MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução (Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

Julho 2011

5 Equação de Laplace Bidimensional **420**
5.1 Equação de Laplace num Retângulo . . . 420
5.1.1 Apenas $k(y)$ não Nula . . . 421
5.1.2 Apenas $h(y)$ não Nula . . . 428
5.1.3 Caso Geral . . . 434
Exercícios . . . 437
5.2 Equação de Laplace numa Faixa Semi-infinita . . . 440
Exercícios . . . 448
5.3 Equação de Laplace em Regiões Circulares . . . 449
Exercícios . . . 457
5.4 Respostas dos Exercícios . . . 467

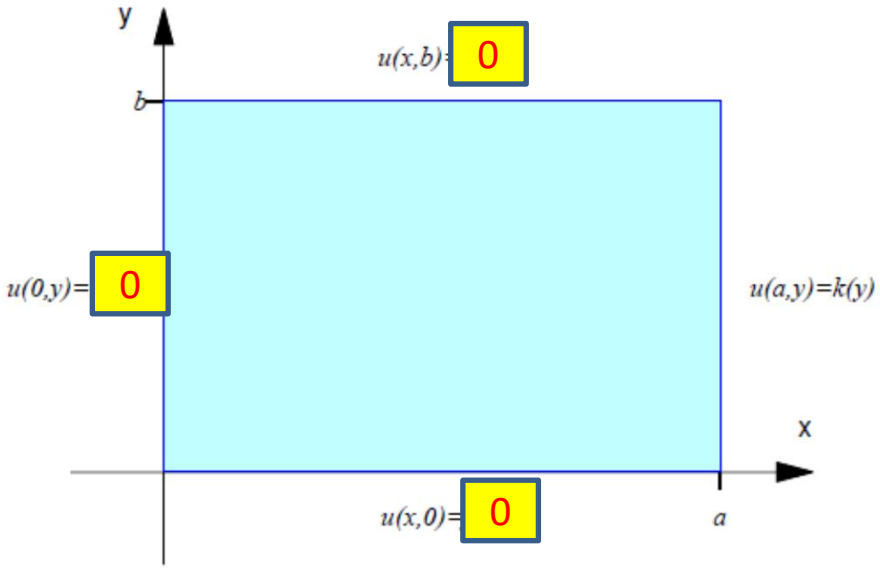


Figura 5.1 – Retângulo onde é resolvido o problema de Dirichlet

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{b}.$$

$$c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b k(y) \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Os coeficientes da série de senos de k(y)

$$b_n = c_n \sinh\frac{n\pi a}{b}$$

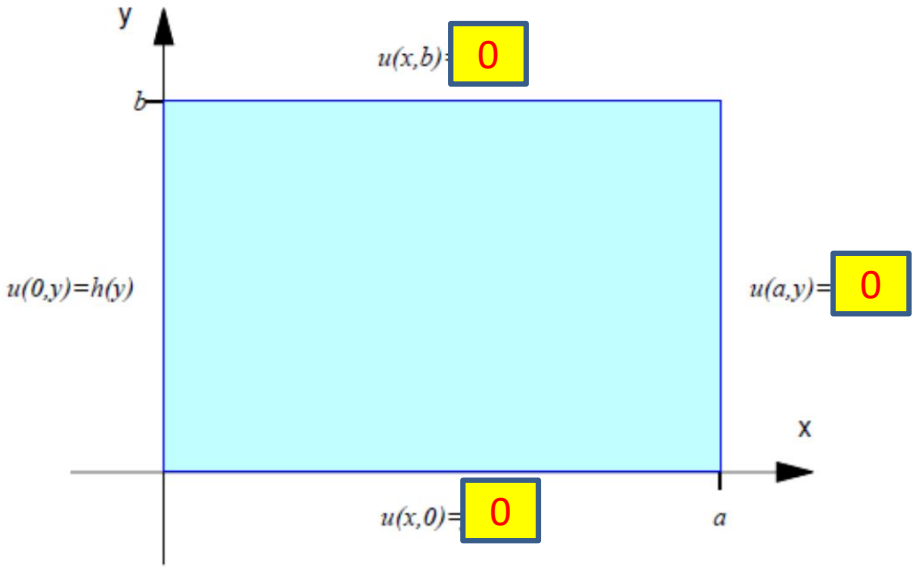


Figura 5.1 – Retângulo onde é resolvido o problema de Dirichlet

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}(a-x)\right)$$

$$c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b h(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Os coeficientes da série de senos de h(y)

