x,y) - \lambda.g(x,y)$):

$$\mathcal{L} = xy - \lambda.(x^2 + y^2 - 8)$$

2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

- **Exemplo 1**:

1) Construir o lagrangeano ($\mathcal{L}$ = f(x,y) - λ.g(x,y)):

$$\mathcal{L} = xy - \lambda.(x^2 + y^2 - 8) = xy - \lambda x^2 - \lambda y^2 + \lambda 8$$

2) A partir do *lagrangeano* ($\mathcal{L}$) , calcular as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = f_x - \lambda g_x = y - 2\lambda x \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f_y - \lambda g_y = x - 2\lambda y \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -g_x = -(x^2 + y^2 - 8) = -x^2 - y^2 + 8 \qquad (3)$$

2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

- **Exemplo 1**:

3) Igualar as derivadas parciais (1, 2 e 3) a zero e resolver o sistema de 3 equações e 3 incógnitas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = f_x - \lambda g_x = y - 2\lambda x = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f_y - \lambda g_y = x - 2\lambda y = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -g_x = -(x^2 + y^2 - 8) = -x^2 - y^2 + 8 = 0 \qquad (3)$$

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 & (1) \\ x - 2\lambda y = 0 & (2) \\ -x^2 - y^2 + 8 = 0 & (3) \end{cases}$$

2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

- **Exemplo 1**:

$\Rightarrow$ Para resolver o sistema de 3 equações e 3 incógnitas:

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 & (1) \\ x - 2\lambda y = 0 & (2) \\ -x^2 - y^2 + 8 = 0 & (3) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ a) Isolar o termo com λ do lado direito na equação (1): $y = 2\lambda x$

$\Rightarrow$ b) Isolar o termo com λ do lado direito na equação (2): $x = 2\lambda y$

$\Rightarrow$ c) Dividir $\frac{(a)}{(b)}$ $\Rightarrow$ $\frac{y}{x} = \frac{2\lambda x}{2\lambda y}$ $\Rightarrow$ $\frac{y}{x} = \frac{x}{y}$ $\Rightarrow$ $y^2 = x^2$

$\Rightarrow$ d) Substituindo (c) em (3) $\Rightarrow$ $-x^2 - x^2 + 8 = 0$ $\Rightarrow$ $-2x^2 = -8$ $\Rightarrow$ $x^2 = 4$ $\Rightarrow$ $x = \mathbf{+2}$ ou $x = \mathbf{-2}$

$\Rightarrow$ e) Substituindo em (c) para encontrar y $\Rightarrow$ se $x = 2$ $\Rightarrow$ $y^2 = (2)^2 = \mathbf{4}$ $y=+2$ ou $y=-2$;

se $x = -2$ $\Rightarrow$ $y^2 = (-2)^2 = \mathbf{4}$ => $y=2$ ou $y=-2$

2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

- **<u>Exemplo 1</u>**:

$\Rightarrow$ Dessa forma, teremos quatro pontos nos quais os extremos com restrição podem ocorrer:

(2, 2) ; (2, -2) ; (-2, 2) ; (-2, -2)

Obter o valor de z para cada um dos pontos e, dessa forma, classificar os pontos em máximo ou mínimo relativos:

