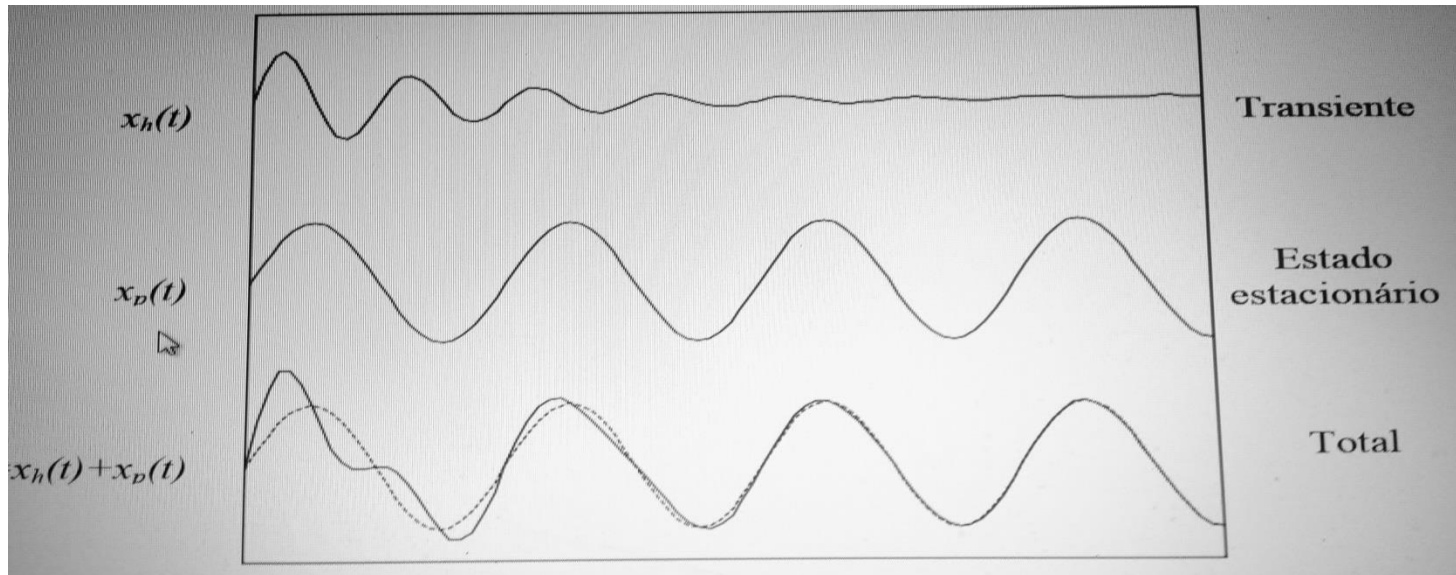


Resposta em Frequência

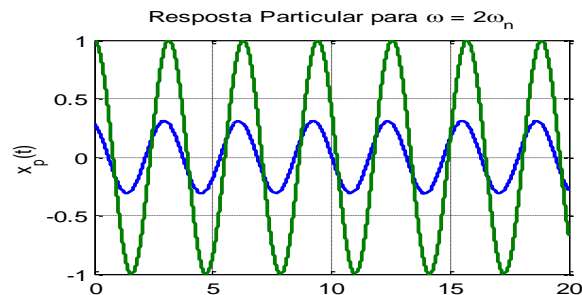
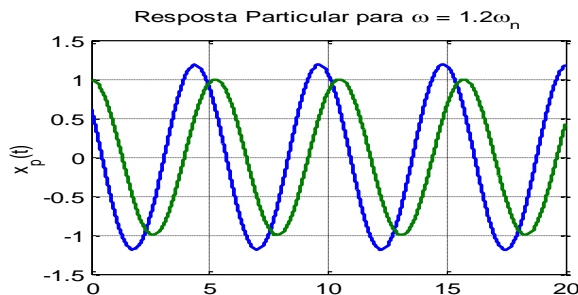
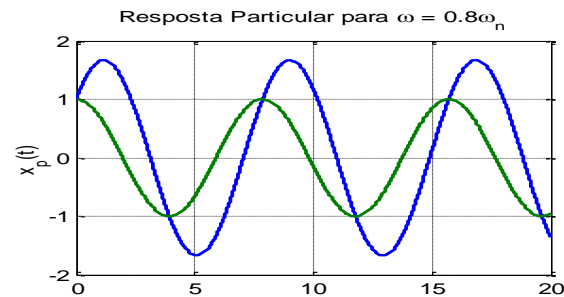
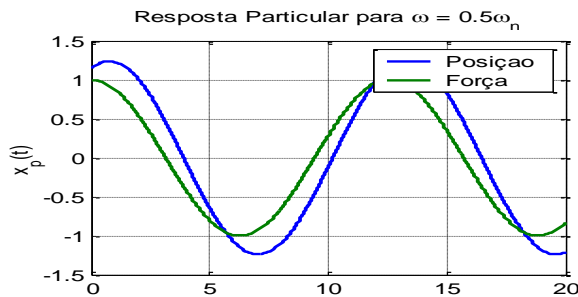
- Como todos sabem, do curso de Vibrações, a resposta forçada de um sistema massa-mola-amortecedor é composta pela resposta transiente (harmônica) somada à resposta particular:



Resposta em Frequência

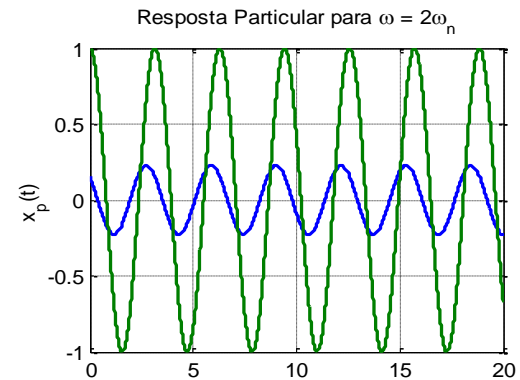
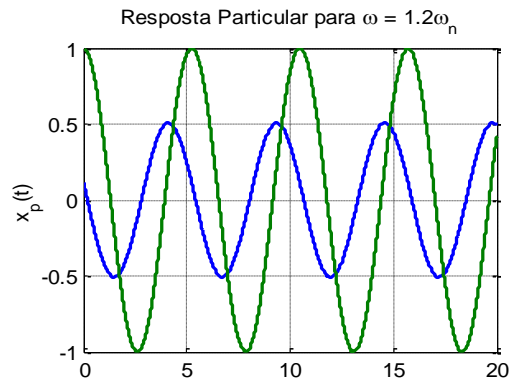
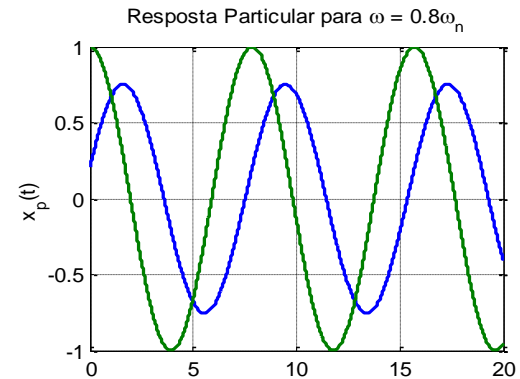
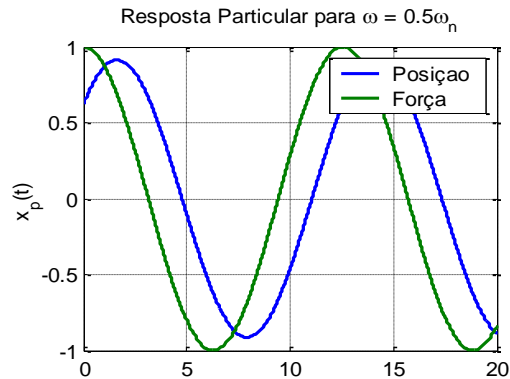
Quando o fator de amortecimento muda, a resposta a uma entrada harmônica muda em que? Apenas em amplitude e fase!

