Mecânica I – PME3100

Aula 22
Capítulo 11 – Momentos e Produtos de Inércia

11.1 – Momento de Inércia

Considere um sistema $\boldsymbol{S}$ de pontos materiais $\boldsymbol{P_i}$, de massas $\boldsymbol{m_i}$.

Chama-se *momento de inércia* de $\boldsymbol{S}$, em relação a reta $\boldsymbol{r}$, ao escalar

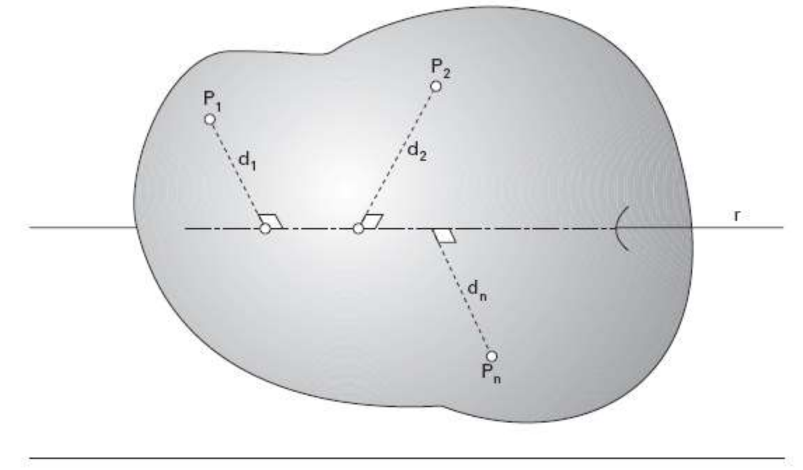


Figura 11.1

$$J_r = \sum_i m_i d_i^2$$

Fonte: França, L. N. F. e Matsumura, A. Z. 2011, ***Mecânica Geral***, 3ª edição, Editora Edgard Blücher Ltda.

Chama-se *raio de inércia* ou raio de giração de $\boldsymbol{S}$, em relação a reta $\boldsymbol{r}$, ao escalar i_r

$$\boxed{J_r = M i_r^2} \quad \text{com} \quad \boxed{M = \sum_i m_i}$$

No caso de sistema contínuo, o somatório deve ser substituído por uma integral conveniente.

Exemplos 1 e 2

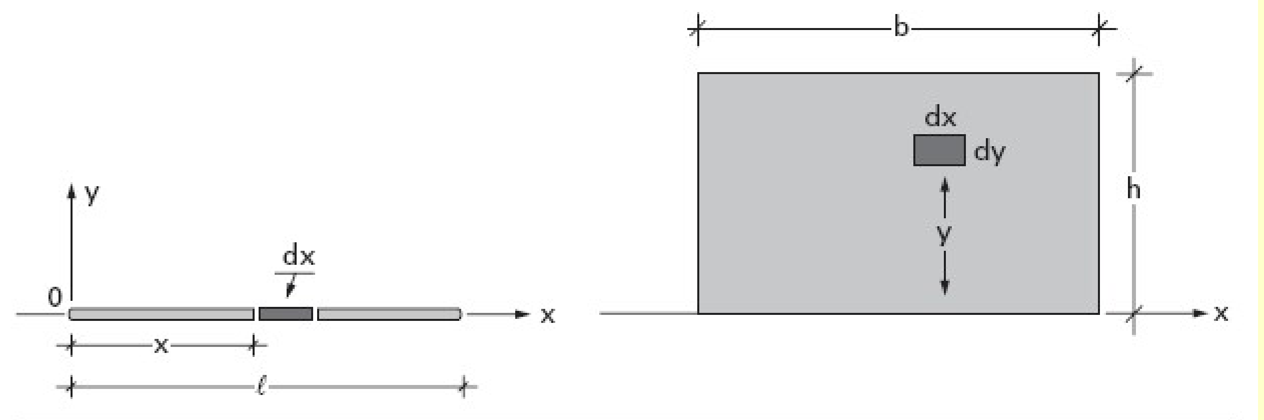


Figura 11.2 – Momento de inércia de barra e de retângulo

11.1.1 – Sistemas Planos

(x_i, y_i, z_i) $\Rightarrow$ coordenadas de $\boldsymbol{P_i}$ em relação ao referencial ortogonal *Oxyz*. Os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados serão:

$$J_x = \sum_i m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right) \qquad J_y = \sum_i m_i\left(x_i^2 + z_i^2\right) \qquad J_z = \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

