Capítulo 8

Controle H_∞ Multivariável: Sensibilidade Mista

Neste capítulo, formula-se o problema geral de sensibilidade mista H_∞ através do conceito de transformação liner fracionária (LFT) e o conceito de planta estendida MIMO. O problema de sensibilidade mista S/KS é então formulado e o algoritmo de síntese do controlador é apresentado. Finalmente as incertezas são incluidas no esquema e o problema $S/T/KS$ e apresentado.

8.1 Problema Geral: Planta Estendida

Antes de entrarmos nos diversos tipos de situações que vamos querer resolver com a técnica de Controle H_∞, devemos introduzir o chamado *problema padrão*, que é a forma que os algoritmos de projeto (em particular, o Robust Control Toolbox do MATLAB) requerem que o problema esteja de forma o poder operar. Esta forma padrão é apresentada na Fig. 8.2, que é composta por três matrizes de funções de transferência:

- $P(s)$: é a chamada planta estendida, que deve conter a planta combinada com matrizes de funções peso, cujo papel será esclarecido mais adiante;
- $K(s)$: o controlador, que é o objeto de estudo e projeto, que deve ter parâmetros invarintes no tempo
- $\Delta(s)$: a matrizes de funções de transferência de incertezas, conhecida como matriz das perturbações, e tal que $\|\Delta\|_\infty \leq 1$.

Os sinais apresentados neste diagrama de blocos são denominados:

- **w**: vetor dos sinais externos, que contem, dentre outros, sinais de referência, distúrbio e ruído;
- **z**: vetor os sinais conhecidos como *saídas de desempenho*, que não necessariamente contem as saídas tradicionais (medidas por sensores), mas podem contem qualquer sinal que se use para fins de projeto e análise de desempenho, como erros, sinais de controle, ou até mesmo versões filtradas destes;
- **v**: vetor de entrada do controlador, que normalmente é o vetor de erros;
- **u**: vetor de sinais de controle, que são fornecidos pelo controlador à planta de modo a efetuar o controle em tempo real;

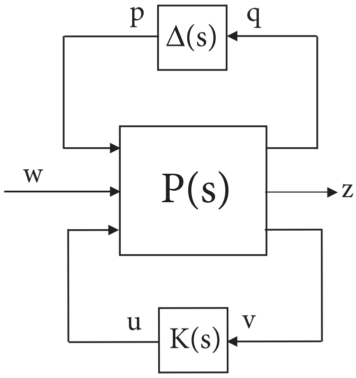

Figura 8.1: Diagrama de Blocos Geral para Controle Robusto

- **q**: é o vetor de sinais *virtuais* que são usados pela matriz de perturbações para criar as incertezas;
- **p**: é o vetor de sinais *virtuais* através dos quais a matriz de perturbações causa incertezas na planta.

É importante esclarecer que estes dois últimos sinais não existem fisicamente, mas somente durante o período de projeto do sistema, para efeito de representar as incertezas do sistema.

8.2 Projeto para Planta sem Incertezas

O bloco $\Delta(s)$ nunca entra na fase de projeto do controlador $K(s)$. Deste modo, a matriz de funções de transferência da planta estendida pode ser particionada em:

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

e uma representação em espaço de estados tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} &=& Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &=& C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ v &=& C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{cases}$$

que ainda pode ser representada em um forma mais compacta, que é:

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \tag{8.1}$$

de modo que a matriz de funções de transferência em malha fechada que relaciona $\mathbf{w}$ e $\mathbf{z}$ é dada pela fórmula:

$$\mathbf{z} = \underbrace{[P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}]}_{\mathcal{F}_l(P,K)} \mathbf{w}, \tag{8.2}$$

onde $\mathcal{F}_l$ é conhecida como *transformação linear fracionária inferior* das matrizes P e K. Em seguida, busca-se encontrar o controlador $K(s)$ que estabiliza internamente o sistema em malha fechada com a planta estendida $P(s)$ e tal que satisfaz o problema de otimização:

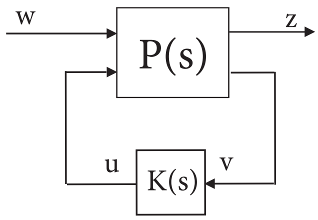

Figura 8.2: Diagrama de Blocos para Projeto de Controle Robusto

$$\min_{K(s)\ \text{inter. estab.}} \|\mathcal{F}_l(P,K)\|_\infty. \tag{8.3}$$

Se for encontrada a solução para este problema de otimização, teremos um controlador internamente estabilizante tal que o máximo ganho de energia entre os sinais de entrada (disturbios e referências) e o erro filtrado é minimizado. As especificações estão incluídas em W_b e as incertezas na planta em W, de modo que se espera robustez.

