MAE 327
Planejamento e Pesquisa II

Profa. Júlia Maria Pavan Soler

pavan@ime.usp.br

IME/USP – 2º Semestre/2020

Planejamento de Experimentos
Modelos ANOVA

- ✓ Delineamentos Completamente Aleatorizados (DCA) x Delineamentos Aleatorizados em Blocos Completos (DABC)
- ✓ Experimentos Fatoriais Cruzados, Efeitos de Interação
- ✓ Fatoriais Hierárquicos (*nested*), Efeitos de embutimento
- ✓ Delineamentos Balanceados e Não Balanceados (SQ Sequencial)
- ✓ Análise de Covariância.
- ✓ Blocos Incompletos Balanceados: Quadrado Latino e Generalizações
- ✓ Delineamentos Cross-Over
- ✓ Blocos Incompletos Balanceados (Quadrado de Youden)
- ✓ Experimentos Fatoriais Fracionais (Confundimento): 2^{K-f}

10. Modelos de Efeitos Fixos e Aleatórios
11. Delineamentos Split-plot e Experimentos com Medidas Repetidas.

Efeitos Aleatórios - Motivação

Objetivo: estimar a temperatura corporal média de animais de uma certa espécie

Experimento: 5 animais foram selecionados aleatoriamente da população sob estudo e quatro medidas de temperatura corporal foram obtidas.

Temperatura Corporal (ºC) de Animais

Repl	A1	A2	A3	A4	A5
1	26	23	25	28	30
2	28	20	28	27	32
3	25	24	24	29	28
4	29	22	27	31	31

Qual é a variável resposta e os fatores sob estudo?

Os 5 animais representam os níveis de um Fator FIXO ou ALEATÓRIO?

Efeitos Aleatórios - Motivação

Temperatura Corporal (ºC) de Animais

Repl	A1	A2	A3	A4	A5
1	26	23	25	28	30
2	28	20	28	27	32
3	25	24	24	29	28
4	29	22	27	31	31

Resposta (var. dependente): Temperatura corporal (ºC)

Fator (var. independente ou explicativa): Animal $\Rightarrow$ em 5 níveis

Neste caso, o Fator é "Aleatório" $\Rightarrow$ o fator não é fixo pois representa uma amostra aleatória de 5 animais da população alvo do estudo e não há interesse em fazer comparações entre esses 5 particular níveis do fator.

Efeitos Aleatórios - Motivação

Objetivo: Estimar o desempenho médio de candidatos de um concurso de dança de acordo com as notas dadas por diferentes juízes.

Experimento: de um concurso de dança, 4 candidatos foram selecionados aleatoriamente e as notas atribuídas por diferentes juízes foi considerada no estudo.

C1	C2	C3	C4
76	65	85	74
59	75	81	67
49	63	61	46
74	71	85	89
66	84	80	79

“Candidatos” deve ser modelado como um Fator Fixo ou Aleatório?

Há interesse também em avaliar se a variabilidade no desempenho entre candidatos é maior que a variabilidade entre os desempenhos atribuídos pelos juízes a um mesmo candidato (variabilidade dentro do nível do fator).

Efeitos Aleatórios - Motivação

Melhoramento Genético em gado de corte: o peso ao nascer de oito progênies machos resultantes de cruzamentos envolvendo cinco touros reprodutores da Fazenda Ranchinho são apresentados a seguir:

Touro Reprodutor				**Peso ao nascer de Progênies**					**Média**	**dp**
T1	61	100	56	113	99	103	75	62	83,625	22,551
T2	75	102	95	103	98	115	98	94	97,5	11,225
T3	58	60	60	57	57	59	54	100	63,125	15,028
T4	57	56	67	59	58	121	101	101	77,5	25,945
T5	59	46	120	115	115	93	105	75	91	28,025

A média de peso ao nascer dos animais da Fazenda Ranchinho está dentro do limite Padrão Ouro que é de pelo menos 90 u.m. ?