$$b_n = c_n \sinh \frac{n\pi a}{b}$$

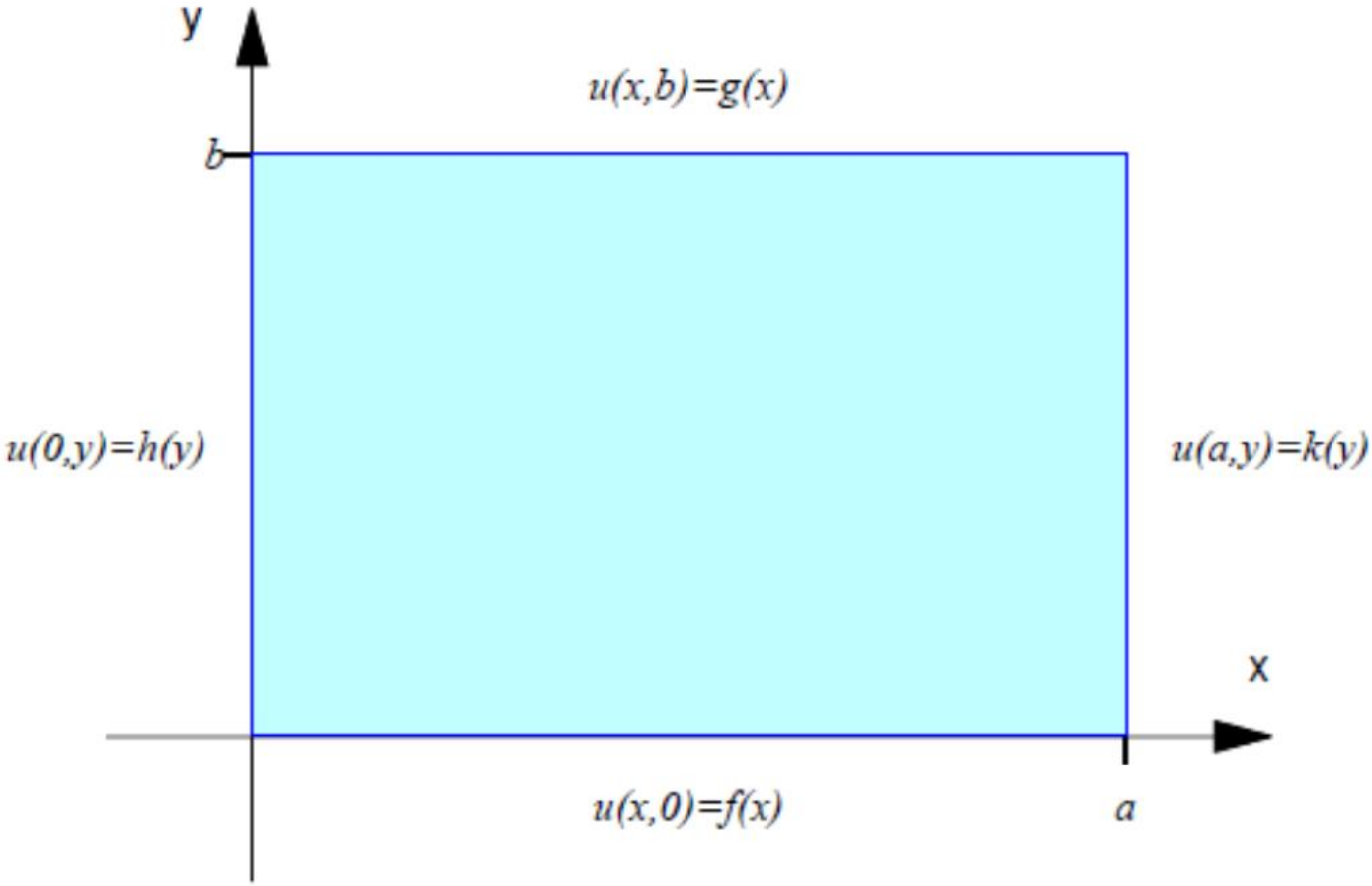


Figura 5.1 – Retângulo onde é resolvido o problema de Dirichlet

