Coordenadas de um vetor em relação a uma base

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n.
Seja $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V. Então
(1) $[B] = V$ e (2) B é LI.

Seja $v \in V$. Então existem $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que
$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ já que $v \in [B] = V$.

Afirmamos que os escalares $a_1, \dots, a_n$ são únicos, isto é,
se $v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$, então $a_i = b_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

De fato:

Se $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$ então

$$(a_1 - b_1) v_1 + (a_2 - b_2) v_2 + \dots + (a_n - b_n) v_n = 0$$

Como B é LI, temos que $a_i - b_i = 0 \ \forall\, i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow a_i = b_i, \ i = 1, \dots, n$

Se $v \in V$, $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, então $(a_1, \dots, a_n)$ são as COORDENADAS de v em relação à base B.

OBSERVAÇÃO:

Costumamos escrever $B = \{v_1, ---, v_n\}$, mas o mais correto seria escrever $B = (v_1, ---, v_n)$, um n-upla ORDENADA de vetores, pois para determinar as coordenadas de um vetor $v \in V$ em relação a uma base importa a ordem em que os vetores estão escritos.

Exemplo: O conjunto $\{e_1, e_2\} = \{e_2, e_1\} \subset \mathbb{R}^2$, mas as bases $B_1 = (e_1, e_2)$ e $B_2 = (e_2, e_1)$ são diferentes.

$$(1,2) \in \mathbb{R}^2 = 1e_1 + 2e_2 = 2e_2 + 1e_1$$

Ou seja (1, 2) são as coordenadas de (1, 2) em relação a B_1
(2, 1) são as coordenadas de (1, 2) em relação a B_2.

Vamos SEMPRE pensar que a base $B = \{v_1, ---, v_n\} = (v_1, ---, v_n)$ quando formos falar em coordenadas de um vetor em relação a uma base. Ou seja sempre a base B é ordenada.

Então se $B = \{v_1, ---, v_n\}$ é uma base de V e $v = a_1 v_1 + --- + a_n v_n$, dizemos $(v)_B = (a_1, ---, a_n)$.

Muitas vezes será importante pensar $[v]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

Quando escrevermos $\underset{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\underset{\parallel}{(v)_B}}$ ou $[v]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ isso

significa que (é equivalente a) $\Longleftrightarrow$

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

$$\boxed{(v)_B = (a_1, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n}$$

<u>Exemplo</u>:

Sejam $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (1, 2)$ e $B = \{v_1, v_2\}$ base de $\mathbb{R}^2$

Escreva um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) = v$ $(v)_B$

$$(x, y) = a(1, 1) + b(1, 2)$$

$$\left\{\begin{array}{l} a + b = x \\ a + 2b = y \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} a + 2b - (a + b) = y - x \\ \Rightarrow b = y - x \\ a = x - b = x - (y - x) = 2x - y \end{array}$$

Logo $(v)_B = (2x - y, y - x) = (2x - y)v_1 + (y - x)v_2$

PROPOSIÇÃO: Um conjunto $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V se, e somente se, todo vetor $v \in V$ se escreve de modo único como combinação linear de B.

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Já fizemos.

($\Longleftarrow$) (1) $[B] = V$, já que todo vetor $v \in V$ se escreve como CL dos vetores de B.

(2) B é LI.

Suponha que $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$.

$0 = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$

0 se escreve de MODO ÚNICO como CL de B

Logo $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n$

$\Longrightarrow a_i = 0 \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n$.