MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear

1ª Prova - 07/11/2020

Atenção:

1 - Leia os enunciados com atenção!
2 - Justifique cuidadosamente todas as suas afirmações.
3 - Boa prova!

1. **(3,0)** Verifique se cada um dos subconjuntos W é ou não um subespaço do espaço vetorial V. JUSTIFIQUE. Nos casos em que W é um subespaço de V, determine a dimensão de W exibindo uma base de W.

   (a) $V = M_3(\mathbb{R})$ e W é o conjunto das matrizes $A \in V$ tais que a soma dos elementos da primeira linha de A é igual à soma dos elementos da primeira coluna de A.

   (b) $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1 + x_4)^2 = (x_2 + x_3)^2\}$.

   (c) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $W = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) \mid 2p(1) = p(0)\}$.

(a) W é subespaço pois:

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$, pois $0+0+0 = 0+0+0$

(2) Se $A \in W$ e $B \in W$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \in W \Rightarrow a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{11} + a_{21} + a_{31}$

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \in W \Rightarrow b_{11} + b_{12} + b_{13} = b_{11} + b_{21} + b_{31}$

hipótese

Então $A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix}$

$\underline{a_{11}+b_{11} + a_{12}+b_{12} + a_{13}+b_{13}} = a_{11}+a_{12}+a_{13}+b_{11}+b_{12}+b_{13}$

$= a_{11}+a_{21}+a_{31} + b_{11}+b_{21}+b_{31} = \underline{a_{11}+b_{11}+a_{21}+b_{21}+a_{31}+b_{31}}$

Hipótese

Logo $A+B \in W$.

(3) Se $a \in \mathbb{R}$ e $A \in W$ então

$aA = \begin{bmatrix} a\,a_{11} & a\,a_{12} & a\,a_{13} \\ a\,a_{21} & a\,a_{22} & a\,a_{23} \\ a\,a_{31} & a\,a_{32} & a\,a_{33} \end{bmatrix}$

$\underline{a\,a_{11} + a\,a_{12} + a\,a_{13}} = a(a_{11}+a_{12}+a_{13}) = a(a_{11}+a_{21}+a_{31})$ pois $A \in W$

$= \underline{a\,a_{11} + a\,a_{21} + a\,a_{31}}$

Logo W é subespaço de $M_3(\mathbb{R})$.

Seja $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in W$ então $a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{11} + a_{21} + a_{31}$

$$\Longrightarrow a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{31}$$

Logo, por exemplo, $a_{12} = a_{21} + a_{31} - a_{13}$.

Assim $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \underbrace{a_{21} + a_{31} - a_{13}}_{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$a_{11} E_{11} + a_{21} (E_{12} + E_{21}) + a_{31} (E_{12} + E_{31})$$
$$+ a_{13} (-E_{12} + E_{13}) + a_{13} E_{13} + a_{21} E_{21} + a_{33} E_{33}.$$

Então W é gerado por

$[E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{12} + E_{31}, E_{13} - E_{12}, E_{22},$
$E_{23}, E_{32}, E_{33}]$

W é o espaço das soluções do "sistema"

$$a_{12} + a_{13} - a_{21} - a_{31} = 0$$

Temos um sistema com 9 variáveis e apenas 1 pivô. Então dim W = nº de variáveis livres = 8.

Logo dim $W = 8$ e uma base de W é

$W = \{E_{11}, E_{12} + E_{21}, E_{12} + E_{31}, E_{13} - E_{12}, E_{22}, E_{23},$
$E_{23}, E_{32}, E_{33}]$

(Um conjunto gerador com 8 vetores já é automaticamente LI em um espaço de dim 8.)

Mas é fácil ver diretamente que esse conjunto é LI.

(b) $V = \mathbb{R}^4$

$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1+x_4)^2 = (x_2+x_3)^2\}$

W não é subespaço de $\mathbb{R}^4$ pois

$u = (1, -1, -1, 1) \in W$ pois $(1+1)^2 = (-1-1)^2$

$v = (1, 2, 0, 1) \in W$ pois $(1+1)^2 = (2+0)^2$

$u+v = (2, 1, -1, 2)$

Mas $(2+2)^2 \neq (1+(-1))^2$.

(c) $V = P_3(\mathbb{R})$

$W = \{p(t) \mid 2p(1) = p(0)\}$

W é subespaço de $P_3(\mathbb{R})$ pois

(1) $0 \in W$

(2) Se $p(t)$ e $q(t) \in W \implies$

$2p(1) = p(0)$

$2q(1) = q(0)$

Logo, $2(p(1) + q(1)) = 2p(1) + 2q(1)$

$= p(0) + q(0)$.