“Touro Reprodutor” deve ser modelado como um fator fixo ou aleatório?

Efeitos Fixos e Aleatórios

Dois estudos foram realizados independentemente para avaliar a quantidade de potássio presente em refrigerantes comercializados no país.

No Estudo I, há interesse em comparar três marcas específicas de refrigerantes (M1, M2 e M3) quanto ao conteúdo de potássio.

No Estudo II, três marcas de refrigerantes, amostradas dentre todas as comercializadas no país, foram selecionadas para fazer parte do experimento.

	Estudo I			Estudo II		
	M1	M2	M3	M4	M5	M6
	1,12	0,16	0,15	0,91	0,66	2,17
	1,10	0,11	0,12	0,83	0,83	1,52
	1,12	0,26	0,12	0,95	0,61	1,58
Média	1,113	0,177	0,130	0,897	0,700	1,757
dp	0,012	0,076	0,017	0,061	0,115	0,359

Em cada Estudo estime o conteúdo médio de potássio presente nos refrigerantes.

“Marca de Refrigerante” deve ser modelado como um fator fixo ou aleatório? Justifique.

Modelos de Efeitos Aleatórios
Modelo Estrutural

y_{ij} : resposta da unidade experimental *i* no nível *j* do fator

$$y_{ij} = \mu_j + e_{ij}$$

$$= \mu + \boxed{\tau_j + e_{ij}}$$

componente fixo

componentes aleatórios do modelo

Efeito do Fator: é modelado como um componente aleatório.

Esta formulação é útil para modelar a Co(Variância) da variável resposta *y* (heterocedasticidade bem como covariância entre observações).

Modelo Estrutural e Distribucional

$$
\begin{aligned}
y_{ij} &= \mu_j + e_{ij} \\
&= \mu + \tau_j + e_{ij}; \quad j = 1, \ldots, J \quad i = 1, \ldots, n_j
\end{aligned}
$$

$$
\tau_j \sim N\left(0\,; \sigma_A^2\right) \;\Rightarrow\; \mu_j = \mu + \tau_j \sim N\left(\mu\,; \sigma_A^2\right)
$$

$$
e_{ij} \sim N\left(0\,; \sigma_e^2\right) \qquad \tau_j \perp e_{ij}
$$

$$
\Rightarrow \quad y_{ij} \sim N\left(\mu\,; \sigma_A^2 + \sigma_e^2\right)
$$

$$
Cov\left(y_{ij}\,; y_{i'j'}\right) = \begin{cases} \sigma_A^2 + \sigma_e^2 & i = i' \quad j = j' \\ \sigma_A^2 & i \neq i' \quad j = j' \\ 0 & c.c. \end{cases}
$$

Há dois componentes de variância, um devido ao fator aleatório e outro devido ao erro. O primeiro é também uma medida de covariância (restrita a ser positiva)

Especificação do Modelo - Formalização Matricial

$$y_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij} \qquad \tau_j \sim N\left(0\,;\sigma_A^2\right) \qquad e_{ij} \sim N\left(0\,;\sigma_e^2\right) \quad \tau_j \perp e_{ij}$$

$$Y_{n\times 1} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ \ldots \\ y_{n_J J} \end{bmatrix} \sim N\left(1_{n\times 1}\,\mu\,;V_{n\times n}\right); \qquad V_{n\times n} = Cov(Y_{n\times 1}) = \begin{bmatrix} V_{1\,n_1\times n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{2\,n_2\times n_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{J\,n_J\times n_J} \end{bmatrix};$$

$$V_j = \begin{bmatrix} \sigma_e^2+\sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 \\ \sigma_A^2 & \sigma_e^2+\sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 \\ \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \ldots & \sigma_A^2 \\ \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \sigma_e^2+\sigma_A^2 \end{bmatrix}_{n_j\times n_j} = \sigma_Y^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho \\ \rho & \rho & \ldots & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1 \end{bmatrix};$$