8.2.1 Problema de Regulação

Para o caso de um problema de regulação, onde a referência é nula e o controlador deve somente levar o sistema ao equilíbrio, atendendo certas especificações, mesmo na presença de distúrbios, temos a planta estendida apresentada na Fig. 8.3. Como $v = -y = -w - Gu$, tem-se que a planta estendida é dada pela equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \hline v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p w + W_p G u \\ W_u u \\ -w - Gu \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} W_p & W_p G \\ 0 & W_u \\ \hline -I & -G \end{array}\right] \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

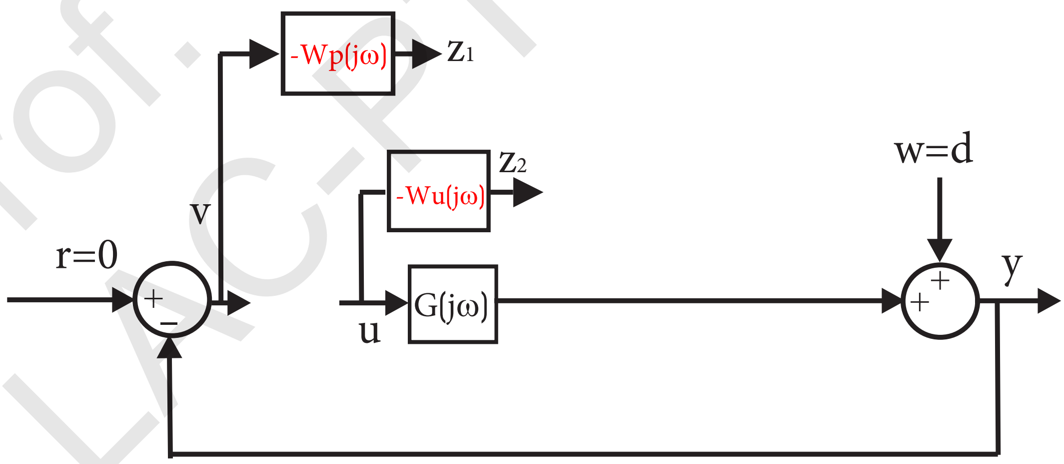

Figura 8.3: Planta estendida para problema de regulação

Deste modo, temos que:

$$\mathcal{F}_l(P,K) = \begin{bmatrix} W_p \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_p G \\ -W_u \end{bmatrix} K(I+GK)^{-1} = \begin{bmatrix} W_p(I - GKS) \\ W_u KS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u KS \end{bmatrix}$$

(8.4)

Deste modo, se minimizarmos a norma $\|\mathcal{F}_l(P,K)\|_\infty$ (ou como já fizemos, buscarmos uma solução sub-ótima) estaremos resolvendo o problema de sensibilidade mista S/KS.

8.2.2 Problema de Rastreamento

Para o caso de um problema de rastreamento, onde o distúrbio é nulo, atendendo certas especificações, temos a planta estendida apresentada na Fig. 8.4. Como $v = r - y = r - Gu$, tem-se que a planta estendida é dada pela equação abaixo:

$$\left[\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ \hline v \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} W_p r - W_p G u \\ W_u u \\ r - Gu \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} W_p & -W_p G \\ 0 & W_u \\ \hline I & -G \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} r \\ u \end{array}\right]$$