(3) Se $a \in \mathbb{R}$ e $p(t) \in W$, então

$2(a\,p(1)) = a\,(2\,p(1)) = a\,p(0)$. //

$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

$p(0) = a_0$

$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$

A condição $2p(1) = p(0) \implies$

$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = a_0$

Assim

$$p(t) = (-2a_1 - 2a_2 - 2a_3) + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$= a_1(t-2) + a_2(t^2-2) + a_3(t^3-2)$$

Assim $\{t-2,\ t^2-2,\ t^3-2\}$ gera W.

É fácil ver que esse conjunto é LI!

(Se $a(t-2) + b(t^2-2) + c(t^3-2) = 0$,

então $ct^3 + bt^2 + at + (-2a-2b-2c) = 0$

$$\Rightarrow c = b = a = 0$$

$$\Rightarrow -2(a+b+c) = 0.$$

Uma base de W é então

$$\mathcal{B} = \{t-2,\ t^2-2,\ t^3-2\}.$$

2. **(1,0)** Determine uma base do subespaço $W \subset \mathbb{R}^4$, onde

$$W = [(1,2,-1,-2),(3,8,5,-1),(1,3,3,1),(1,1,1,1)].$$

2

$$W = [\underbrace{(1,2,-1,2)}_{w_1}, \underbrace{(3,8,5,-1)}_{w_2}, \underbrace{(1,3,3,1)}_{w_3}, \underbrace{(1,1,1,1)}_{w_4}]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L3 \leftrightarrow L3+L1 \\ L4 \leftrightarrow L4-2L1}]{L2 \leftrightarrow L2-2L1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L4 \leftrightarrow L4+L2}]{L3 \leftrightarrow L3-4L2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L4 \leftrightarrow 2L4-L2}]{\frac{L6}{6} \leftrightarrow L4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como há um pivô em cada coluna, os vetores são LI e portanto formam uma base de W.

$\dim W = 4$ e como $W \subset \mathbb{R}^4$

e $\dim \mathbb{R}^4 = 4 \implies W = \mathbb{R}^4$.

3. (1,5) Considere o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 16x_3 - 9x_4 &= 0 \end{cases}$$

Determine uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$ das soluções do sistema linear homogêneo.

A matriz do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & 16 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3 \leftrightarrow L3-4L2]{L2 \leftrightarrow L2-2L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & -7 \\ 0 & 3 & 24 & -21 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L3-3L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema original é equivalente a

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$$
$$x_2 + 8x_3 - 7x_4 = 0$$

Então $\boxed{x_2 = -8x_3 + 7x_4}$

$$x_1 = -x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 8x_3 - 7x_4 + 2x_3 - 3x_4$$

$$\boxed{x_1 = 10x_3 - 10x_4}$$

Fazemos $x_3 = s$, $x_4 = t$, $s, t \in \mathbb{R}$.

As soluções do sistema são

$$(10s - 10t, -8s + 7t, s, t) =$$

$$s(10, -8, 1, 0) + t(-10, 7, 0, 1)$$

O subespaço das soluções do sistema é gerado por $B = \{(10, -8, 1, 0), (-10, 7, 0, 1)\}$.

Como esses vetores são LI, B é uma base do subespaço.

4. **(3,0)** As afirmações a seguir são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**? Demonstre as que forem verdeiras. Quando a afirmação for falsa, exiba um contra-exemplo ou mostre que ela é falsa.

   (a) Se $W_1 = [(4,1,2,2),(1,1,2,3)] \subset \mathbb{R}^4$ e $W_2 = [(5,-1,-2,-5),(1,1,1,1)] \subset \mathbb{R}^4$ então $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

   (b) Seja V um espaço vetorial de dimensão maior ou igual a 4 e seja $S \subset V$, $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tal que os subconjuntos $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_3, v_4\}$, $\{v_2, v_3, v_4\}$, $\{v_1, v_2, v_4\}$, são LI. Então S é LI.

   (c) Seja $V = P_3(\mathbb{R})$. Então $[t^2-1, t^3-1] = [t^3-t^2, 2t^3+3t^2-5]$.