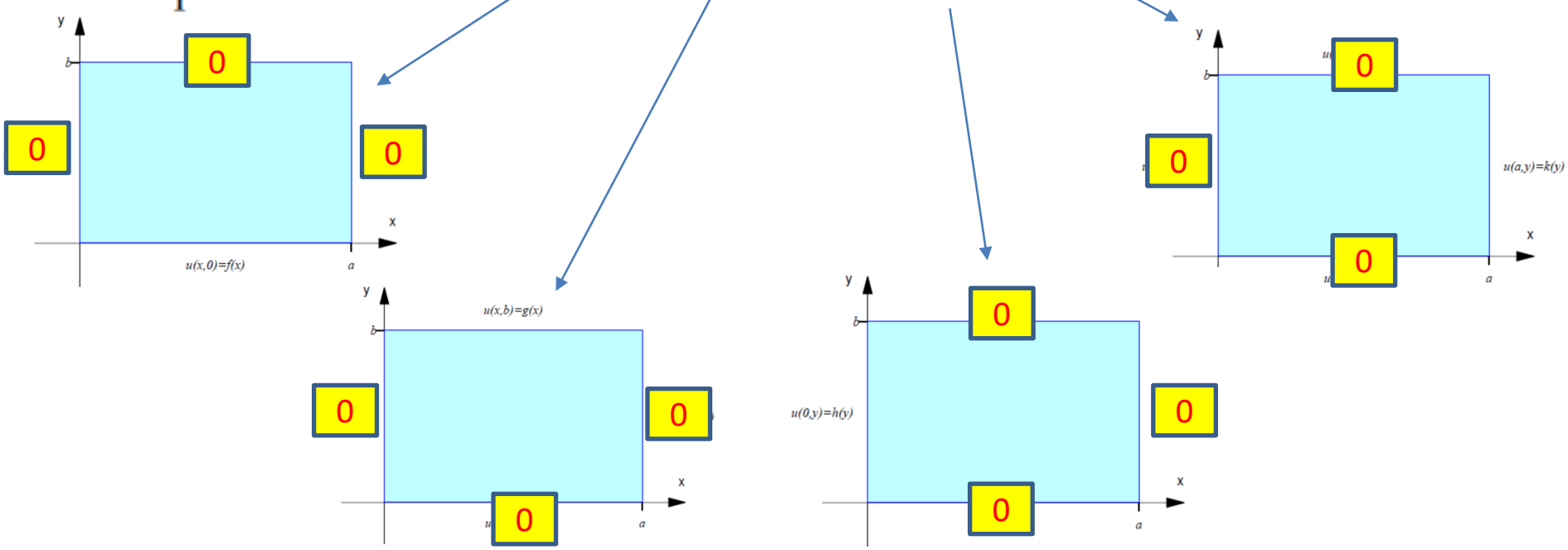
5.1.3 Caso Geral

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ u(0,y) = h(y),\ u(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