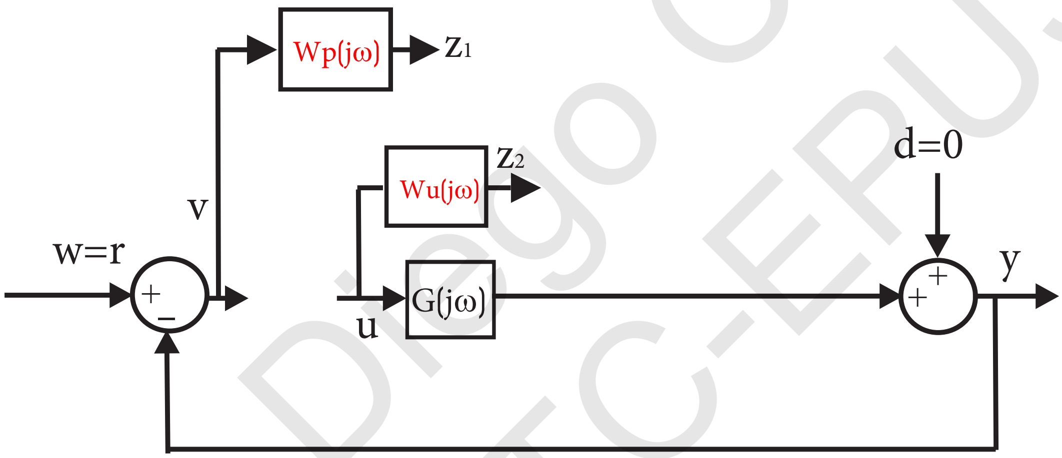

Figura 8.4: Planta estendida para problema de rastreamento

Deste modo, temos que:

$$\mathcal{F}_l(P,K) = \left[\begin{array}{c} W_p \\ 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} -W_p G \\ W_u \end{array}\right] K(I+GK)^{-1} = \left[\begin{array}{c} W_p(I-GKS) \\ W_u KS \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} W_p S \\ W_u KS \end{array}\right] \tag{8.5}$$

o que mostra que a minimização a ser feita é igual tanto para o problema de regulação quanto para o problema de rastreamento.

8.3 Problema $S/T/KS$ MIMO

Se acrecentarmos uma saída de desempenho $z_3 = W\bar{y}$, onde $\bar{y} = Gu$, teremos o diagrama de blocos apresentaaado na Fig. 8.5.

$$\left[\begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \hline v \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} W_p r - W_p G u \\ W_u u \\ WGu \\ r - Gu \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} W_p & -W_p G \\ 0 & W_u \\ 0 & WG \\ \hline I & -G \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} r \\ u \end{array}\right]$$

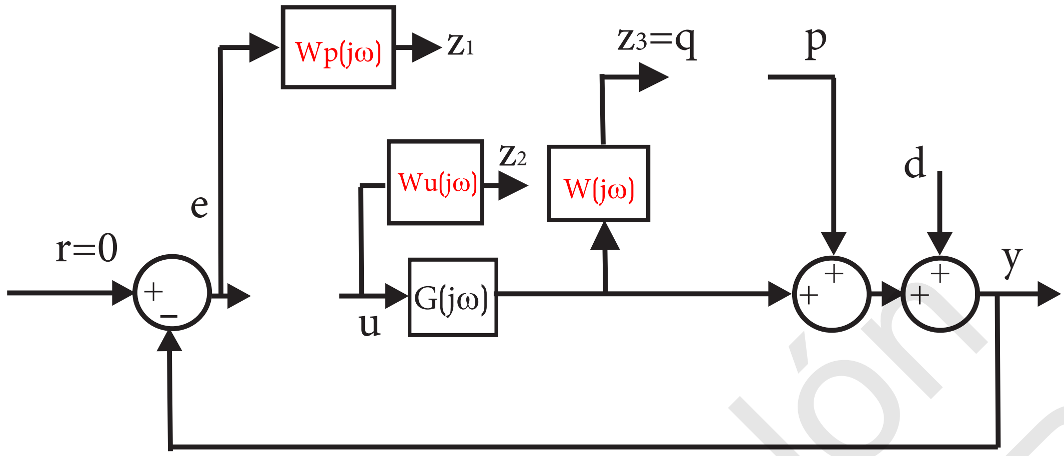

Figura 8.5: Planta estendida para problema de rastreamento

Deste modo, temos que:

$$\mathcal{F}_l(P,K) = \begin{bmatrix} W_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -W_pG \\ W_u \\ WG \end{bmatrix} K(I+GK)^{-1} = \begin{bmatrix} W_p(I-GKS) \\ W_uKS \\ WGKS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_pS \\ W_uKS \\ WT \end{bmatrix} \tag{8.6}$$

Já sabemos que o problema de otimização em Eq. (8.3) é em geral impossível de se resolver. O que se faz, entretanto, é buscar um controlador sub-ótimo. O que se faz então é buscar um controlador (ou melhor, uma família de controladores) estabilizante tal que a matriz de funções de transferência $T_{zw} = \mathcal{F}_l(P,K)$ seja tal que:

$$\|T_{zw}\|_\infty < 1$$

Os algoritos que buscam soluções subótimas garantem entretanto somente que:

$$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$$

ou seja, as especificações somente são atendidas se $\gamma < 1$.