(a)

Seja $w \in W_1 \cap W_2$. Então

$$w = \underbrace{a(4,1,2,2)+b(1,1,2,3)}_{\in W_1} = \underbrace{c(5,-1,-2,-5)+d(1,1,1,1)}_{\in W_2}$$

Temos então o sistema

$$\begin{cases} 4a+b-5c-d=0 \\ a+b+c-d=0 \\ 2a+2b+2c-d=0 \\ 2a+3b+5c-d=0 \end{cases}$$

A matriz do sistema é

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L2 \leftrightarrow L1-4L2 \\ L3 \leftrightarrow L3-2L2 \\ L4-2L2}]{L1 \leftrightarrow L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-L2/3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L3-L2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é equivalente a

$$\begin{aligned} a + b + c - d &= 0 \\ b + 3c - d &= 0 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

$b = -3c$

$a = +3c - c = 2c$

$$\begin{aligned} w &= 2c(4,1,2,2) - 3c(1,1,2,3) \\ &= c(5,-1,-2,-5) \end{aligned}$$

$c[(8,2,4,4)-(3,3,6,9)] = c(5,-1,-2,-5)$

O vetor $(5,-1,-2,-5) \in W_1 \cap W_2$.
(e todos os seus múltiplos)

A afirmação é <u>FALSA</u>.

(b) A afirmação é <u>FALSA</u>.

Suponha que, em $\mathbb{R}^4$

$v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$, $v_3 = e_3$ e $v_4 = e_1 + e_2 + e_3$
$= (1,1,1,0)$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI $\quad$ $\{v_1, v_3, v_4\}$ é LI $\quad$ $\{v_2, v_3, v_4\}$ é LI

$\{v_1, v_2, v_4\}$ é LI

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_4 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} v_1 & v_3 & v_4 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \end{array}$$

Os 4 subconjuntos são LI, mas
$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é LD já que $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$.

(c) Sejam

$$S = \{\underbrace{t^2-1}_{f_1}, \underbrace{t^3-1}_{f_2}\} \text{ e } T = \{\underbrace{t^3-t^2}_{g_1}, \underbrace{2t^3+3t^2-5}_{g_2}\}$$

Mostrar que $S \subset [T]$ e
$T \subset [S]$.

$g_1 = 1f_2 + (-1)f_1 \in [S]$

$g_2 = 2f_2 + 3f_1 = 2t^3 - 2 + 3t^3 - 3$

Logo $T \subset [S]$. (1)

Mostrar que $S \subset [T]$

$f_1 = t^2 - 1 = \frac{1}{5}(2t^3 + 3t^2 - 5) - \frac{2}{5}(t^3 - t^2)$

$= \frac{1}{5}(5t^2 - 5)$

$f_2 = t^3 - 1 = \frac{1}{5}(2t^3 + 3t^2 - 5) - \frac{2}{5}(t^3 - t^2)$

$= \frac{5}{5}(5t^3 - 5)$

Logo $S \subset [T]$. (2)

De (1) e (2) temos que $[S] = [T]$.

VERDADEIRA.

5. **(1,5)** Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Sejam L_1, L_2, L_3 as linhas de A consideradas como vetores de $\mathbb{R}^3$ e C_1, C_2, C_3 as colunas de A consideradas como vetores de $\mathbb{R}^3$. Mostre que $[L_1, L_2, L_3] = [C_1, C_2, C_3]$.

Dê um exemplo de uma matriz 3×3 tal que o subespaço gerado por suas linhas é diferente do subespaço gerado por suas colunas.

$lin(A) = [(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)]$

$col(A) = [(1,4,7), (2,5,8), (3,6,9)]$

Note que $\underline{lin(A) = [(1,2,3), (1,1,1)]}$

pois $(4,5,6) - (1,2,3) = (3,3,3) = 3(1,1,1)$ (1)

Logo $(4,5,6) = (1,2,3) + 3(1,1,1)$. (2)

$(7,8,9) = (1,2,3) + 6(1,1,1)$ (3)

Por (1), $(1,2,3)$ e $(1,1,1) \in lin(A)$, logo $\underline{[(1,2,3),(1,1,1)] \subset lin(A)}$ (I)

por (2) e (3) temos que

$\underline{lin(A) \subset [(1,2,3), (1,1,1)]}$ (II)

De (I) e (II) temos a igualdade

Agora: $(2,5,8) - (1,4,7) = (1,1,1)$

$(1,4,7) - (1,1,1) = (0,3,6) = 3(0,1,2)$

$(0,1,2) + (1,1,1) = (1,2,3)$

$\Big\}$ (4)