Como dissemos anteriormente a solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ não nulas, que denotamos por $u^{(f)}(x,y)$, $u^{(g)}(x,y)$, $u^{(h)}(x,y)$ e $u^{(k)}(x,y)$, respectivamente. Ou seja,

$$u(x,y) = u^{(f)}(x,y) + u^{(g)}(x,y) + u^{(h)}(x,y) + u^{(k)}(x,y).$$

em que



em que

$$u^{(f)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(f)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi(b-y)}{a}$$

$$u^{(g)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(g)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}$$

$$u^{(h)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(h)} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi(a-x)}{b}$$

$$u^{(k)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b}$$

com coeficientes dados por

$$c_n^{(f)} \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$c_n^{(g)} \operatorname{senh} \frac{n\pi}{a} b = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} dx, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$c_n^{(h)} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

$$c_n^{(k)} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b k(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Coeficientes da série de senos das funções associadas as respectivas condições de contorno

Problema (I):

(a) Encontre a solução para o problema de Dirichlet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad 0 \leq \mathrm{x} \leq 1,\ 0 \leq \mathrm{y} \leq 1$$

$$u(x,0) = T_f, \qquad u(x,1) = T_g$$

$$u(0,y) = T_h, \qquad u(1,y) = T_k$$

(b) Calcule uma estimativa da temperatura no centro do domínio

$$u(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = ?$$

Solução (I):

(a) A solução para o problema de Dirichlet é obtida identificando os parâmetros do domínio, no caso $a = b = 1$, e como em todos os lados as condições são constantes pode-se encontrar o coeficiente da série de senos de uma solução constante conforme a tabela.

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f : [-L, L] \to \mathbb{R}, -1 \leq c < d \leq 1$	$a_n(f, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt$	$b_n(f, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt$
$f_{c,d}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(0)}, L) = d - c$ $a_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}\,s\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = -\frac{1}{n\pi}\cos s\Big\|_{n\pi c}^{n\pi d}$

$$b_n = 2 * T^{(o)} * \left(-\frac{1}{n\pi}\cos s\Big|_0^{n\pi}\right) = \frac{2T^{(o)}(1-\cos n\pi)}{n\pi} = \frac{2T^{(o)}[1-(-1)^n]}{n\pi}$$

$$b_n = \frac{2T^{(o)}[1-(-1)^n]}{n\pi}$$

Perceba que apenas os termos ímpares são não nulos:

$$b_k = \frac{4T^{(o)}}{(2k+1)\pi} \qquad , k = 0,1,2 \cdots$$

Como $a = b = 1$, temos:

$$b_n = c_n \sinh\frac{n\pi a}{b} = c_n \sinh\frac{n\pi b}{a} = c_n \sinh n\pi$$

portanto

$$c_n = \frac{b_n}{\sinh n\pi}$$

Substituindo, o coeficientes da série de senos e ajustando a indexação para considerar apenas os termos não nulos.

$$c_k = \frac{4T^{(o)}}{(2k+1)\pi \sinh(2k+1)\pi} \qquad , k = 0,1,2 \cdots$$

A solução é dada por:

$$u(x,y) = u^{(f)}\,(x,y) + u^{(g)}\,(x,y) + u^{(h)}\,(x,y) + u^{(k)}\,(x,y)$$

Onde:

$$u^{(f)}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(f)} \sin(2k+1)\pi x \cdot \sinh(2k+1)\pi(1-y)$$

$$u^{(g)}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(g)} \sin(2k+1)\pi x \cdot \sinh(2k+1)\pi y$$

$$u^{(h)}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(h)} \sin(2k+1)\pi y \cdot \sinh(2k+1)\pi(1-x)$$

$$u^{(k)}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(k)} \sin(2k+1)\pi y \cdot \sinh(2k+1)\pi x$$