Teorema 8.3.1. *Se T_{zw} é tal que:*

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} W_pS \\ W_uKS \\ WT \end{bmatrix}$$

então se $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, temos que:

$$\begin{array}{lcl} \bar{\sigma}(S(j\omega)) & \leq & \gamma\underline{\sigma}(W_p^{-1}(j\omega)) \\ \bar{\sigma}(KS(j\omega)) & \leq & \gamma\underline{\sigma}(W_u^{-1}(j\omega)) \\ \bar{\sigma}(T(j\omega)) & \leq & \gamma\underline{\sigma}(W^{-1}(j\omega)) \end{array}$$

Há algoritmos comerciais que buscam o sub-ótimo de forma iterativa, com algum critério de parada. Eventualmente, após várias iterações, γ pode ficar próximo de um, ou até menor (quem sabe até chegue próximo do ótimo), o que também satisfaz as especificações. Se o melhor valor de γ a que se chegar for muito acima de um, há algum problema com as especificações (não podem ser atendidas) ou com a planta em si (não-controlável/observável, por exemplo). O algoritmo de Doyle, como apresentado em [ZD98] busca encontrar um controlador na forma de realimentação de estados com observador, através da solução de duas *equações algébricas de Riccati* (ARE). Entretanto, há também a abordagem por *desigualdades matriciais lineares* (ou LMI) que é bastante popular [DP13].

8.4 Síntese de Controladores H_2 e H_∞

Dado que se deseja projetar um controlador como na Fig. 8.2 e tal que $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, inicialmente é necessário uma representação em espaço de estados como em (8.1). Esta forma padrão também pode ser usada para minimizar $\|T_{zw}\|_2$ que, esta sim, pode ser minimizada.

Para que estes problemas possam ser resolvidos pelos algoritmos clássicos, as seguintes restrições são impostas:

1. A tripla (A, B_2, C_2) deve ser estabilizável e detectável, de modo que haja controlador estabilizante;

2. D_{12} e D_{21} devem ter posto pleno para que haja controladores realizáveis;

3. As matrizes $\left[\begin{smallmatrix} A-j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{smallmatrix}\right]$ e $\left[\begin{smallmatrix} A-j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{smallmatrix}\right]$ devem ter posto pleno para todo ω, de modo a assegurar que o controlador resultante não cancel pólos com zeros no eixo imaginário;

4. $D_{11} = 0$ e $D_{22} = 0$, que é uma hipótese essencial para a síntese H_2, já que isto garante que o sistema seja estritamente próprio;

5. Pode-se fazer $D_{12} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ I \end{smallmatrix}\right]$ e $D_{21} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & I \end{smallmatrix}\right]$ sem perda de generalidade.

Em geral, os problemas práticos satisfazem estas restrições.

8.4.1 Síntese H_2

Supondo que o vetor de sinais $\mathbf{w}(t)$ é um ruído branco, ou seja, tal que $E\{\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(t)^T\} = I\delta(t-\tau$, então se calcularmos:

$$E\left\{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathbf{z}(t)^T \mathbf{z}(t)\,\mathrm{d}t\right\} = \operatorname{trace}\left(E\{\mathbf{z}(t)\mathbf{z}(t)^T\}\right) = \|T_{zw}\|_2^2$$

onde a última igualdade vem do teorema de Parseval. Deste modo, minimizar a norma H_2 significa minimizar a potência da saída de desempenho. O algoritmo para solução pode ser encontrado com mais detalhes em [ZDG95].

Exemplo: Dado um sistema com distúrbios de processo w_d e de saída w_n que são ruídos brancos:

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + w_d + B_2 u \\ y &= Cx + w_n \end{cases}$$

e tal que as matrizes de covariância são:

$$E\left\{\begin{bmatrix} w_d \\ w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_d^T & w_n^T \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \delta(t-\tau)$$

e o funcional que se deseja otimizar é:

$$J = E\left\{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [x^T Q x + u^T R u]\,\mathrm{d}t\right\}$$

onde $Q = Q^T \geq 0$ e $R = R^T > 0$. Este problema é conhecido como LQG (Linear Quadratic Gaussian) e sua solução é bem conhecida, pois se trata de um problema linear quadrático.