Respostas de Sistema amortecido com $\zeta=0,3$



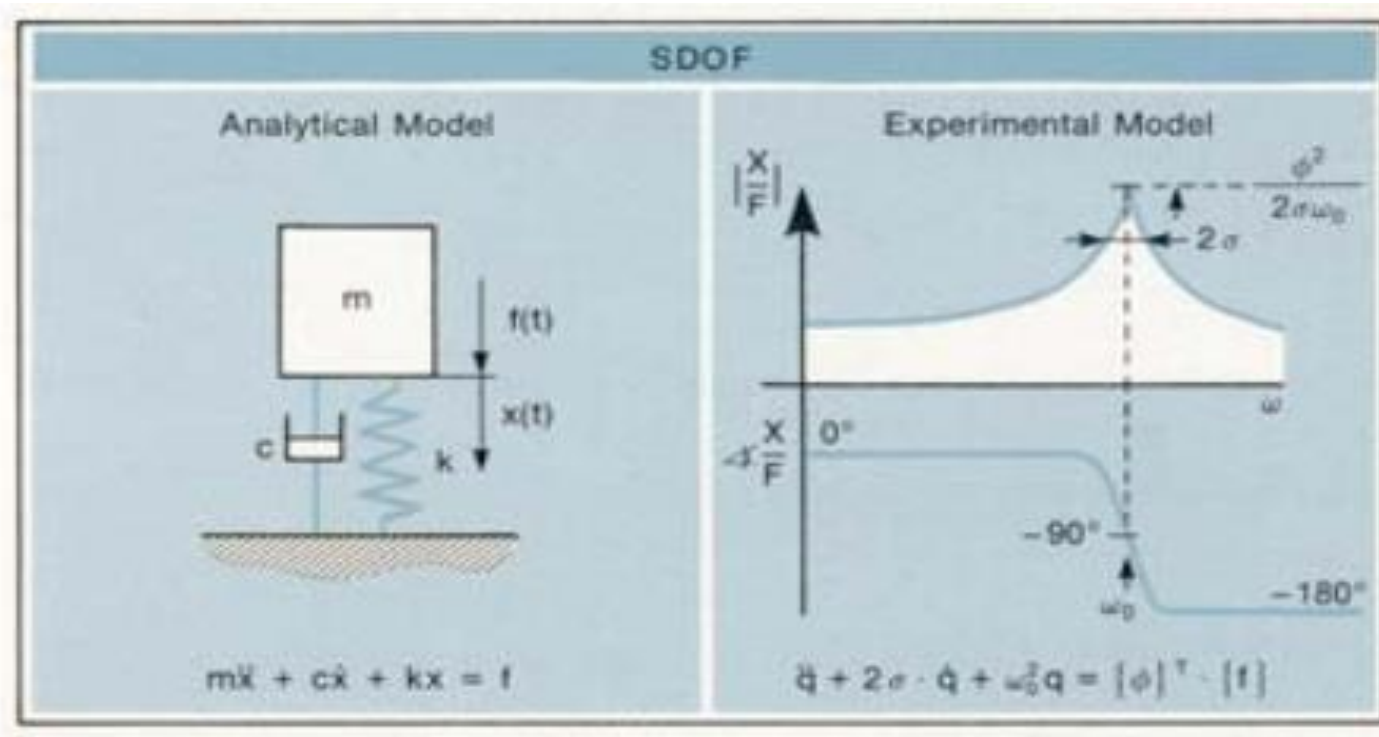
Resposta em Frequência

Respostas de Sistema amortecido com $\zeta=0,8$



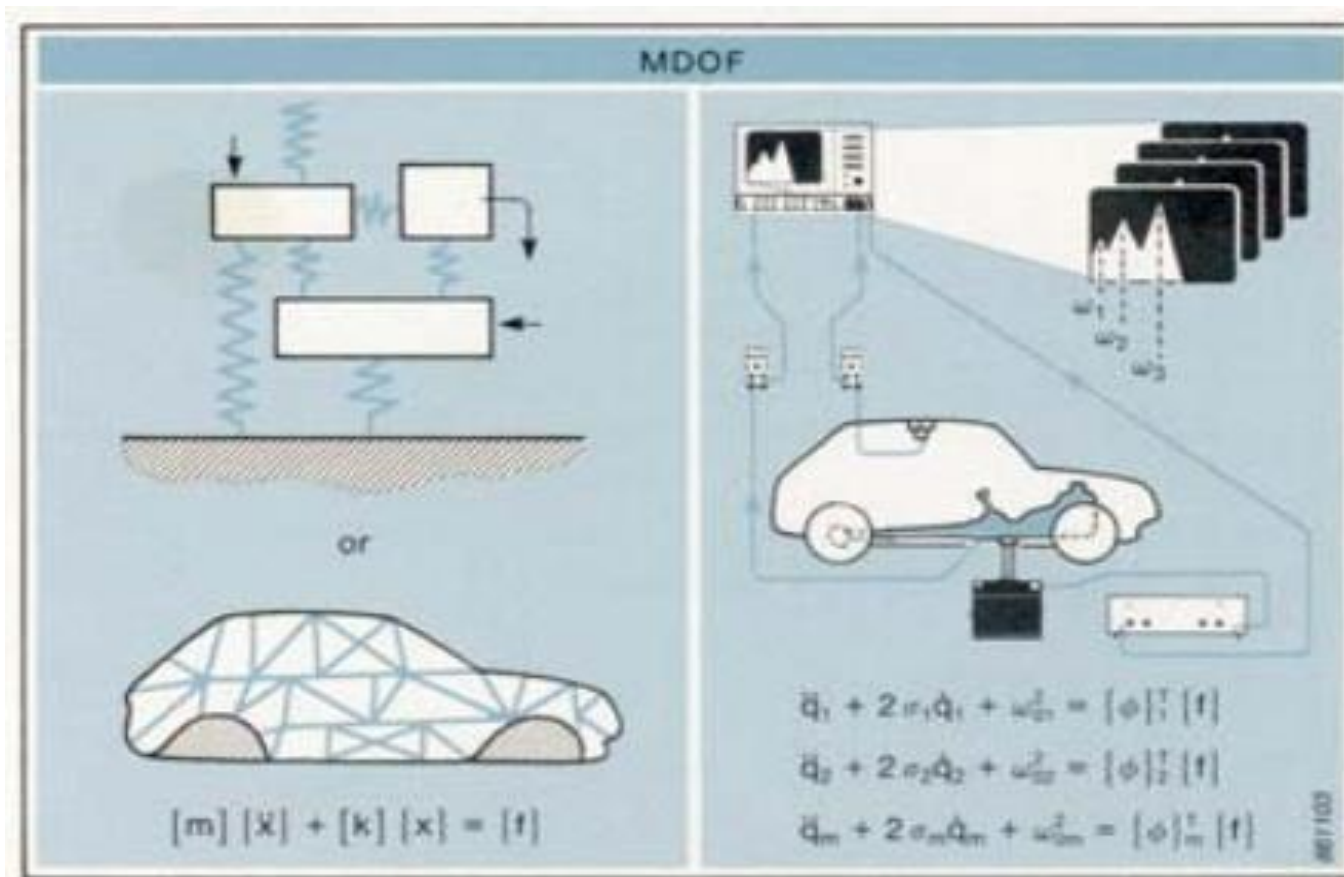
Resposta em Frequência

Para um sistema 1 GL, a resposta é sempre deste tipo:



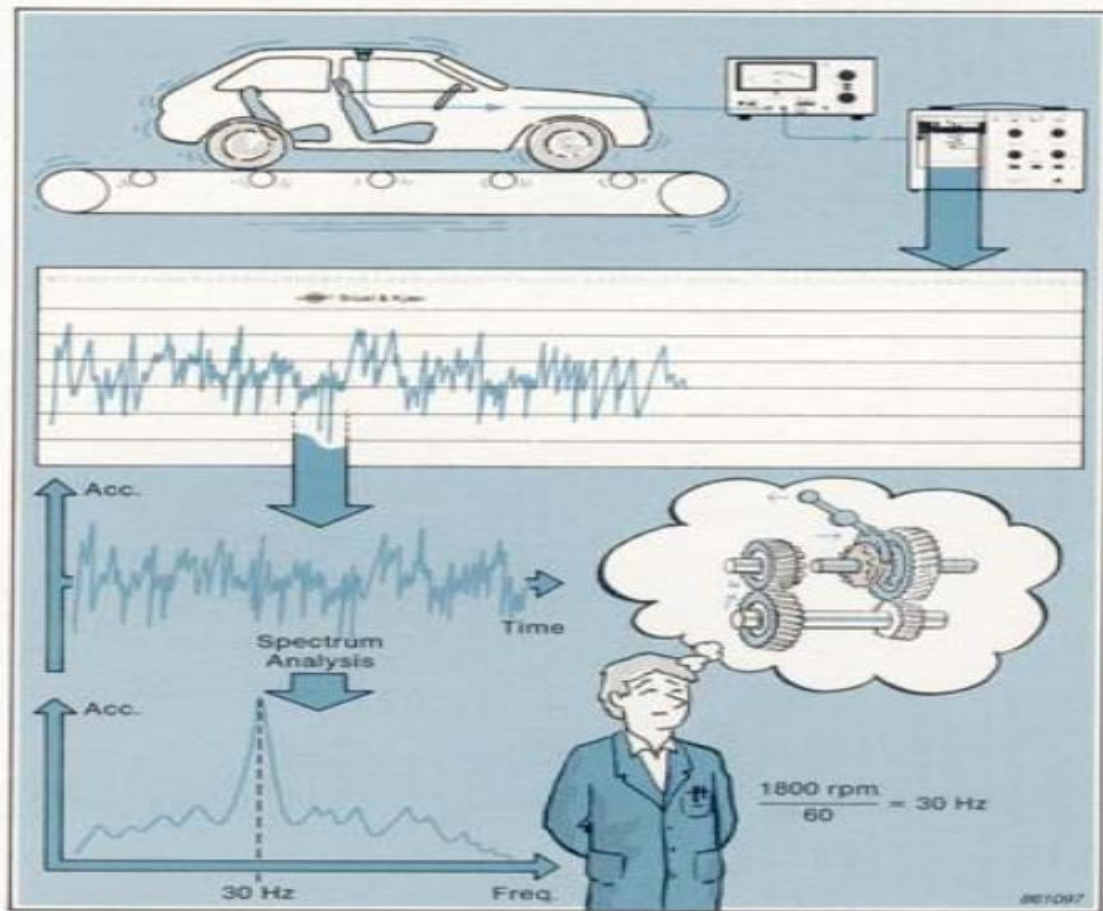
Resposta em Frequência

- Para um sistema com n GL, as coisas mudam:



Resposta em Frequência

O engenheiro da figura está preocupado com uma vibração em 30 Hz



Resposta em Frequência

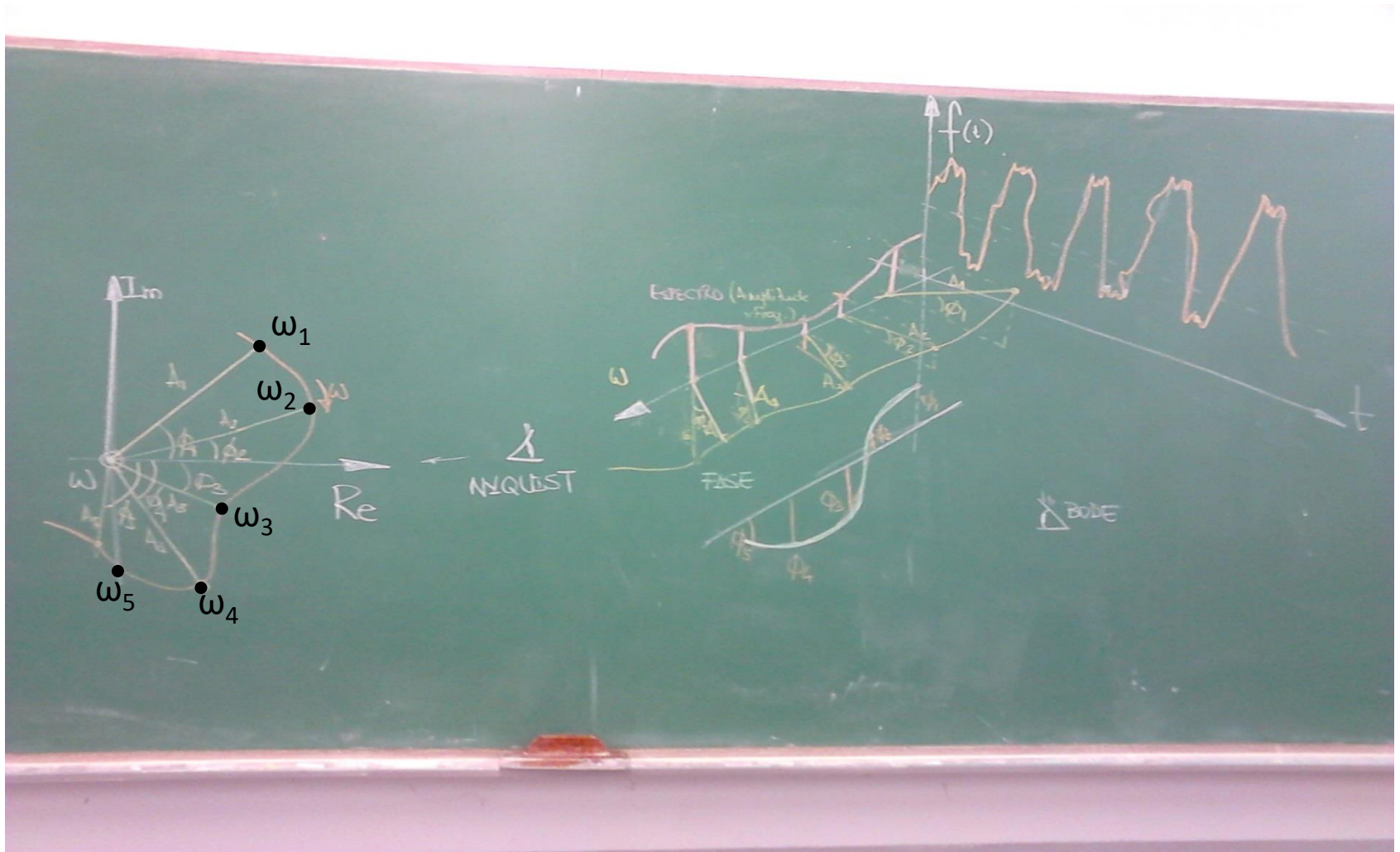
Tentar descobrir o que ocorre analisando o sinal no tempo é inútil. É preciso fazer a análise no domínio das frequências.

As ferramentas mais usadas são:

- Os Diagramas de Bode: são sempre 2 diagramas, um para amplitudes e outro para fases, com as frequências variando de 0 a infinito;
- O Diagrama de Nyquist: sempre um único diagrama polar, indicando as partes real e imaginária das respostas, como veremos no curso de Controle;
- A Carta de Nichols;
- Outras

Resposta em Frequência

Num dia de classe vazia, me ocorreu fazer um desenho:



Resposta em Frequência

Em geral, com 3 ou mais GL já fica impossível tentar entender a resposta de um sistema apenas com o sinal no tempo.

Se o sistema é linear ou com pequenas não linearidades, a resposta a entradas senoidais corresponde às contribuições de cada um dos modos de vibrar.

Análise modal (ou espectral) corresponde a determinar, analítica ou experimentalmente, frequências, amortecimentos e modos de vibrar de um sistema.