No caso particular de todos os pontos de S pertencerem ao plano *Oxy*, tem-se $z_i = 0$, decorrendo

$$\boxed{J_z = J_x + J_y}$$

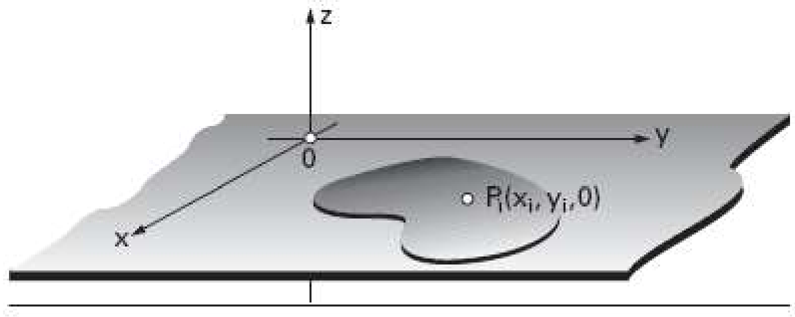


Figura 11.3 *Sistema no plano Oxy*

11.1.2 – Translação de Eixos para Momentos de Inércia

Considere como nova origem o baricentro ***G*** de ***S***

(a, b, c) $\Rightarrow$ coordenadas de ***G***

$(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ $\Rightarrow$ coordenadas de $\boldsymbol{P_i}$ no sistema que tem origem em ***G*** e eixos paralelos, com mesmas orientações que *Ox*, *Oy* e *Oz*.