Matriz de correlação uniforme

Componentes da variância de Y $\sigma_Y^2 = \sigma_e^2 + \sigma_A^2,$

$$\rho = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_e^2+\sigma_A^2}$$

Coeficiente de correlação intraclasse: é a proporção da variância total de Y explicada pelo fator aleatório

Especificação do Modelo
Formalização Matricial

$$y_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij}; \qquad Y_{n\times 1} \sim N\left(1_{n\times 1}\mu; V_{n\times n}\right)$$

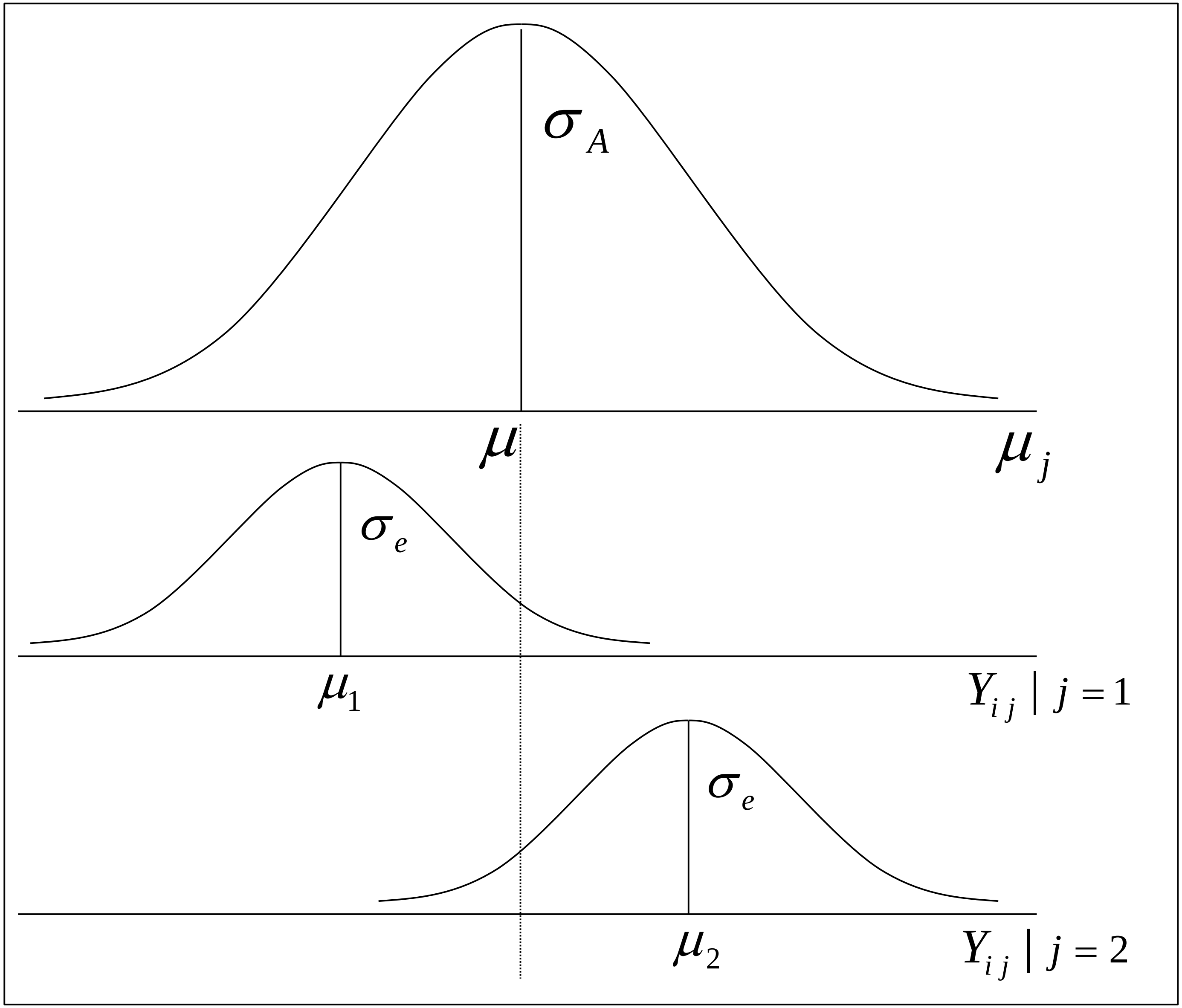
$$V = \begin{bmatrix} V_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_J \end{bmatrix}; \qquad V_j = \begin{bmatrix} \sigma_Y^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 \\ \sigma_A^2 & \sigma_Y^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 \\ \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \dots & \sigma_A^2 \\ \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \sigma_A^2 & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} = \sigma_Y^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho \\ \rho & \rho & \dots & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho = Corr\left(Y_{ij}, Y_{i'j}\right) = \frac{Cov\left(Y_{ij}, Y_{i'j}\right)}{\sqrt{Var(Y_{ij})}\sqrt{Var(Y_{i'j})}} = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_Y^2} = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_e^2}$$