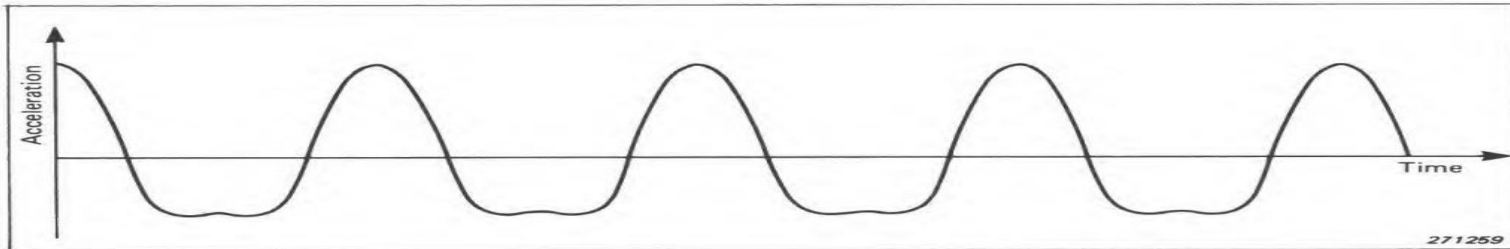
É claro que sistemas de 1ª ordem também podem ser determinados.

Amortecimento é uma propriedade modal. Em estruturas mecânicas, só pode ser obtido experimentalmente, como veremos na aula de Elementos Finitos.

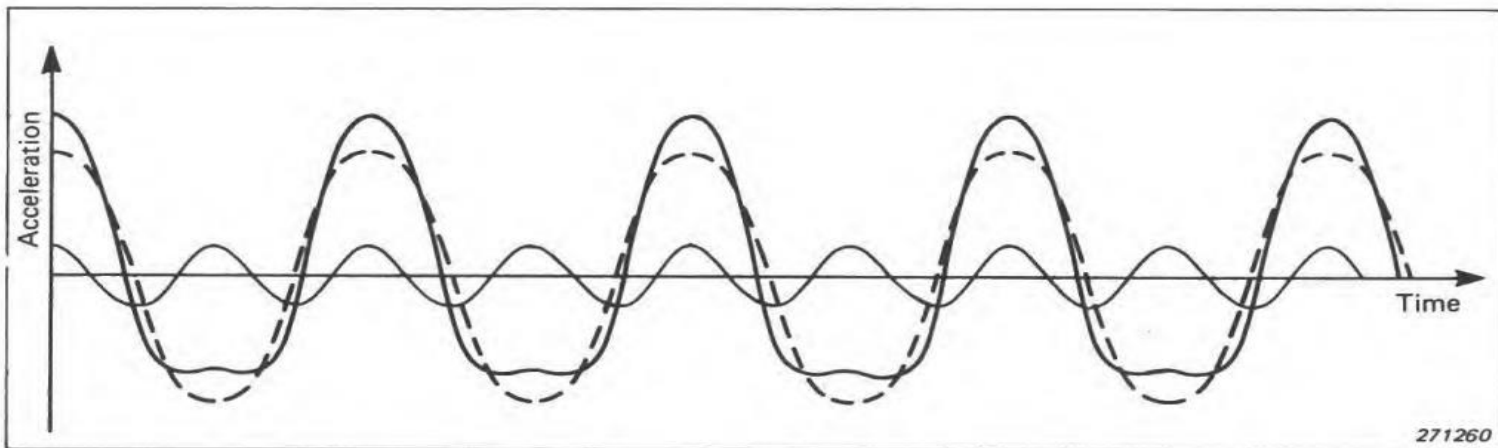
Resposta em Frequência

Para dar uma ideia de como funcionam os conceitos:

- Aceleração de um pistão de motor de combustão interna

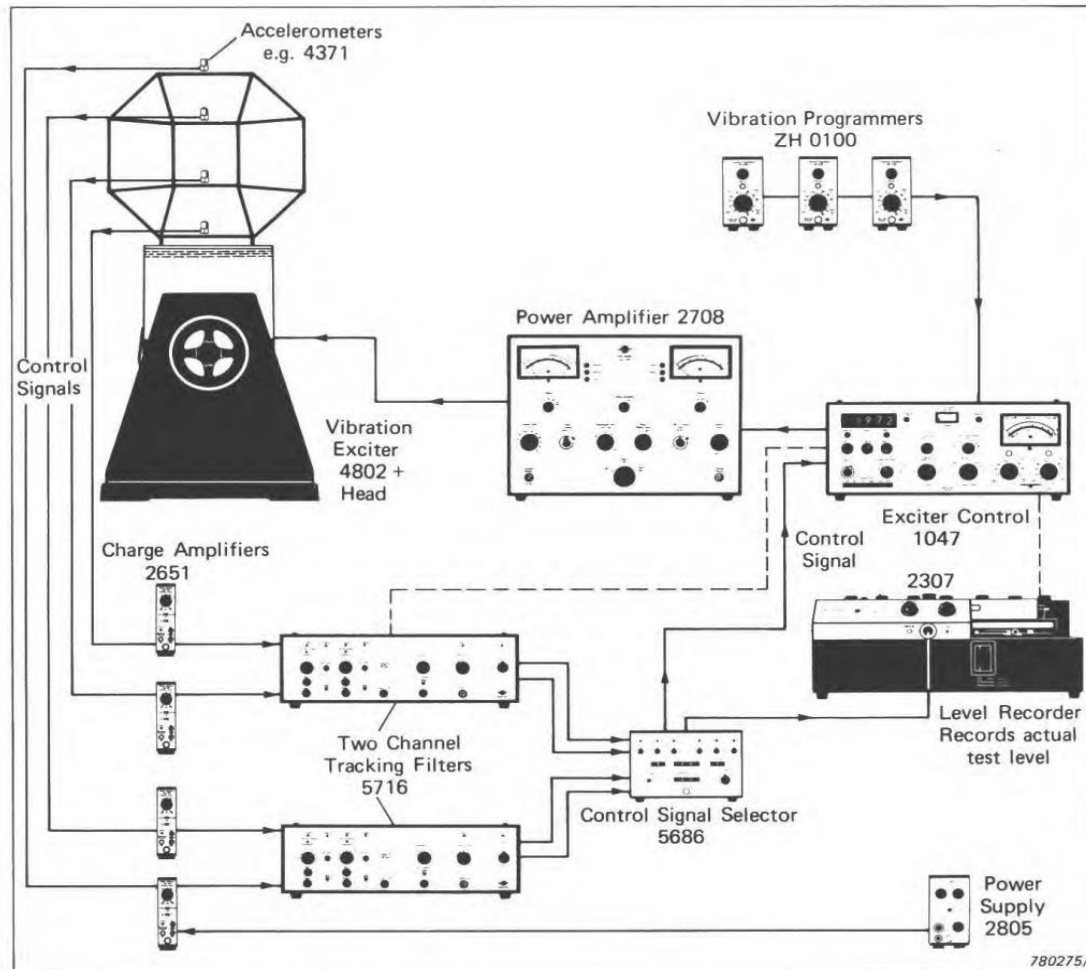


-Decomposição em 3 modos (poderiam ser mais)



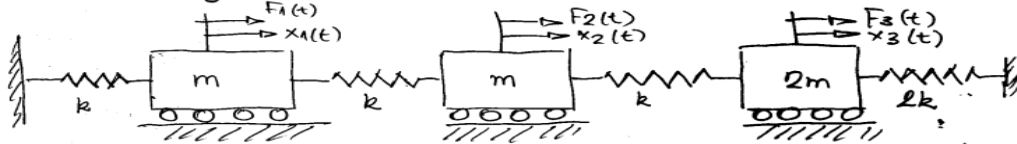
Resposta em Frequência

Exemplo de teste de uma estrutura mecânica por excitação de base (B&K)



Resposta em Frequência

Exemplo: No sistema abaixo, obtenha a resposta para quaisquer forças $F_1(t)$, $F_2(t)$, $F_3(t)$, obtendo que as condições iniciais sejam todas nulas.