De (4) temos que

$\underline{[(1,2,3), (1,1,1)] \subset col(A)}$ (III)

Agora: $(1,2,3) - (1,1,1) = (0,1,2) \in [(1,2,3),(1,1,1)]$

$(1,2,3) + 2(0,1,2) = (1,4,7)$

$(1,4,7) + (1,1,1) = (2,5,8)$

$(2,5,8) + (1,1,1) = (3,6,9)$

Logo $\underline{col(A) \subset [(1,2,3), (1,1,1)]}$ IV

De (III) e (IV) temos que $col(A) = [(1,2,3),(1,1,1)]$

Logo $col(A) = lin(A)$

Exemplo:

Tome $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Note que $lin(A) = [(1,1,1)]$
$col(A) = [(1,2,3)]$

$(1,2,3)$ não é múltiplo de $(1,1,1)$

Logo $lin(A) \neq col(A)$.

MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear

1ª Prova - 07/11/2020

Atenção:

1 - Leia os enunciados com atenção!
2 - Justifique cuidadosamente todas as suas afirmações.
3 - Boa prova!

1. **(3,0)** Verifique se cada um dos subconjuntos W é ou não um subespaço do espaço vetorial V. JUSTIFIQUE. Nos casos em que W é um subespaço de V, determine a dimensão de W exibindo uma base de W.

   (a) $V = M_3(\mathbb{R})$ e W é o conjunto das matrizes $A \in V$ tais que a soma dos elementos da terceira linha de A é igual à soma dos elementos da terceira coluna de A.

   (b) $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1 + x_2)^2 = (x_3 + x_4)^2\}$.

   (c) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $W = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(1) = 2p(0)\}$.

Totalmente análogo ao exercício 1 do outro tipo de prova.

2. (1,0) Determine uma base do subespaço $W \subset \mathbb{R}^4$, onde

$$W = [(1,3,-1,-3),(5,12,1,0),(1,2,1,2),(1,1,1,1)].$$

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 12 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L4 \leftrightarrow L4+L2]{L2-3L1 \leftrightarrow L2,\ L3 \leftrightarrow L3+L1} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & 2 \\ 0 & 12 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L4+4L2]{(-1)L2,\ L3+2L2} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[L4 \leftrightarrow L4-3L3]{-\frac{1}{2}L3 \leftrightarrow L3} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os vetores $\{v_1, v_2, v_4\}$ são LI e então esse conjunto é um base de W.

3. **(1,5)** Considere o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \end{cases}$$

Determine uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$ das soluções do sistema linear homogêneo.

A matriz do sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3-4L1]{L2 \leftrightarrow L2-2L1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema equivalente é então:

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$$
$$x_2 + 7x_3 - 10x_4 = 0$$

$$x_2 = -7x_3 + 10x_4$$

$$x_1 = -x_2 + 2x_3 - 3x_4$$
$$= 7x_3 - 10x_4 + 2x_3 - 3x_4$$
$$= 9x_3 - 13x_4$$

$$x_1 = 9x_3 - 13x_4$$

Fazemos $x_3 = s$, $x_4 = t$, $s, t \in \mathbb{R}$.

Assim, as soluções do sistema são

$$(9s - 13t, -7s + 10t, s, t)$$
$$= s(9, -7, 1, 0) + t(-13, 10, 0, 1), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$S = \{(9, -7, 1, 0), (-13, 10, 0, 1)\}$ gera o espaço das soluções do sistema, e como S é LI, é uma base do espaço das soluções do sistema

4. **(3,0)** As afirmações a seguir são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**? Demonstre as que forem verdeiras. Quando a afirmação for falsa, exiba um contra-exemplo ou mostre que ela é falsa.

   (a) Se $W_1 = [(1,1,2,2),(2,2,3,3)] \subset \mathbb{R}^4$ e $W_2 = [(5,-1,-2,-5),(1,1,1,1)] \subset \mathbb{R}^4$ então $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

   (b) Seja V um espaço vetorial de dimensão maior ou igual a 4 e seja $S \subset V$, $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
   Então S é LI se, e somente se, $T = \{v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3, v_1+v_2+v_3+v_4\}$ é LI.

   (c) Seja $V = P_3(\mathbb{R})$. Então $[t-1, t^3-1] = [t^3-t, t^3+3t-4]$.