Se (2, 2) => f(x,y) = xy = 2.2 = 4

Se (2, -2) => f(x,y) = xy = 2.(-2) = -4

Se (-2, 2) => f(x,y) = xy = (-2).2 = -4

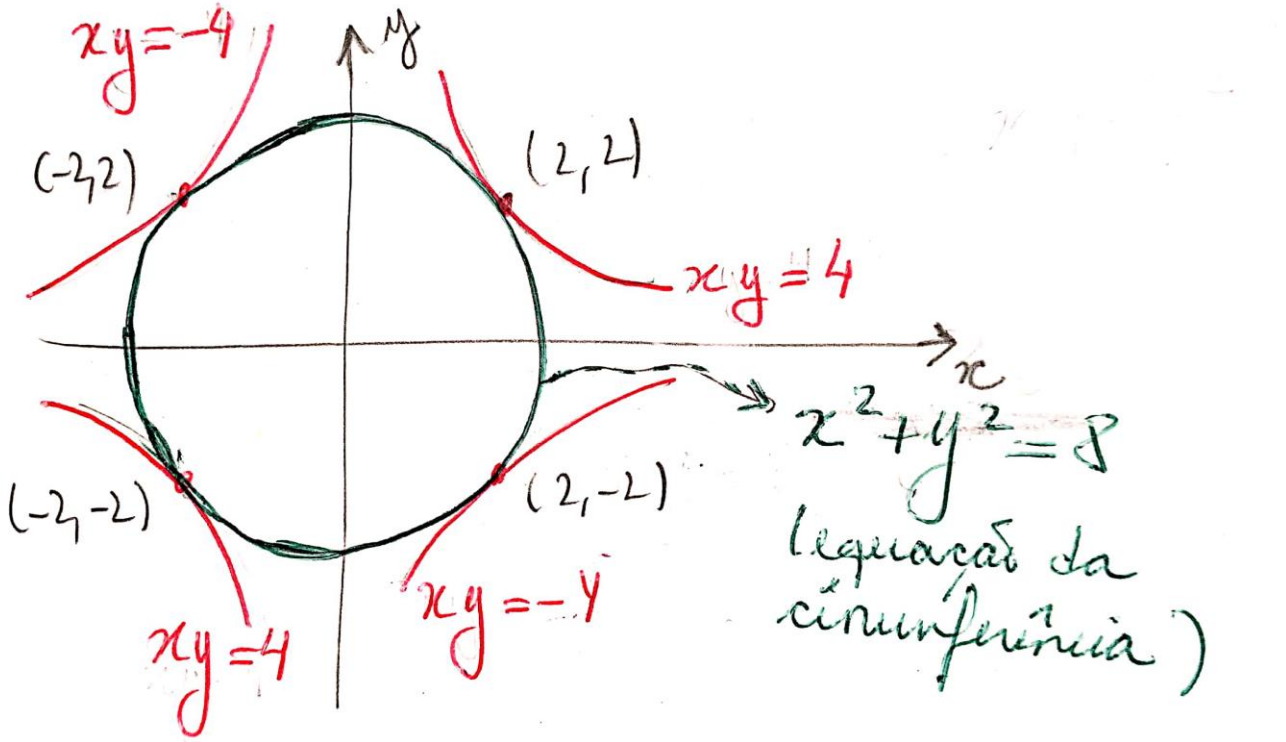
Se (-2, -2) => f(x,y) = xy = (-2).(-2) = 4

$\Rightarrow$ **Portanto, (2, 2) e (-2, -2) são pontos de máximo e (2, -2) e (-2, 2) são pontos de mínimo.**

OBS: em otimização condicionada não é necessário checar se os valores são de fato máximos ou mínimos.

2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

- **<u>Exemplo 1</u>**:



curva de restrições e curvas de nível ótimas

⇒ **Portanto, (2, 2) e (-2, -2) são pontos de máximo e (2, -2) e (-2, 2) são pontos de mínimo.**

2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

- **Exemplo 2**: Um editor dispõe de R$ 60 milhões para gastar na produção e divulgação de um novo livro. Avalia-se que, caso gaste R$ x milhões na produção e R$ y milhões na divulgação, a quantidade vendida será de, aproximadamente, $20x^{3/2}y$ exemplares de livros. Quanto o editor deve gastar com a produção e a divulgação a fim de maximizar as vendas?

$$\textbf{Max} \quad 20x^{3/2}y$$

$$\textbf{s.a.} \quad x + y = 60$$

- Nesse caso precisamos reescrever a função restrição g(x,y) da seguinte forma:

$$\textbf{Max} \quad 20x^{3/2}y$$

$$\textbf{s.a.} \quad x + y - 60 = 0$$

1) Construir o lagrangeano ($\mathcal{L} = f(x,y) - \lambda.g(x,y)$):

$$\mathcal{L} = 20x^{3/2}y - \lambda.(x + y - 60)$$

2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

- **Exemplo 2**:

1) Construir o lagrangeano ($\mathcal{L}$ = f(x,y) - λ.g(x,y)):

$$\mathcal{L} = 20x^{3/2}y - \lambda.(x + y - 60) = 20x^{3/2}y - \lambda x - \lambda y + \lambda 60$$

2) A partir do *lagrangeano* ($\mathcal{L}$) , calcular as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = f_x - \lambda g_x = (3/2) \,.\, 20\, x^{1/2}y - \lambda = 30x^{1/2}y - \lambda \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f_y - \lambda g_y = 20x^{3/2} - \lambda \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -g_x = -(x + y - 60) = -x - y + 60 \qquad (3)$$

2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

- **Exemplo 2**:

3) Igualar as derivadas parciais (1, 2 e 3) a zero e resolver o sistema de 3 equações e 3 incógnitas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = f_x - \lambda g_x = 30x^{1/2}y - \lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f_y - \lambda g_y = 20x^{3/2} - \lambda = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -g_x = -x - y + 60 = 0 \qquad (3)$$

$$\begin{cases} 30x^{1/2}y - \lambda = 0 & (1) \\ 20x^{3/2} - \lambda = 0 & (2) \\ -x - y + 60 = 0 & (3) \end{cases}$$