Os coeficientes são por:

$$c_k = \frac{4T^{(o)}}{(2k+1)\pi \sinh(2k+1)\pi} \qquad , k = 0,1,2 \cdots$$

(o)=(f),(g),(h) e (k) respectivamente

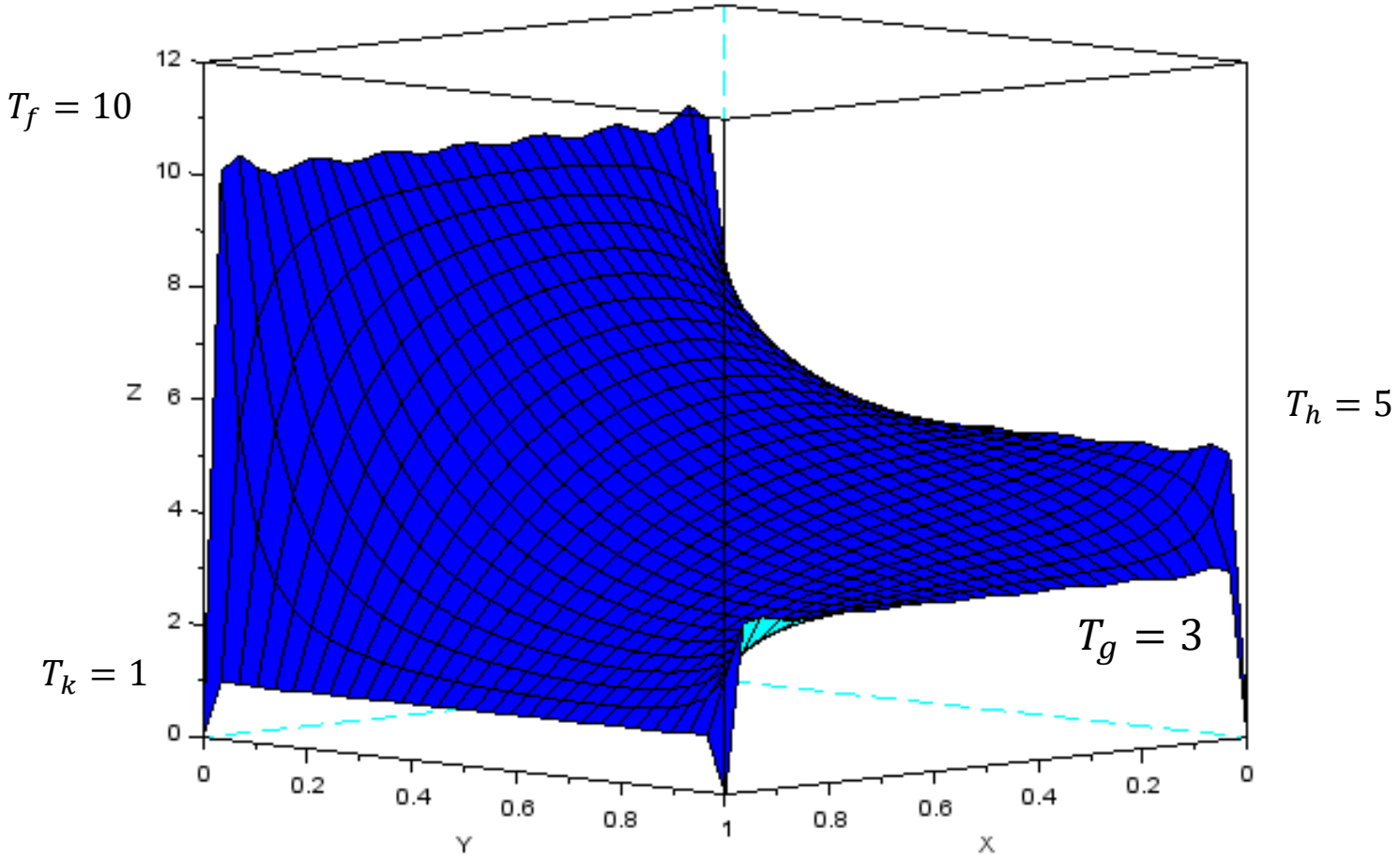
Segmento [0,1] dividido em 30 partes

$$T_f = 10, \quad T_g = 3$$
$$T_h = 5, \quad T_k = 1$$

```
t=linspace(0,1,30);
Ts=10;
Tn=3;
To=5;
Tl=1;
function z=my_surface(x, y)
n=50;
z=0;
for k=0:n
uf =(sin((2*k+1)*%pi*x)*sinh((2*k+1)*%pi*(1-y)))/((2*k+1)*%pi*sinh((2*k+1)*%pi))
ug =(sin((2*k+1)*%pi*x)*sinh((2*k+1)*%pi*y))/((2*k+1)*%pi*sinh((2*k+1)*%pi))
uh =(sin((2*k+1)*%pi*y)*sinh((2*k+1)*%pi*(1-x)))/((2*k+1)*%pi*sinh((2*k+1)*%pi))
uk = (sin((2*k+1)*%pi*y)*sinh((2*k+1)*%pi*x))/((2*k+1)*%pi*sinh((2*k+1)*%pi))
z=z+4*Ts*uf +4*Tn*ug+4*To*uh +4*Tl*uk;
end
endfunction

z=feval(t,t,my_surface);
plot3d(t,t,z);
```

50 primeiros termos não-nulos da série

Saída gráfica



(b) Estimando o valor no centro do domínio usando apenas 1 termo, ou seja k = 0

$$u^{(f)}(x,y) = c_0^{(f)} \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sinh\frac{\pi}{2}$$
$$u^{(g)}(x,y) = c_0^{(g)} \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sinh\frac{\pi}{2}$$
$$u^{(h)}(x,y) = c_0^{(h)} \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sinh\frac{\pi}{2}$$
$$u^{(k)}(x,y) = c_0^{(k)} \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sinh\frac{\pi}{2}$$

Os coeficientes são por:

$$c_0 = \frac{4T^{(o)}}{\pi \sinh \pi}$$

onde (o)=(f),(g),(h) e (k) respectivamente

$$u(x,y) = \left(T^{(f)} + T^{(g)} + T^{(h)} + T^{(k)}\right) \frac{4 \sinh\frac{\pi}{2}}{\pi \sinh \pi}$$

Avaliando o termo numérico $\dfrac{4 \sinh\frac{\pi}{2}}{\pi \sinh \pi} \sim \dfrac{1}{4}$