Eqs. Movimento

$$m \ddot{x}_1(t) + 2k x_1(t) - k x_2(t) = F_1(t)$$

$$m \ddot{x}_2(t) - k x_1(t) + 2k x_2(t) - k x_3(t) = F_2(t)$$

$$2m \ddot{x}_3(t) - k x_2(t) + 3k x_3(t) = F_3(t)$$

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Problema de autovalores: $[-m][u][\omega^2] = [k][u]$

Solução

$$[\omega^2] = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 0.6594 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6789 & 0 \\ 0 & 0 & 3.1619 \end{bmatrix}$$

$$[u] = \sqrt{m} \begin{bmatrix} 0.4959 & 0.6074 & 0.6209 \\ 0.6646 & 0.1949 & -0.7215 \\ 0.3954 & -0.5446 & 0.2171 \end{bmatrix}$$

Com isso pode-se calcular o vetor de forças nodais por $N = [u] F$

Resposta em Frequência

$$N_1(t) = u_1^T F = \sqrt{m} [0.4959 F_1(t) + 0.6646 F_2(t) + 0.3954 F_3(t)]$$

$$N_2(t) = u_2^T F = \sqrt{m} [0.6074 F_1 - 0.1949 F_2 - 0.5746 F_3]$$

$$N_3(t) = u_3^T F = \sqrt{m} [0.6209 F_1 - 0.7215 F_2 + 0.2171 F_3]$$

Note que as forças comparecem em cada um dos modos e as equações desacopladas são escritas

$$\ddot{\eta}_1(t) + 0.6594 \frac{k}{m} \eta_1(t) = N_1(t)$$

$$\ddot{\eta}_2(t) + 1.6789 \frac{k}{m} \eta_2(t) = N_2(t)$$

$$\ddot{\eta}_3(t) + 3.1619 \frac{k}{m} \eta_3(t) = N_3(t)$$

Como as condições iniciais são nulas, as soluções para cada um dos modos são dadas pelas seguintes integrais de convolução:

$$\eta_1(t) = \frac{1}{\omega_1} \int_0^t N_1(\tau) \operatorname{sen} \omega_1(t-\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{\sqrt{0.6594 \frac{k}{m}}} \int_0^t [0.4959 F_1(\tau) + 0.6646 F_2(\tau) + 0.3954 F_3(\tau)] \cdot \operatorname{sen} \sqrt{0.6594 \frac{k}{m}}(t-\tau) d\tau$$

$$\eta_1(t) = \frac{\sqrt{k}}{0.8120} \int_0^t [0.4959 F_1(\tau) + 0.6646 F_2(\tau) + 0.3954 F_3(\tau)] \operatorname{sen} 0.812 \sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau) d\tau$$

$$\eta_2(t) = \frac{\sqrt{k}}{1.2957} \int_0^t [0.6074 F_1(\tau) - 0.7215 F_2(\tau) + 0.2171 F_3(\tau)] \operatorname{sen} 1.2957 \sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau) d\tau$$

$$\eta_3(t) = \frac{\sqrt{k}}{1.7782} \int_0^t [0.6209 F_1(\tau) - 0.7215 F_2(\tau) + 0.2171 F_3(\tau)] \operatorname{sen} 1.7782 \sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau) d\tau$$

Finalmente, pode-se calcular: $x_i(t) = \sum_{j=1}^3 u_i^j \eta_j(t)$ $i=1,2,3$

Resposta em Frequência

Na realidade, temos que trabalhar com número de GLs muito maior. Ex.: Antena de Radar Meteorológico (Armellini, 2007)



Resposta em Frequência

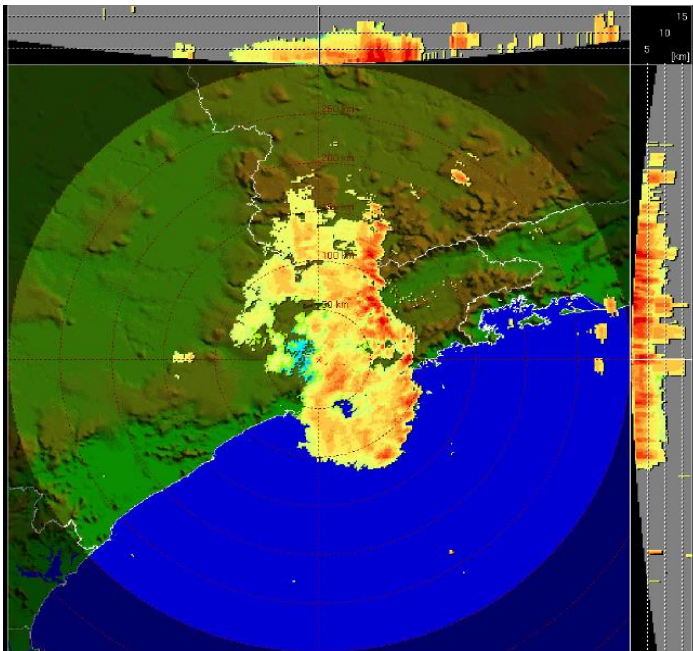
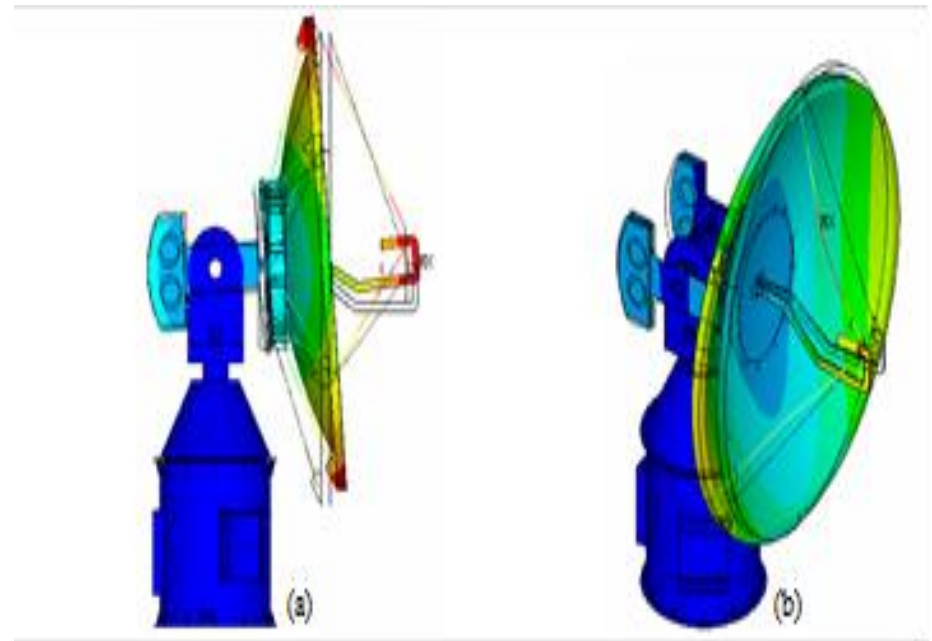


Imagem tempestade



2 primeiros modos de vibrar

Resposta em Frequência

Foi contratada uma firma especializada em Análise Estrutural que montou um modelo em Elementos Finitos com 245.000 GLs (pra que tanto?)!!!

Levantadas as 20 primeiras frequências naturais, todas abaixo de 100 Hz, a primeira em 5,4 Hz, a segunda em 8,8 Hz.

Com a antena instalada no pedestal, foi feita a Análise Experimental que confirmou as 2 primeiras frequências, porém...

Surgiram 2 frequências em torno de 1,5 Hz não previstas no modelo, provavelmente devidas ao acoplamento com o pedestal metálico de grande altura. Foram descartadas no projeto de controle.

Este exemplo serve para mostrar a importância do MEF nos projetos atuais de Sistemas Mecatrônicos.