(a) Seja $w \in W_1 \cap W_2$. Então $\exists\, a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tais que

$$w = \underbrace{a(1,1,2,2) + b(2,2,3,3)}_{\in W_1}$$
$$= \underbrace{c(5,-1,-2,-5) + d(1,1,1,1)}_{\in W_2}.$$

Logo,
$$\begin{cases} a + 2b - 5c - d = 0 \\ a + 2b + c - d = 0 \\ 2a + 3b + 2c - d = 0 \\ 2a + 3b + 5c - d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L4 \leftrightarrow L4 - L1 \\ L4 - L3}]{L2 \leftrightarrow L2 - L1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{6}L2 \leftrightarrow L3 \\ (-1) \\ L4 - L3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L4 - 3L3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -12 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema equivalente é

$$a + 2b - 5c - d = 0$$
$$b - 12c - d = 0$$
$$c = 0$$

Logo $b = d$

$a = -2b + d = -d$

$-d(1,1,2,2) + d(2,2,3,3) = d(1,1,1,1)$

$d(1,1,1,1) \in W_1 \cap W_2 \quad \forall d \in \mathbb{R}$. A afirmação é **FALSA**

Aí era bem fácil: Só ver que $(2,2,3,3) - (1,1,2,2) = (1,1,1,1)$

(b)

($\Rightarrow$) Suponha que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é LI

Suponha que $a\underbrace{v_1}_{u_1} + b\underbrace{(v_1+v_2)}_{u_2} + c\underbrace{(v_1+v_2+v_3)}_{u_3} +$

$d\underbrace{(v_1+v_2+v_3+v_4)}_{u_4} = 0$

$\Rightarrow (a+b+c+d)v_1 + (b+c+d)v_2 + (c+d)v_3 + d\,v_4 = 0$

Como $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é LI, temos que

$d = 0$ $\qquad$ $b+c+d = 0 \Rightarrow b = 0$

$c+d = 0 \Rightarrow c = 0$ $\qquad$ $a+b+c+d = 0 \Rightarrow a = 0$

Logo $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ é LI.

Agora suponha que

$\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ é LI HIPÓTESE

Note que
$$\left.\begin{array}{l} u_4 - u_3 = v_4 \\ u_3 - u_2 = v_3 \\ u_2 - u_1 = v_1 \\ u_1 = v_1 \end{array}\right\} (*)$$

TESE Mostrar que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é LI.

Suponha que $av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = 0$

Usando (*) temos que

$au_1 + b(u_2 - u_1) + c(u_3 - u_2) + d(u_4 - u_3) = 0$

Logo $(a-b)u_1 + (b-c)u_2 + (c-d)u_3 + du_4 = 0$

Pela hipótese:
$$\left.\begin{array}{l} a-b = 0 \\ b-c = 0 \\ c-d = 0 \\ d = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = b = c = d = 0.$$

Assim, a afirmação é VERDADEIRA.

(c) Seja $S = \{\underbrace{t-1}_{f_1}, \underbrace{t^3-1}_{f_2}\}$

$T = \{\underbrace{t^3 - t}_{g_1}, \underbrace{t^3+3t-4}_{g_2}\}$

Mostrar que $S \subset [T]$ e $T \subset [S]$.

$g_1 = f_2 - f_1 \in [S]$

$g_2 = t^3 - 1 + 3(t-1) = f_2 + 3f_1 \in [S]$.

Logo $T \subset [S]$. (1)

$f_1 = \frac{1}{4}(g_2 - g_1) = \frac{1}{4}(4t-4) \Rightarrow f_1 \in [T]$.

$f_2 = \frac{1}{4}(\underbrace{3t^3 - 3t}_{g_1} + \underbrace{t^3 + 3t - 4}_{g_2}) = \frac{1}{4}(4t^3 - 4)$

$f_2 = \frac{3}{4}g_1 + \frac{1}{4}g_2 \in [T]$.

Logo $S \subset [T]$. (2)

De (1) e (2), $[S] = [T]$.

A afirmação é VERDADEIRA.

5. (**1,5**) Seja

18

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Sejam $L_1, L_2, L3$ as linhas de A consideradas como vetores de $\mathbb{R}^3$ e C_1, C_2, C_3 as colunas de A consideradas como vetores de $\mathbb{R}^3$. Mostre que $[L_1, L_2, L_3] = [C_1, C_2, C_3]$.

Dê um exemplo de uma matriz 3×3 tal que o subespaço gerado por suas linhas é diferente do subespaço gerado por suas colunas.

Solução idêntica à da outra prova