O valor no centro é aproximadamente a média dos contornos

Problema (II): Encontre a solução para o problema de Dirichlet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad\qquad 0 \leq \mathrm{x} \leq 1,\ 0 \leq \mathrm{y} \leq 1$$

$$u(x,0) = T_f + a_f x, \qquad u(x,1) = T_g + a_g x$$

$$u(0,y) = T_h + a_h y, \qquad u(1,y) = T_k + a_k y$$

Solução (II):

(a) A solução para o problema de Dirichlet é obtida identificando os parâmetros do domínio, no caso $a = b = 1$, e como em todos os lados as condições são lineares pode-se encontrar o coeficiente da série de senos de uma solução linear conforme a tabela.

Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f : [-L, L] \to \mathbb{R}, -1 \leq c < d \leq 1$	$a_n(f, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt$	$b_n(f, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt$
$f_{c,d}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(0)}, L) = d - c$ $a_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}\,s\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(0)}, L) = -\frac{1}{n\pi}\cos s\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f_{c,d}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f_{c,d}^{(1)}, L) = \frac{L}{2}(d^2 - c^2)$ $a_n(f_{c,d}^{(1)}, L) =$ $\frac{L}{n^2\pi^2}(s\,\mathrm{sen}\,s + \cos s)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f_{c,d}^{(1)}, L) =$ $\frac{L}{n^2\pi^2}(-s\cos s + \mathrm{sen}\,s)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$

$$b_n = 2 * \left[T^{(o)} * \left(-\frac{1}{n\pi}\cos s\Big|_0^{n\pi}\right) + a^{(o)} * \left(\frac{1}{n^2\pi^2}(-s\cos s + \sin s)\Big|_0^{n\pi}\right)\right]$$