2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

- **Exemplo 2**:

$\Rightarrow$ Para resolver o sistema de 3 equações e 3 incógnitas:

$$\begin{cases} 30x^{1/2}y - \lambda = 0 & (1) \\ 20x^{3/2} - \lambda = 0 & (2) \\ -x - y + 60 = 0 & (3) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ a) Isolar o termo com λ do lado direito na equação (1): $30x^{1/2}y = \lambda$

$\Rightarrow$ b) Isolar o termo com λ do lado direito na equação (2): $20x^{3/2} = \lambda$

$\Rightarrow$ c) Dividir $\frac{(a)}{(b)}$ $\Rightarrow$ $\frac{30x^{1/2}y}{20x^{3/2}} = \frac{\lambda}{\lambda}$ $\Rightarrow$ $\frac{30y}{20x^{3/2}x^{-1/2}} = 1 \Rightarrow \frac{30y}{20x} = 1 \Rightarrow$ $\mathbf{y = \frac{2x}{3}}$

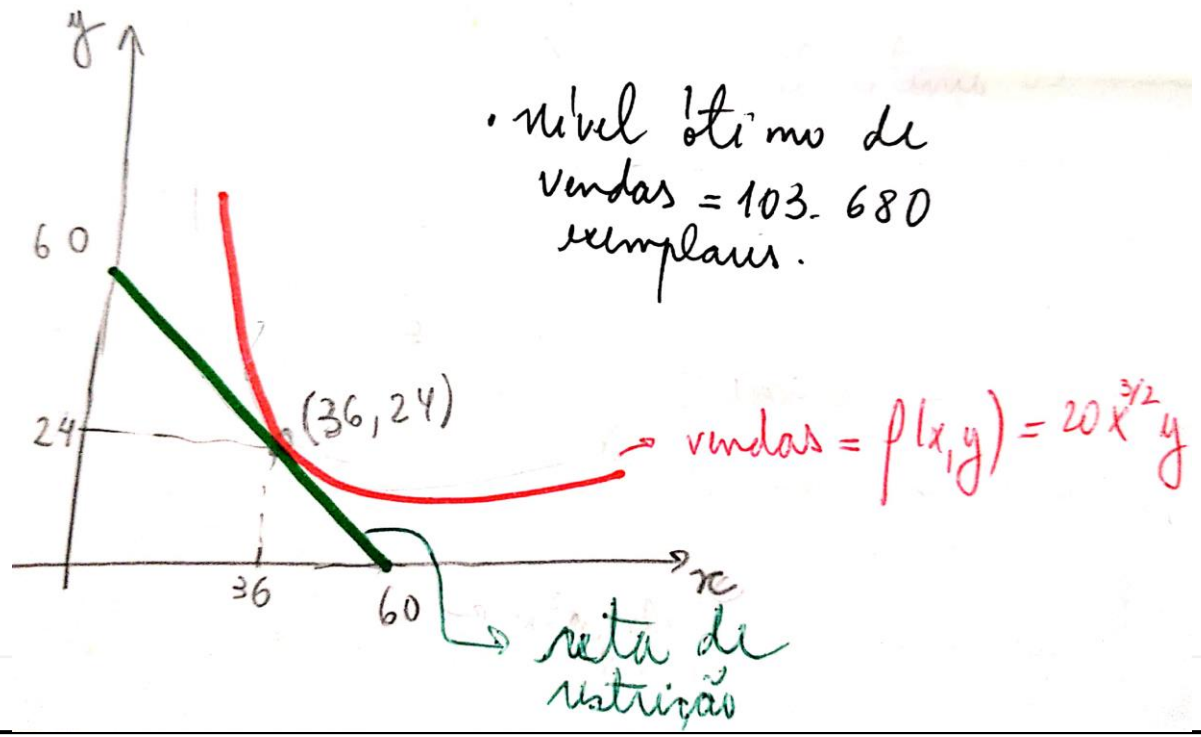
$\Rightarrow$ d) Substituindo (c) em (3) $\Rightarrow -x - y + 60 = 0 \Rightarrow -x - \frac{2x}{3} = -60 \Rightarrow -5x = -180 \Rightarrow$ $\mathbf{x = 36}$

$\Rightarrow$ e) Substituindo em (c) para encontrar y $\Rightarrow -36 - y + 60 = 0 \Rightarrow$ $\mathbf{y = 24}$

2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

- **<u>Exemplo 2</u>**:

⇒ Ou seja, para maximizar as vendas, o editor deve gastar R$ 36 milhões na produção e R$ 24 milhões em divulgação. Assim, serão vendidos f(36, 24) = 103.680 exemplares do livro.