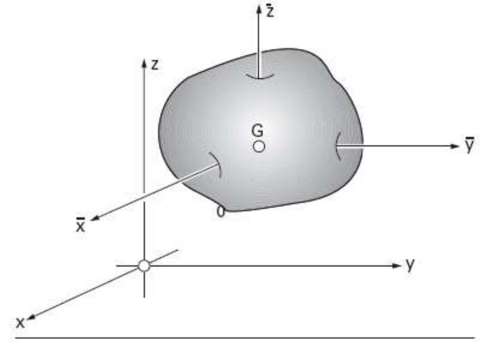


Figura 11.4 – Translação de eixos

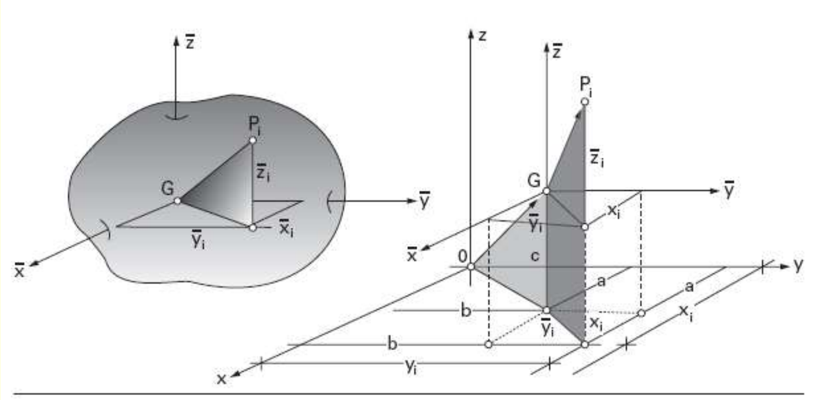


Figura 11.5

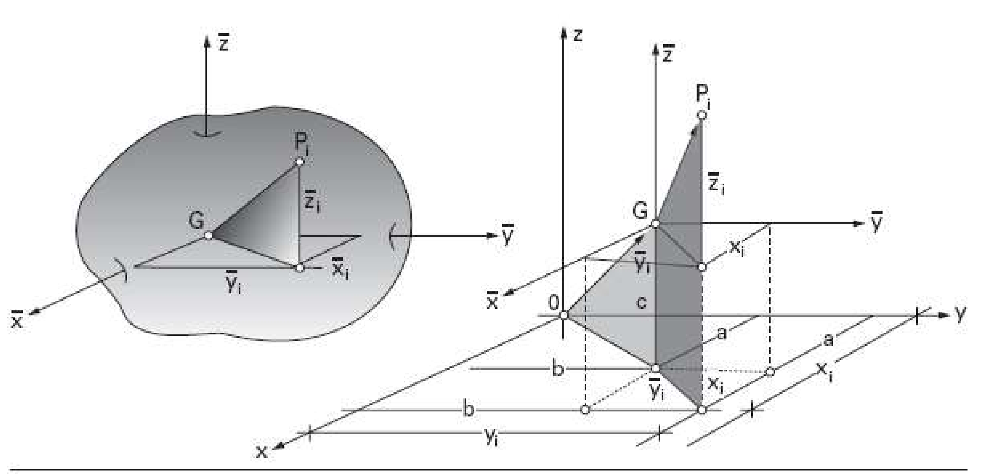


Figura 11.5

$$x_i = x_G + \bar{x}_i \qquad y_i = y_G + \bar{y}_i \qquad z_i = z_G + \bar{z}_i$$

$$x_i = a + \bar{x}_i \qquad y_i = b + \bar{y}_i \qquad z_i = c + \bar{z}_i$$

Por outro lado, sendo ***G*** o baricentro de ***S***, tem-se:

$$\sum_i m_i(P_i - G) = \bar{0}$$

decorrendo

$$\sum_i m_i(x_i - x_G) = \sum_i m_i\bar{x}_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_i m_i\bar{y}_i = 0 \quad \sum_i m_i\bar{z}_i = 0$$

Já vimos que:

$$J_x = \sum_i m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right)$$

trabalhando a equação acima, resulta em

$$J_x = m(b^2 + c^2) + J_{\bar{x}}$$

ou

$$\boxed{J_x = J_{\bar{x}} + m d_{x\bar{x}}^2}$$

Teorema de Steiner

$$J_x = m(b^2 + c^2) + J_{\bar{x}} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{J_x = J_{\bar{x}} + m d_{x\bar{x}}^2}$$

$d_{x\bar{x}}^2 \Rightarrow$ distância entre os eixos paralelos Ox e $G_{\bar{x}}$

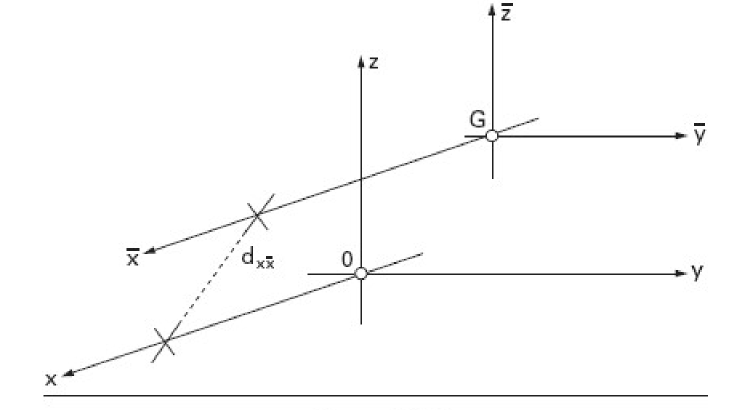


Figura 11.6

Do Teorema de Steiner: $J_x > J_{\bar{x}}$ $\Rightarrow$ Considerando um conjunto de retas paralelas, no espaço, o momento de inércia de ***S*** é mínimo em relação àquela reta que passa por ***G***.