Para colocar este problema na forma de um problema de otimização H_2, podemos definir:

$$z = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} & 0 \\ 0 & \sqrt{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} w_d \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{W} & 0 \\ 0 & \sqrt{V} \end{bmatrix} w$$

onde $E\{ww^T\} = I\delta(t-\tau)$. A planta estendida para este problema tem a seguinte representação em espaço de estados:

$$P(s) = \left[\begin{array}{c|ccc} A & \sqrt{W} & 0 & B \\ \hline \sqrt{Q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{R} \\ C & 0 & \sqrt{V} & 0 \end{array}\right]$$

O controlador obtido desta forma tem a estrutura

$$K_{\mathrm{LQG}}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A - BK_r - K_f C & K_f \\ \hline -K_r & 0 \end{array}\right]$$

onde:

- $K_r = R^{-1}B^T X$ e $X = X^T \geq 0$ é a única solução semidefinida positiva da Equação Algébrica de Riccati:

$$A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + Q = 0$$

- $K_f = YC^T V^{-1}$ e $Y = Y^T \geq 0$ é a única solução semidefinida positiva da Equação Algébrica de Riccati:

$$YA^T + AY - YC^T V^{-1} CY + W = 0$$

Deste modo, a estrutura completa do sistema em malha fechada é apresentada na Fig. 8.6. Este controlador, entretanto, não é robusto.

8.4.2 Síntese H_∞

No problema de síntese H_∞ o que se busca é um controlador $K(s)$ tal que:

$$\|T_{wz}\|_\infty = \|\mathcal{F}_l(P,K)\|_\infty < \gamma$$

e isto se dá através de um algoritmo iterativo. Há um teorema que dá as condições necessárias para que exista um controlador tal que tal que $\|T_{wz}\|_\infty < \gamma$ tenha solução. Se γ_0 é o ínfimo do conjunto de valores de γ para os quais existe controlador admissível, é

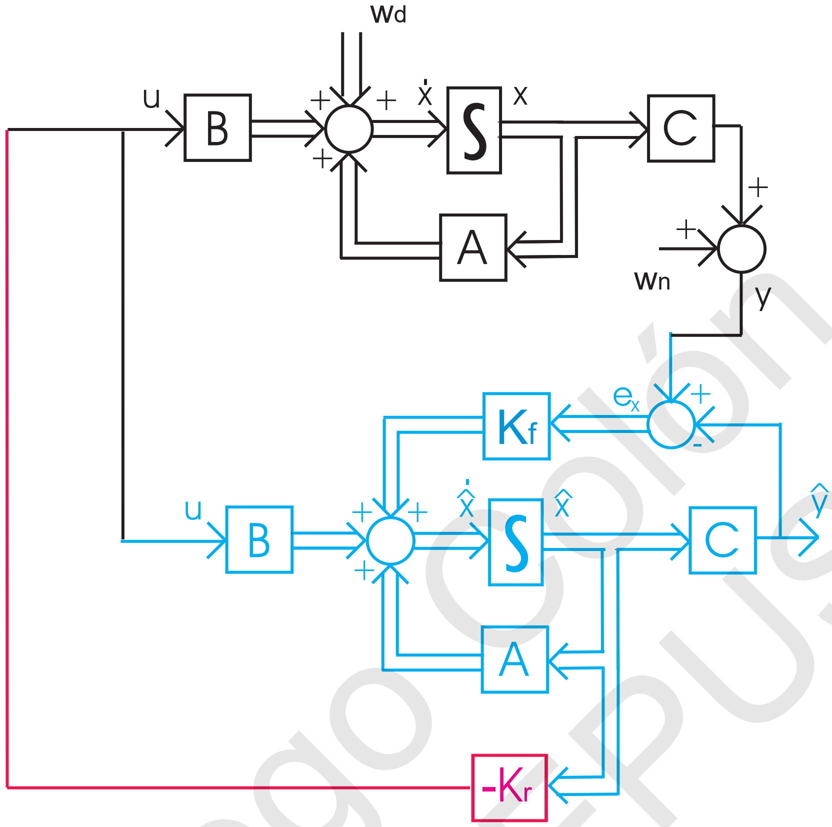

Figura 8.6: Sistema LQG com Filtro de Kalman

possível se aproximar de γ_0 por uma técnica de busca, podendo até ser possível resolver o problema de Controle Ótimo H_∞.