2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

- **Exemplo 3**: O Departamento de estradas de rodagem deseja construir uma área de recreação retangular ao longo de uma estrada. A área retangular terá 5000 m^2 e será cercada nos 3 lados não adjacentes à estrada. Qual é o mínimo de cerca necessário para completar a tarefa?

$$\text{Min} \quad x + 2y$$

$$\text{s.a.} \quad xy = 5000$$

- Nesse caso precisamos reescrever a função restrição g(x,y) da seguinte forma:

$$\text{Min} \quad x + 2y$$

$$\text{s.a.} \quad x\,y - 5000 = 0$$

1) Construir o lagrangeano ($\mathcal{L}$ = f(x,y) - λ.g(x,y)):

$$\mathcal{L} = x + 2y - \lambda.(xy - 5000)$$

2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

- **Exemplo 3**:

1) Construir o lagrangeano ($\mathcal{L}$ = f(x,y) - λ.g(x,y)):

$$\mathcal{L} = x + 2y - \lambda.(xy - 5000) = x + 2y - \lambda xy + \lambda 5000$$

2) A partir do *lagrangeano* ($\mathcal{L}$) , calcular as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = f_x - \lambda g_x = 1 - \lambda y \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f_y - \lambda g_y = 2 - \lambda x \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -g_x = -(xy - 5000) = -xy + 5000 \qquad (3)$$

2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

- **Exemplo 3**:

3) Igualar as derivadas parciais (1, 2 e 3) a zero e resolver o sistema de 3 equações e 3 incógnitas:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = f_x - \lambda g_x = 1 - \lambda y = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f_y - \lambda g_y = 2 - \lambda x = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -g_x = -xy + 5000 = 0 \qquad (3)$$

$$\begin{cases} 1 - \lambda y = 0 & (1) \\ 2 - \lambda x = 0 & (2) \\ -xy + 5000 = 0 & (3) \end{cases}$$

2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

- **Exemplo 3**:

⇒ Para resolver o sistema de 3 equações e 3 incógnitas:

$$\begin{cases} 1 - \lambda y = 0 & (1) \\ 2 - \lambda x = 0 & (2) \\ -xy + 5000 = 0 & (3) \end{cases}$$

⇒ a) Isolar o termo com λ do lado direito na equação (1): $1 = \lambda y$ => $(1/y) = \lambda$

⇒ b) Isolar o termo com λ do lado direito na equação (2): $2 = \lambda x$ => $(2/x) = \lambda$

⇒ c) Dividir $\frac{(a)}{(b)}$ ⇒ $\frac{(\frac{1}{y})}{(\frac{2}{x})} = \frac{\lambda}{\lambda}$ ⇒ $\frac{(\frac{1}{y})}{(\frac{2}{x})} = 1$ ⇒ $\frac{1}{y} = \frac{2}{x}$ ⇒ **x = 2y**

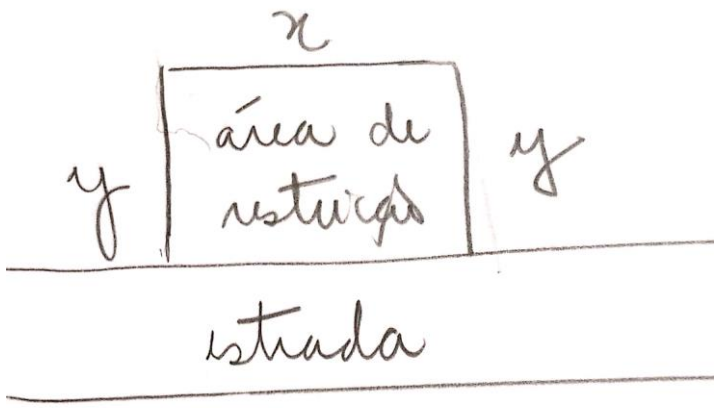
⇒ d) Substituindo (c) em (3) ⇒ $-xy + 5000 = 0$ ⇒ $-2y(y) = -5000$ ⇒ $-2y^2 = -5000$ ⇒ **y = 50 (y=−50 nao é válido)**

⇒ e) Substituindo em (c) para encontrar y ⇒ $x = 2y$ ⇒ **x = 100**

2. Máximos e Mínimos Condicionados *(continuação)*

- **<u>Exemplo 3</u>**:

⇒ Ou seja, x = 100 e y = 50 são os valores que minimizam a função f(x,y) = x + 2y, sujeito à restrição g(x,y) = xy – 5000. O retângulo ótimo tem 100m de comprimento e 50m de largura e requer 100 + 50 + 50 = 200 m de cerca.



⇒ Por ex, se x=110 e y=45,4 a área do retângulo também será aproximadamente = 5000, porém serão gastos 311m de cerca.