Resposta em Frequência

A título de exemplo, vamos examinar o caso de uma viga em flexão. É o modelo mais simples: um dimensional e só envolve um tipo de carregamento.

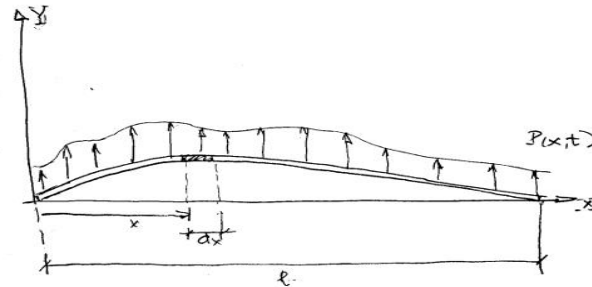
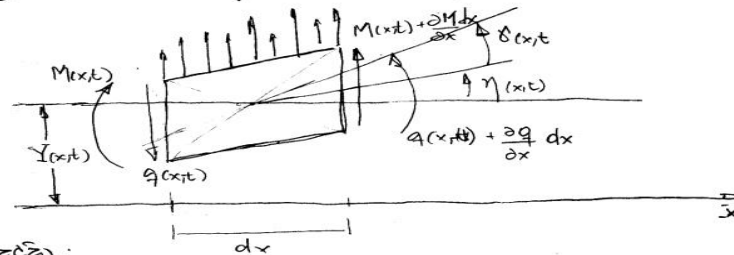


Diagrama de Corpo Livre



Inclinação:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \eta(x,t) + \delta(x,t)$$

η - rotação devida à flexão

δ - rotação devida ao cisalhamento

Momento Fletor:

$$M(x,t) = EI(x) \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Deformação por cisalhamento:

$$q(x,t) = k' G \Delta(x) \delta(x,t)$$

Resposta em Frequência

Mesmo para um elemento estrutural simples, são necessárias simplificações. É usual admitir que os efeitos de inércia de rotação e de cisalhamento são nulos o que é razoável para vigas e barras (seção transversal de pequenas dimensões comparadas ao comprimento). Daí:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \eta(x,t) \quad (\delta(x,t) = 0)$$
$$\int_0^l \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} \right]^2 J(x) dx = 0$$

Finalmente, admitindo ausência de cargas externas, i.e., $P(x,t) = 0$, as equações podem ser reescritas, obtendo-se o modelo de VIGA EULER-BERNOULLI:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

com as condições de contorno associadas:

$$\left[EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \Big|_0^l = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \delta y \Big|_0^l = 0$$

Resposta em Frequência

Embora consideravelmente mais simples, o modelo de Euler-Bernoulli é muito difícil de tratar de maneira direta. Usa-se, então, SEPARAÇÃO de variáveis, isolando a coordenada espacial x da variável tempo t , admitindo que a solução da EDD original possa ser escrita como

$$y(x,t) = \bar{y}(x) \cdot F(t)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m(x) \bar{y}(x)} \frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} \right] = - \frac{1}{F(t)} \frac{d^2 F(t)}{dt^2} = \omega^2$$

onde ω^2 é a constante de separação. Então:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 \bar{y}(x)}{dx^2} \right] - \omega^2 m(x) \bar{y}(x) = 0$$

$$\frac{d^2 F(t)}{dt^2} + \omega^2 F(t) = 0$$

Resposta em Frequência

Se a seção da viga é constante então $I(x) = I$, $m(x) = \rho A$

e as equações resultam:

$$\frac{d^2 F}{dt^2} + \omega^2 F = 0$$

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - \beta^4 Y = 0$$

que tem solução $F(t) = G \cos \omega t + H \sin \omega t$

$$Y(x) = A \cosh(\beta x) + B \sinh(\beta x) + C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x)$$

onde A, B, C, D são obtidas das cond. em torno
 G, H são obtidas das cond. iniciais.

$$\omega = \beta^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

$$\text{ou } \omega = (\beta L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}$$

Resposta em Frequência



Figure 1a: Typical First Mode Vibration Envelope

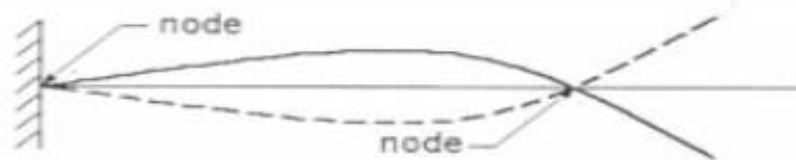


Figure 1b: Typical Second Mode Vibration Envelope

1

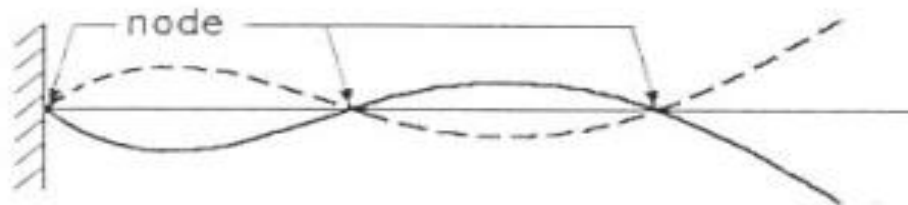
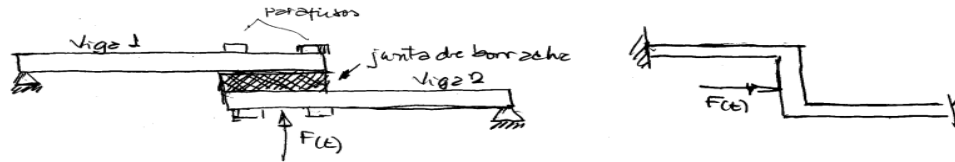
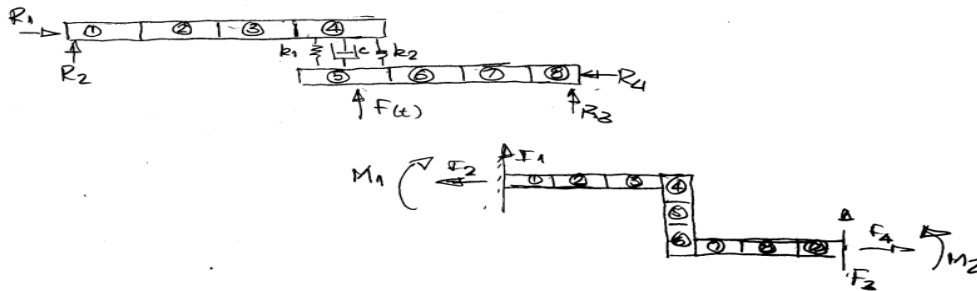


Figure 1c: Typical Third Mode Vibration Envelope

Resposta em Frequência



Usar modelos contínuos na análise dinâmica dessas estruturas é praticamente impossível. A única saída é procurar simplificações. Essas simplificações vêm da discretização do modelo utilizando métodos como Elementos Finitos, Matrizes de Transferência, etc, etc. O método mais utilizado hoje em dia é o MEF. Pressupõe a discretização da estrutura em elementos onde as propriedades podem ser admitidas constantes. Para as estruturas acima:



MEF

Método dos Elementos Finitos

Introdução

- MEF é uma derivação do Método de Rayleigh-Ritz
- MEF exige aproximação por uma série finita de funções admissíveis definidas sobre todo o domínio.
- Vantagem do MEF: funções admissíveis definidas apenas em subdomínios relativamente pequenos \Rightarrow os elementos finitos

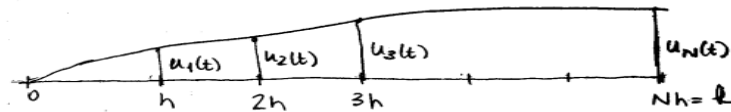
A ideia básica do MEF é trabalhar com funções admissíveis ϕ_i que constituem uma base local e têm a forma mais simples possível

Mais ainda, o objetivo é avaliar o quociente de Rayleigh pelo cálculo da contribuição de cada elemento finito separadamente e pela combinação de seus resultados, processo conhecido como "montagem" na terminologia do MEF.