11.2 – Produtos de Inércia

Chamam-se *produtos de inércia* do sistema material ***S***, em relação aos eixos *OxOy* , *OyOz* e *OzOx* do sistema ortogonal *Oxyz*, os escalares:

$$J_{xy} = J_{yx} = \sum_i m_i x_i y_i \qquad J_{yz} = J_{zy} = \sum_i m_i y_i z_i \qquad J_{xz} = J_{zx} = \sum_i m_i x_i z_i$$

11.2.1 – Simetria em Produtos de Inércia

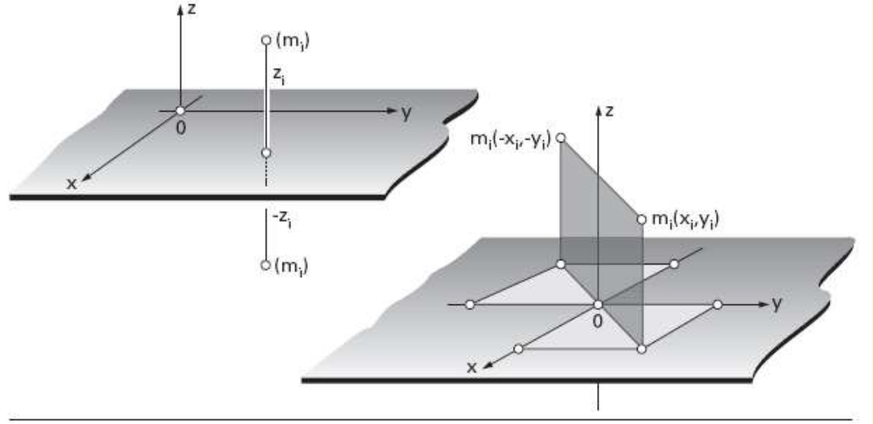


Figura 11.8 – Propriedades de simetria

a) ***S*** possui simetria material em relação ao plano *Oxy*

$$J_{xz} = \sum_i m_i x_i z_i = 0$$

$$J_{yz} = \sum_i m_i y_i z_i = 0$$

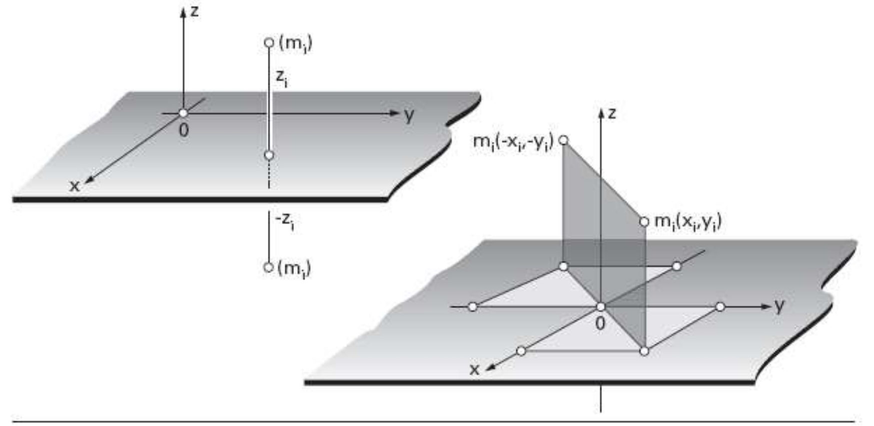


Figura 11.8 – *Propriedades de simetria*

b) ***S*** possui simetria material em relação ao eixo *Oz*

$$J_{xz} = \sum_i m_i x_i z_i = 0$$

$$J_{yz} = \sum_i m_i y_i z_i = 0$$

Sistemas Planos

Se todas as massas de ***S*** pertencerem ao plano *Oxy*, temos

$$\boxed{J_{xz} = J_{yz} = 0}$$

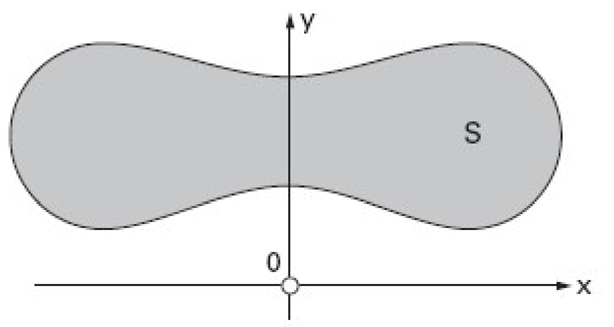


Figura 11.9 – Sistema plano com simetria

Se, além disso, um dos eixos, *Ox* ou *Oy*, for também, de simetria material, temos