(o)=(f),(g),(h) e (k) respectivamente

Solução (II):

$$b_n^1 = 2 * T^{(o)} * \left(-\frac{1}{n\pi}\cos s\Big|_0^{n\pi}\right) = \frac{2T^{(o)}(1-\cos n\pi)}{n\pi} = \frac{2T^{(o)}[1-(-1)^n]}{n\pi}$$

$$b_n^2 = 2 * a^{(o)} * \left(\frac{1}{n^2\pi^2}(-s\cos s + \sin s)\Big|_0^{n\pi}\right) *$$

$$b_n^2 = 2 * a^{(o)} * \left(\frac{1}{n^2\pi^2}(-n\pi\cos n\pi + \sin n\pi + 0\cos 0 - \sin 0)\right)$$

$$b_n^2 = 2 * a^{(o)} * \left(-\frac{(-1)^n}{n\pi}\right)$$

$$b_n = b_n^1 + b_n^2 = \frac{2T^{(o)}[1-(-1)^n]}{n\pi} + 2 * a^{(o)} * \left(-\frac{(-1)^n}{n\pi}\right) = \frac{2\cdot\left(T^{(o)}-(-1)^n\cdot\left(T^{(o)}+a^{(o)}\right)\right)}{n\pi}$$

Como $a = b = 1$, temos:

$$b_n = c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = c_n \sinh \frac{n\pi b}{a} = c_n \sinh n\pi$$

portanto

$$c_n = \frac{b_n}{\sinh n\pi}$$

Substituindo, os coeficientes da série de senos:

$$c_n = \frac{2 \cdot \left(T^{(o)} - (-1)^n \cdot \left(T^{(o)} + a^{(o)}\right)\right)}{n\pi \cdot \sinh n\pi}$$

A forma geral da solução é dada por:

$$u(x,y) = u^{(f)}\,(x,y) + u^{(g)}\,(x,y) + u^{(h)}\,(x,y) + u^{(k)}\,(x,y)$$

onde:

$$u^{(f)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(f)} \sin n\pi x \cdot \sinh n\pi(1-y)$$

$$u^{(g)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(g)} \sin n\pi x \cdot \sinh n\pi y$$

$$u^{(h)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(h)} \sin n\pi y \cdot \sinh n\pi(1-x)$$

$$u^{(k)}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \sin n\pi y \cdot \sinh n\pi x$$

Os coeficientes são dados por:

$$c_n = \frac{2 \cdot \left(T^{(o)} - (-1)^n \cdot \left(T^{(o)} + a^{(o)}\right)\right)}{n\pi \cdot \sinh n\pi}$$