MEF

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A ideia do MEF é fornecer uma metodologia que pode ser explorada pelo computador para análise de estruturas irregulares. O MEF trata uma estrutura complexa como uma junção de elementos, cada elemento parte de um membro estrutural contínuo. As exigências de que os deslocamentos sejam compatíveis e de que forças internas sejam balanceadas em certos pontos comuns a vários elementos, os chamados nós, a estrutura interna é compelida a atuar como única entidade. É um procedimento de discretização, na sua essência, que fornece o deslocamento em qualquer ponto do elemento (contínuo) como o produto de um número finito de deslocamentos nos nós por funções de interpolação escolhidas.



MEF

O movimento é definido em termos dos deslocamentos nodais $u_j(t)$, $j=1, 2, \dots, N$. O movimento de qualquer ponto interno é obtido por interpolação através de polinômios de baixa ordem que, ~~em~~, em geral, os mesmos para todos elementos.

Obtenção das Equações de Movimento

Equações de movimento da estrutura, no MEF, ^{são geradas} obtendo-se primeiramente as equações de cada elemento e depois montando as equações para todos os elementos. Obtidas as matrizes de rigidez pelo método recém-descrito, é necessário montar as matrizes de massa e os vetores de forças nodais. O objetivo é chegar num sistema:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [K] \{x\} = \{f\}$$

ou, se for o caso:

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{f\}$$

MEF

A título de exemplo, vamos montar essas matrizes para os dois elementos em análise.

- a) Barra em movimento axial com carregamento distribuído $f(x,t) = a + bx$ e massa e área constantes ao longo do elemento.

$$\begin{aligned} [M]_e &= \int_0^h m(x) L(x) L^T(x) dx = m \int_0^h \begin{bmatrix} 1-x/h \\ x/h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-x/h & x/h \end{bmatrix} dx \\ &= m \int_0^h \begin{bmatrix} (1-x/h)^2 & (1-x/h)x/h \\ (1-x/h)x/h & (x/h)^2 \end{bmatrix} dx = \frac{mh}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$L'(x) = \frac{d}{dx} L(x) = \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} 1-x/h \\ x/h \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_e = \frac{EA}{h^2} \int_0^h \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \int_0^h f(x,t) L(x) dx = \int_0^h (a+bx) \begin{bmatrix} 1-x/h \\ x/h \end{bmatrix} dx = \int_0^h \begin{bmatrix} a + (b - \frac{a}{h})x - \frac{b}{h}x^2 \\ \frac{a}{h}x + \frac{b}{h}x^2 \end{bmatrix} dx$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}ah + \frac{1}{6}bh^2 \\ \frac{1}{2}ah + \frac{1}{3}bh^2 \end{bmatrix}$$

MEF

b) Viga uniforme em flexão com carga concentrada em $x = h/3$.

$$[M]_e = m \int_0^h L(x) L^T(x) dx = m \int_0^h \begin{bmatrix} 1 - 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{h}\right)^3 \\ \frac{x}{h} - 2\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{x}{h}\right)^3 \\ 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{h}\right)^3 \\ -\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{x}{h}\right)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}^T dx$$

Resumindo $m_{11} = m \int_0^h \left[1 - 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{h}\right)^3 \right] dx = \frac{13}{35} mh$

$$m_{12} = m_{21} = m \int_0^h \left[1 - 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{h}\right)^3 \right] \left[\frac{x}{h} - 2\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{x}{h}\right)^3 \right] dx = \frac{11}{210} mh$$

$$m_{44} = m \int_0^h \left[-\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{x}{h}\right)^3 \right] dx = \frac{1}{105} mh$$

Sei : $[M]_e = \frac{mh}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix}$

MEF

Para calcular a matriz de rigidez

$$L'(x) = \frac{d^2}{dx^2} L(x) = \frac{q}{h^2} \begin{bmatrix} -3 + \frac{6x}{h} \\ -2 + \frac{3x}{h} \\ 3 - \frac{6x}{h} \\ -1 + \frac{3x}{h} \end{bmatrix}$$

$$[k]_e = \frac{4EI}{h^4} \int_0^h \begin{bmatrix} -3 + \frac{6x}{h} \\ -2 + \frac{3x}{h} \\ 3 - \frac{6x}{h} \\ -1 + \frac{3x}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phantom{-3 + \frac{6x}{h}} \\ \phantom{-2 + \frac{3x}{h}} \\ \phantom{3 - \frac{6x}{h}} \\ \phantom{-1 + \frac{3x}{h}} \end{bmatrix}^T dx$$

Resumindo: $k_{11} = \frac{4EI}{h^4} \int_0^h \left(-3 + \frac{6x}{h}\right)^2 dx = \frac{12EI}{h^3}$

$k_{44} = \frac{4EI}{h^4} \int_0^h \left(-1 + \frac{3x}{h}\right)^2 dx = \frac{4EI}{h^3}$

$$[k]_e = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

MEF

Para o vetor de forças nodais, dada a força concentrada

$$f(x,t) = P(t) \delta\left(x - \frac{h}{3}\right)$$

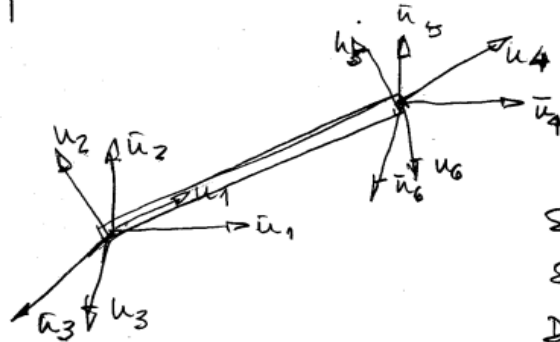
$$f(t) = P(t) \int_0^h \delta\left(x - \frac{h}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 - 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{h}\right)^3 \\ \frac{x}{h} - 2\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{x}{h}\right)^3 \\ 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{h}\right)^3 \\ -\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{x}{h}\right)^3 \end{bmatrix} dx$$

$$= P(t) \begin{bmatrix} 1 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ \frac{1}{3} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ -\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \end{bmatrix} \rightarrow f(t) = \frac{1}{27} P(t) \begin{bmatrix} 20 \\ 4 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

MEF

Transformações de Coordenadas

As matrizes dos elementos foram deduzidas a partir das coordenadas locais, na direção mais conveniente dentro de cada elemento. Antes de se pensar em montar o sistema de equações diferenciais é mandatório fazer a transformação do sistema local para um sistema único de referência de estrutura (global).



Sistema local: x, y, z

Sistema global: $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$

Desloc. locais: $u_1, u_2, u_3 \dots u_6$

Desloc. globais: $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \dots \bar{u}_6$

Matriz de cossenos diretores: $[L] = \begin{bmatrix} l_{x\bar{x}} & l_{x\bar{y}} & l_{x\bar{z}} \\ l_{y\bar{x}} & l_{y\bar{y}} & l_{y\bar{z}} \\ l_{z\bar{x}} & l_{z\bar{y}} & l_{z\bar{z}} \end{bmatrix}$

MEF

O Processo de Montagem

O primeiro requisito básico é que haja compatibilidade geométrica nos nós dos elementos pois deslocamentos em nós pertencentes a vários elementos devem ter os mesmos valores para cada elemento. Além disso, as forças nodais correspondentes devem ser estatisticamente equivalentes às forças aplicadas.

O sistema completo tem E elementos; o índice e identifica quantidades e propriedades de cada elemento ($e = 1, 2, \dots, E$). A estrutura toda tem N deslocamentos nodais \bar{u}_j ($j = 1, \dots, N$), contidos no vetor global \bar{U} de deslocamentos nodais \bar{U} , lembrando que \bar{U} indica sistema global de coordenadas.