ρ é o coeficiente de correlação intraclasse: correlação entre quaisquer duas observações dentro do mesmo nível do fator.

É a proporção da variância total de Y que é devida à fonte de variabilidade entre os níveis do Fator

$$y_{ij} = \mu_j + e_{ij}$$
$$= \mu + \tau_j + e_{ij}$$
$$\mu_j \sim N\left(\mu ; \sigma_A^2 \right)$$



Distribuição condicional de Y

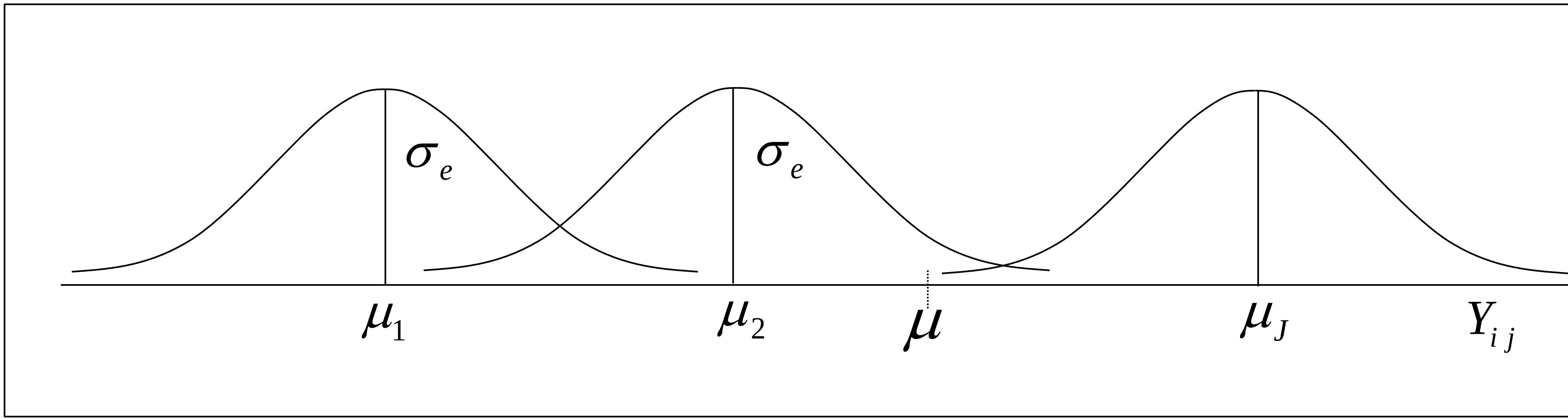
$$\Rightarrow y_{ij} \mid j \sim N\left(\mu_j ; \sigma_e^2 \right)$$

Condicional ao j-ésimo nível do Fator as observações são independentes

$$H_0 : \sigma_A^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_J = \mu$$

$$H_0 : \sigma_A^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_J = \mu$$

Sob H_0 o modelo de um único fator aletório (dois componentes de variância e correlação uniforme) equivale ao modelo de um único fator fixo!