$$\boxed{J_{xy} = 0}$$

11.2.2 Translação de Eixos para Produtos de Inércia

Considere como nova origem o baricentro ***G*** de ***S***

Usando desenvolvimento feito no item 11.1.2

$$x_i = x_G + \bar{x}_i$$

$$x_i = a + \bar{x}_i$$

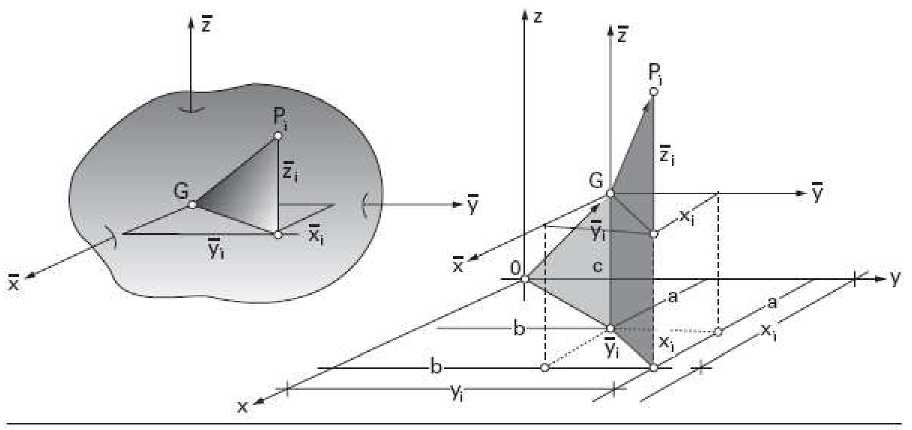


Figura 11.10 – *Translação de eixos*

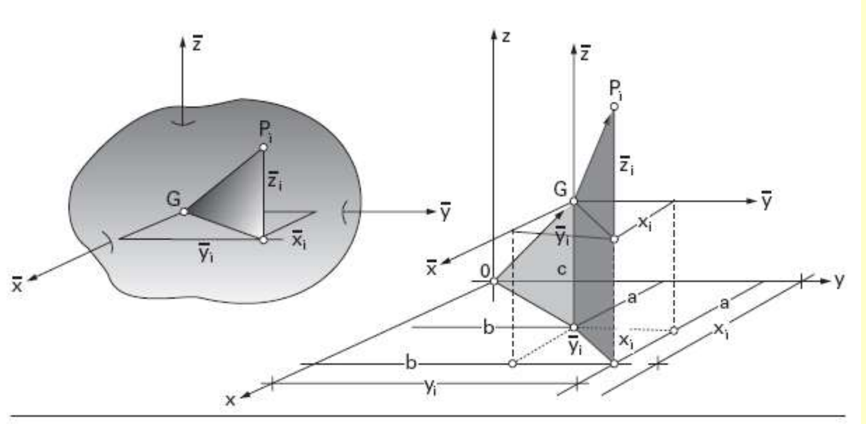


Figura 11.10 – Translação de eixos

$$J_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i = \sum_i m_i ab + \sum_i m_i a\bar{y}_i + \sum_i m_i b\bar{x}_i + \sum_i m_i \bar{x}_i \bar{y}_i$$

ou

$$\boxed{J_{xy} = J_{\bar{x}\bar{y}} + mab}$$ (idem para os outros eixos)

11.4 – Matriz de Inércia e Eixos Principais

Definição: *Matriz de Inércia* de ***S***, em relação a um referencial ortogonal *Oxyz* é a matriz simétrica

$$I_O = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix}$$

Propriedades: a) $J_r = \bar{u}^T I_O \bar{u}$ Momento de inércia do sistema em relação à reta ***r***

com

$$\bar{u} = \cos\alpha\,\bar{\imath} + \cos\beta\,\bar{\jmath} + \cos\gamma\,\bar{k}$$