MEF

Define-se o vetor estendido de deslocamentos do

$$\bar{U}_e = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{u}_e \\ 0 \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

elemento, de dimensão igual a do vetor \bar{U}

A mesma definição pode ser amplizada para as matrizes estendidas de massa $[\bar{M}]_e$, de rigidez $[\bar{K}]_e$ e de forças nodais $[\bar{F}]_e$. Por exemplo:

$$[\bar{M}]_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & [\bar{M}]_e & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Montando a energia cinética do sistema:

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \dot{u}_e^T [\bar{M}]_e \dot{u}_e = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \dot{U}_e^T [\bar{M}]_e \dot{U}_e$$

$$= \frac{1}{2} \dot{U}^T [\bar{M}] \dot{U} \quad \Rightarrow \quad [\bar{M}] = \sum_{e=1}^E [\bar{M}]_e$$

$[\bar{M}]$ - matriz de massa do sistema, no sistema global de coordenadas

MEF

Analogamente para a energia potencial

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \bar{u}_e^T [\bar{K}]_e \bar{u}_e = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \bar{U}_e^T [\bar{K}]_e \bar{U}_e \\ &= \frac{1}{2} \bar{U}^T [\bar{K}] \bar{U} \quad \Rightarrow \quad [\bar{K}] = \sum_{e=1}^E [\bar{K}]_e \end{aligned}$$

$[\bar{K}]$ - matriz de rigidez do sistema

O vetor de forças nodais é dado por

$$\{F\} = \sum_{e=1}^E \{F\}_e$$

Escritas as matrizes e vetores globais, as equações de movimento resultam:

$$[\bar{M}] \{\ddot{\bar{U}}\} + [\bar{K}] \{\bar{U}\} = \{F\}$$

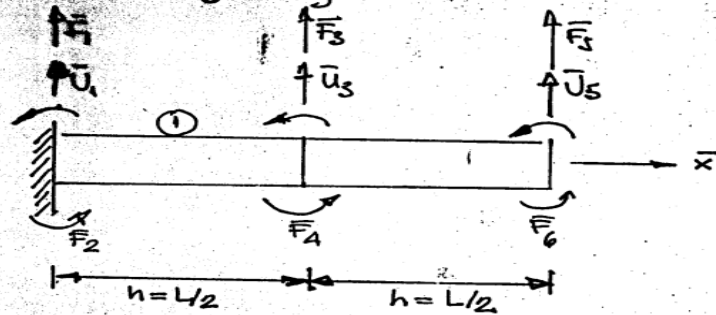
na sua forma mais simples.

Se houver amortecimentos (ou acoplamento giroscópico), existe um termo adicional:

$$[\bar{M}] \{\ddot{\bar{U}}\} + [\bar{C}] \{\dot{\bar{U}}\} + [\bar{K}] \{\bar{U}\} = \{F\}$$

MEF

Exemplo: Obter as equações de movimento para vibração livre de uma viga engastada usando 2 elementos.



Para cada elemento com \$h = \frac{L}{2}\$ tem-se:

$$[m]_e = \frac{mh}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix} \quad e=1,2$$

$$[k]_e = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad e=1,2$$

Escrever-se a seguir as matrizes de massa e rigidez estendidas:

$$[M]_1 = \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 & 0 & 0 \\ 22 & 4 & 13 & -3 & 0 & 0 \\ 54 & 13 & 156 & -22 & 0 & 0 \\ -13 & -3 & -22 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[M]_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 156 & 22 & 54 & -13 \\ 0 & 0 & 22 & 4 & 13 & -3 \\ 0 & 0 & 54 & 13 & 156 & -22 \\ 0 & 0 & -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix}$$

MEF

$$[K]_1 = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & -6 & 12 & -6 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K]_2 = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz de massa da estrutura completa

$$[\bar{M}] = \sum_{e=1}^2 [M]_e = \frac{mh}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 & 0 & 0 \\ 22 & 4 & 13 & -3 & 0 & 0 \\ \hline 54 & 13 & 12 & 0 & 54 & -13 \\ -13 & -3 & 0 & 8 & 13 & -3 \\ 0 & 0 & 54 & 13 & 156 & -22 \\ 0 & 0 & -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \sum_{e=1}^2 [K]_e = \frac{EI}{h^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ \hline -12 & -6 & -24 & 0 & -12 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Como a viga está engastada em $x=0$, os deslocamentos translacional e rotacional são nulos, isto é, $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0$ e com isso desprezam-se os graus livres

MEF

Linhas e colunas de $[\bar{M}]$ e $[K]$

As equações de movimento ficam:

$$\frac{mL}{840} \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -13 \\ 0 & 8 & 13 & -5 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_3 \\ h\ddot{U}_4 \\ \ddot{U}_5 \\ h\ddot{U}_6 \end{Bmatrix} +$$

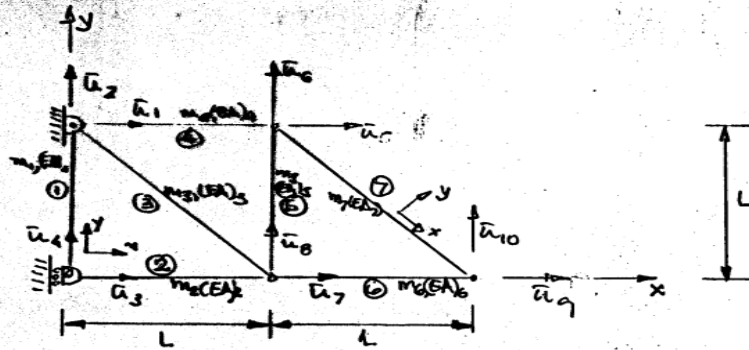
$$+ \frac{16EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -6 & -3 & 6 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_3 \\ h\bar{U}_4 \\ \bar{U}_5 \\ h\bar{U}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

As equações de reação no engastamento são as que sobraram:

$$\frac{mL}{840} \begin{bmatrix} 64 & -13 & 0 & 0 \\ 13 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_3 \\ h\ddot{U}_4 \\ \ddot{U}_5 \\ h\ddot{U}_6 \end{Bmatrix} + \frac{16EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_3 \\ h\bar{U}_4 \\ \bar{U}_5 \\ h\bar{U}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

MEF

Exemplo: Equações de Movimento de uma treliça



Uma treliça é composta por barras fixadas que transmite apenas as tração-compressão \rightarrow elemento axial

- Matrizes de Rotação

elemento: $[e]_1 = [e]_2 = [e]_4 = [e]_5 = [e]_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$[e]_3 = [e]_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

elemento \rightarrow sist. global

$$[L]_i = \begin{bmatrix} [e]_i & [0] \\ [0] & [e]_i \end{bmatrix}$$

$$[L]_1 = [L]_2 = [L]_4 = [L]_5 = [L]_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[L]_3 = [L]_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

MEF

Matriz de masa (consistente)

elemento $[m]_i = \frac{m_i L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad i=1,2,4,5,6$

$[m]_i = \frac{\sqrt{2} m_i L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad i=3,7$

elementos sist. global

$[m]_i = [m]_i \quad i=1,2,4,5,6$
 $[m]_i = [L]^T [m] [L] \quad i=3,7$
 $[m]_i = \frac{m_i L}{6\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad i=3,7$

Matriz de Rigidez

elemento $[k]_i = \frac{(EA)_i}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i=1,5$

$[k]_i = \frac{(EA)_i}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad i=2,4,6$

$[k]_i = \frac{(EA)_i}{\sqrt{2} L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad i=3,7$

MEF

Resultam as seguintes equações de movimento:

$$\begin{aligned}
 & \frac{mL}{6\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4+4\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4+4\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 4+6\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 4+6\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 4+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 4+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{Bmatrix} + \\
 & + \frac{EA}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1+2\sqrt{2} & 0 & -2\sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1+4\sqrt{2} & -1 & -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & -1 & 1+2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2\sqrt{2} & 0 & 1+2\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$