Assim, sob H_0, as Tabelas de ANOVA, de um modelo com um único fator fixo ou um único fator aleatório, analiticamente, são iguais.
MAS, note que, o modelo estrutural e distribucional, bem como o teste realizado em cada caso são diferentes!

Tabela de ANOVA – Fator Aleatório

$H_0: \quad \sigma_A^2 = 0 \qquad\qquad H_1: \sigma_A^2 > 0$

F.V.	g l	SQ	QM	F	*p*
Fator (Entre)	**J-1**	$\sum n_j(\bar{y}_j - \bar{y})^2$	**SQFator/(J-1)**	**QMFator/ QMRes**	
Res (Dentro)	**n-J**	$\sum_{ij}(y_{ij} - \bar{y}_j)^2$	**SQRes/(n-J)**		
Total	**n-1**	$\sum_{ij}(y_{ij} - \bar{y})^2$			

$n_j=r, \;\; n=rJ \qquad n-J=J(r-1)$

$$E(QM\,\mathrm{Res}) = \sigma_e^2$$

$$\boxed{E(QMFator) = \sigma_e^2 + r\,\sigma_A^2}$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{QMFator}{QM\,\mathrm{Res}} \overset{H_0}{\sim} F_{(J-1)(n-J)}$$

Equivalência analítica entre as Tabelas de ANOVA dos modelos com um fator fixo ou aleatório!

Tabela de ANOVA – Um Fator Fixo

$H_0 : \mu_j = \mu \qquad H_1 : \mu_j \neq \mu,$ para pelo menos um j

F.V.	g l	SQ	QM	F	*p*
Fator (Entre)	**J-1**	$\sum n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2$	**SQFator/(J-1)**	**QMFator/ QMRes**	
Res (Dentro)	**n-J**	$\sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$	**SQRes/(n-J)**		
Total	**n-1**	$\sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y})^2$			

$n_j = r, \; n = rJ \qquad n\text{-}J = J(r\text{-}1)$

$$E(QM\,\mathrm{Re}s) = \sigma_e^2$$

$$\boxed{E(QMFator) = \sigma_e^2 + r\,\frac{\sum_j (\mu_j - \mu)^2}{J-1}} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{QMFator}{QM\,\mathrm{Re}s} \overset{sob\ H_0}{\sim} F_{(J-1)(n-J)}$$

Modelos de Efeitos Aleatórios

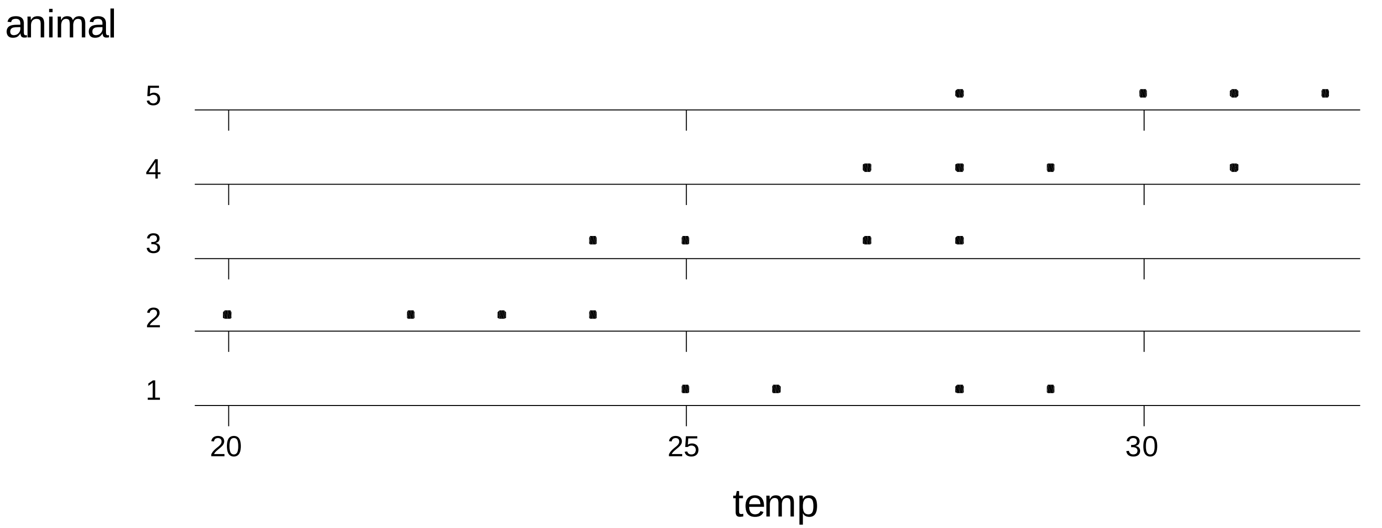
Ex. Temperatura Corporal (ºC) de Animais