$\bar{u}$ $\Rightarrow$ versor de ***r*** com origem em O

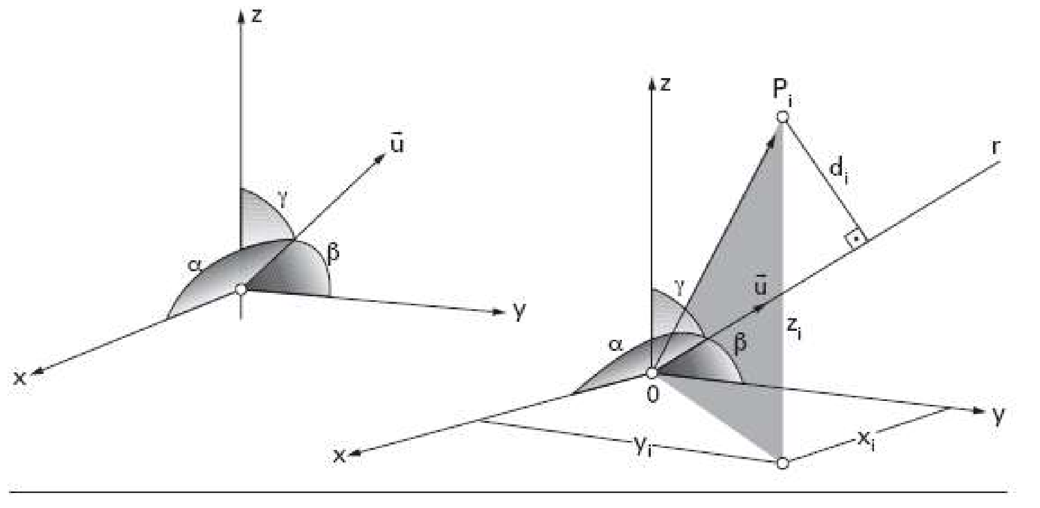


Figura 11.12

Propriedades: b) fixada arbitrariamente a origem *O*, existe, associado a qualquer sistema material ***S***, um referencial ortogonal *OXYZ*, para o qual

$$J_{XY} = J_{YZ} = J_{XZ} = 0$$

Os eixos deste referencial são chamados *eixos principais de inércia* em relação a *O*.

Os momentos de inércia correspondentes J_X, J_Y e J_Z são chamados *momentos principais de inércia*.

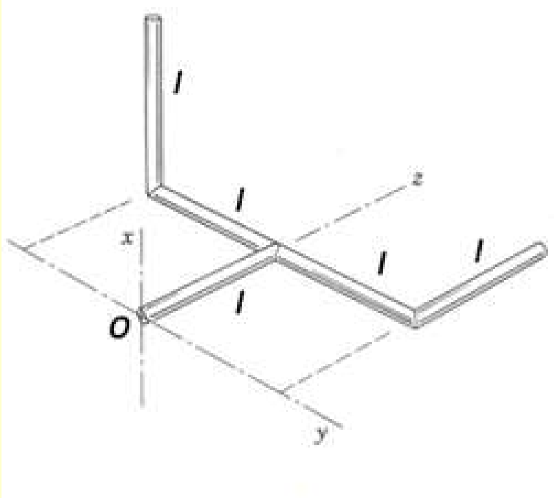
Quando $O = G$ de ***S***, os eixos principais de inércia são chamados *eixos centrais de inércia*.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE MINAS E DE PETRÓLEO
PME2100 – MECÂNICA A
3ª PROVA – 18/06/2014
PROF. RONALDO CARRION

Questão 1 (2,0 pontos) – As barras delgadas, metálicas, são soldadas de acordo com a configuração mostrada. A massa de cada segmento é ***m*** e o comprimento é ***l***. Usando o sistema de coordenadas mostrado, determine:

a) Os momentos de inércia J_{Oy} J_{Ox} e J_{Oz} do sólido,

b) O produto de inércia J_{Oxz} do sólido.



Questão 1

este exercício não está no site da disciplina

PERGUNTAS?