(o)=(f),(g),(h) e (k) respectivamente

Segmento [0,1] dividido em 30 partes

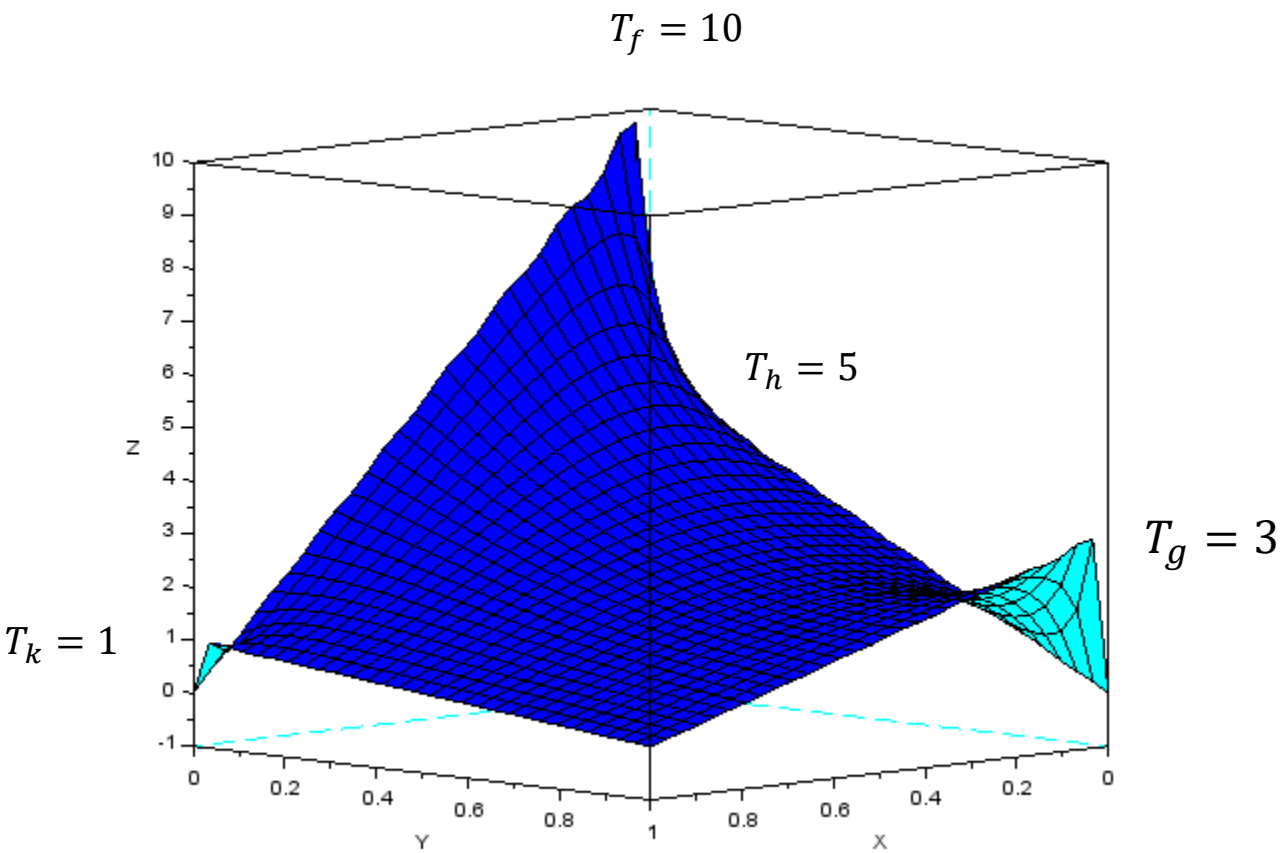
```
t=linspace(0,1,30);
Ts=10;
Tn=3;
To=5;
Tl=1;
ks=-10;
kn=-3;
ko=-5;
kl=-1;
function z=my_surface(x, y)
n=100;
z=0;
for k=1:n
cf = 2/(k*%pi*sinh(k*%pi))*(Ts-(Ts+ks)*cos(k*%pi))
cg = 2/(k*%pi*sinh(k*%pi))*(Tn-(Tn+kn)*cos(k*%pi))
ch = 2/(k*%pi*sinh(k*%pi))*(To-(To+ko)*cos(k*%pi))
ck = 2/(k*%pi*sinh(k*%pi))*(Tl-(Tl+kl)*cos(k*%pi))
uf =cf*sin(k*%pi*x)*sinh(k*%pi*(1-y))
ug =cg*sin(k*%pi*x)*sinh(k*%pi*y)
uh =ch*sin(k*%pi*y)*sinh(k*%pi*(1-x))
uk =ck*sin(k*%pi*y)*sinh(k*%pi*x)
z=z+uf + ug+ uh + uk;
end
endfunction

z=feval(t,t,my_surface);
plot3d(t,t,z);
```

$T_f = 10, \quad T_g = 3$
$T_h = 5, \quad T_k = 1$

$a_f = -10, \quad a_g = -3$
$a_h = -5, \quad a_k = -1$

100 primeiros termos não-nulos da série

Saída gráfica



MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Roteiro do curso

- **Introdução**
- **Séries de Fourier**
- Método de Diferenças Finitas
- Equação do calor transiente (parabólica)
- **Equação de Poisson (elíptica)**
- Equação da onda (hiperbólica)