Repl	A1	A2	A3	A4	A5
1	26	23	25	28	30
2	28	20	28	27	32
3	25	24	24	29	28
4	29	22	27	31	31

Considerando Animal como fator aleatório, escreva o modelo estrutural e as suposições distribucionais para a variável resposta Temperatura corporal.

Obtenha a tabela de ANOVA e teste as hipóteses de interesse.

Dados da Temperatura Corporal de Animais



σ_e^2 : Variabilidade da resposta dentro do animal (homocedasticidade)

σ_A^2 : Variabilidade da resposta entre as médias de resposta de cada animal

$$y_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij} \qquad \tau_j \sim N\left(0\,;\sigma_A^2\right) \qquad e_{ij} \sim N\left(0\,;\sigma_e^2\right) \quad \tau_j \perp e_{ij}$$

Tabela de ANOVA

Source	DF	SS	MS	F	P
Animal	4	148.300	$\boxed{37.075}$	12.02	0.000
Error	15	46.250	$\boxed{3.083}$		
Total	19	194.550			

$$\hat{\sigma}_e^2 = QM\,\mathrm{Res}\,s$$

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{QMFator - \hat{\sigma}_e^2}{r}$$

Componentes de Variância

Source	Estimated Value	
Animal	8.498	$\hat{\sigma}_A^2$
Error	3.083	$\hat{\sigma}_e^2$

A variância da resposta (temperature corporal) ENTRE animais é maior que a variância DENTRO de animal (diferentes mensurações feitas no mesmo animal)

$$y_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij} \qquad \tau_j \sim N\left(0\,;\sigma_A^2\right) \qquad e_{ij} \sim N\left(0\,;\sigma_e^2\right) \quad \tau_j \perp e_{ij}$$

Estatísticas Descritivas (por Animal) $\hat{\sigma}_e^2 \Rightarrow 3{,}083$

Variable	animal	N	Mean	StDev	SE Mean
temp	1	4	27.000	1.826	0.913
	2	4	22.250	1.708	0.654
	3	4	26.000	1.826	0.913
	4	4	28.750	1.708	0.854
	5	4	30.250	1.708	0.854

Estatísticas Descritivas (entre as Médias dos Animais)

Variable	N	Mean	Median	StDev	SE Mean
Mean	5	26.85	27.00	3.04	1.36

$$V\left(\hat{\mu}\right) = 1{,}36^2 = 1{,}85$$

$$\hat{\mu} = 26{,}85$$

$$V\left(\hat{\mu}\right) = QMFator\,/\,n = 37{,}075\,/\,20 = 1{,}85$$

Tabelas de ANOVA

F.V	g l	Efeito Fixo	Efeito Aleatório
Fator A	**J-1**	$E\left(QMFator\right)=\sigma_e^2+\frac{\sum n_j(\mu_j-\mu)^2}{J-1}$	$E\left(QMFator\right)=\sigma_e^2+r\sigma_A^2$
Resíduo	**n-J=J(r-1)**	$E\left(QM\,\mathrm{Re}\,s\right)=\sigma_e^2$	$E\left(QM\,\mathrm{Re}\,s\right)=\sigma_e^2$
Hipótese		$H_0:\mu_1=\ldots=\mu_J$	$H_0:\sigma_A^2=0$
Estatística de Teste		$F=\frac{QMFator}{QM\,\mathrm{Re}\,s}$	$F=\frac{QMFator}{QM\,\mathrm{Re}\,s}$