De fato, temos que $\|\mathcal{F}_l(P,K)\|_\infty < \gamma$ se e só se:

1. Existe $X_\infty \geq 0$ que seja solução da EAR:

$$A^T X_\infty + X_\infty A + C_1^T C_1 + X_\infty(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty = 0$$

   tal que $\Re\lambda_i[A + (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T)] < 0$ para qualquer i, e:

2. Existe $Y_\infty \geq 0$ que seja solução da EAR:

$$A^T Y_\infty + Y_\infty A + B_1^T B_1 + Y_\infty(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y_\infty = 0$$

   tal que $\Re\lambda_i[A + (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2)] < 0$ para qualquer i, e

3. $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$

De fato, há uma família de controladores estabilizantes $K(s) = \mathcal{F}_l(K_C, Q)$ onde

$$K_C(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A_\infty & -Z_\infty L_\infty & Z_\infty B_2 \\ \hline F_\infty & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{array}\right]$$

e onde $F_\infty = -B_2^T X_\infty$, $L_\infty = -Y_\infty C_2^T$, $Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}$ e $A_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$ e $Q(s)$ é qualquer matriz de funções de transferência estável e própria tal que $\|Q\|_\infty < \gamma$. O dito *controlador central* é aquele membro da família para o qual $Q(s) \equiv 0$ e que tem a expressão:

$$K(s) = -F_\infty(sI - A_\infty)^{-1} Z_\infty L_\infty$$

Além disso:

- O controlador central possui tem o mesmo número de estados que a planta generalizada $P(s)$.
- O controlador central possui também um estrutura de separação na forma de um *observador* de estados e uma realimentação dos estados estimados pelo observador da forma:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + \underbrace{B_1\gamma^{-2}B_1^T X_\infty \hat{x}}_{\hat{w}_{\text{pior}}} + B_2 u + Z_\infty L_\infty (C_2\hat{x} - y) \\ u &= F_\infty \hat{x} \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

[dC96] José Jaime da Cruz. *Controle Robusto Multivariável*. Editora da Universidade de São Paulo, 1996.

[DLCBS18] P.B. De Lauro Castrucci, A. Bittar, and R.M. Sales. *Controle Automático*. LTC, 2018.

[DP13] G.E. Dullerud and F. Paganini. *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2013.

[Fer02] Pedro J. Fernandez. *Medida e Integração*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq, Estrada Dona Castorina, 110, RIo de Janeiro, Brasil, 2002.

[FPC20] Rafael Fernandes Pinheiro and Diego Colón. On the μ-analysis and synthesis of mimo lurie-type systems with application in complex networks. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, June 2020.

[GPK14] D.W. Gu, P.H. Petkov, and M.M. Konstantinov. *Robust Control Design with MATLAB®*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer London, 2014.

[Hes18] J.P. Hespanha. *Linear Systems Theory: Second Edition*. Princeton University Press, 2018.

[Lju99] Lennart Ljung. *System Identification - Theory For the User*. Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., second edition, 1999.

[Nis15] N.S. Nise. *Control Systems Engineering, 7th Edition*. Wiley, 2015.

[Oga11] K. Ogata. *Engenharia de controle moderno*. PRENTICE HALL BRASIL, 2011.

[PC19] Rafael Fernandes Pinheiro and Diego Colón. An application of the lurie problem in hopfield neural networks. In Agenor de T. Fleury, Domingos A. Rade, and Paulo R. G. Kurka, editors, *Proceedings of DINAME 2017*, pages 371–382, Cham, 2019. Springer International Publishing.

[SP05] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. Wiley, 2005.

[SPS98] R.S. Sánchez-Peña and M. Sznaier. *Robust systems theory and applications*. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control. John Wiley, 1998.

[ZD98] K. Zhou and J.C. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall Modular Series for Eng. Prentice Hall, 1998.

[ZDG95] Khemin Zhou, John C. Doyle, and Keith Glover. *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1995.