nj=r; n=rJ   n-J=J(r-1)

$$\Rightarrow \quad F\overset{H_0}{\sim}F_{(J-1)(n-J)}$$

Modelo de Efeito Aleatório - Estimação

$$y_{ij} = \mu_j + e_{ij}$$
$$= \mu + \tau_j + e_{ij}; \quad j = 1, \ldots, J \quad i = 1, \ldots, n_j$$

$$\tau_j \sim N\left(0\,;\sigma_A^2\right) \quad \Rightarrow \quad \mu_j = \mu + \tau_j \;\sim N\left(\mu\,;\sigma_A^2\right)$$
$$e_{ij} \sim N\left(0\,;\sigma_e^2\right) \qquad \tau_j \perp e_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad y_{ij} \sim N\left(\mu\,;\sigma_A^2 + \sigma_e^2\right)$$

$$Cov\left(y_{ij}\,;y_{i'j'}\right) = \begin{cases} \sigma_A^2 + \sigma_e^2 & i = i' \quad j = j' \\ \sigma_A^2 & i \neq i' \quad j = j' \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\mu} \quad \hat{\tau}_j$$
$$\Rightarrow \hat{\sigma}_A^2 \quad \hat{\sigma}_e^2$$
$$\Rightarrow \hat{\rho}$$

?

Estimação de μ

$$y_{ij} = \mu_j + e_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij}; \quad j = 1,\ldots,J \quad i = 1,\ldots,n_j$$

$$\tau_j \sim N\left(0\,;\sigma_A^2\right) \qquad e_{ij} \sim N\left(0\,;\sigma_e^2\right) \quad \tau_j \perp e_{ij}$$

$$\Rightarrow y_{ij} \sim N\left(\mu\,;\sigma_A^2 + \sigma_e^2\right)$$

$$E\left(y_{ij}\right) = \mu \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu} = \bar{Y}_{..}$$

Estimador da média geral da resposta

E(QMFator)

$$Var\left(\bar{Y}_{..}\right) = Var\left(\frac{\sum_{ij} y_{ij}}{rJ}\right) = Var\left(\frac{\sum_{ij}(\mu_j + e_{ij})}{rJ}\right) = Var\left(\frac{\sum_j \mu_j}{J} + \frac{\sum_{ij} e_{ij}}{rJ}\right) = \frac{\sigma_A^2}{J} + \frac{\sigma_e^2}{rJ} = \frac{r\sigma_A^2 + \sigma_e^2}{rJ}$$

$$\Rightarrow \hat{V}ar\left(\bar{Y}_{..}\right) = s_{\bar{Y}}^2 = \frac{QMTrat}{rJ}$$

Estatística para testar hipóteses sobre μ

$$\frac{\bar{Y} - \mu}{s_{\bar{Y}}} \sim t_{(J-1)}$$

Estimação de μ

$$y_{ij} = \mu_j + e_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij}; \quad j = 1, \ldots, J \quad i = 1, \ldots, n_j$$

$$\tau_j \sim N\left(0\,;\sigma_A^2\right) \qquad e_{ij} \sim N\left(0\,;\sigma_e^2\right) \quad \tau_j \perp e_{ij}$$

$$\Rightarrow y_{ij} \sim N\left(\mu\,;\sigma_A^2 + \sigma_e^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\mu} = \bar{Y}_{..}$$

Estimador da média geral da resposta

$$\bar{Y}_j = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} y_{ij} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left(\mu_j + e_{ij}\right) = \mu_j + \bar{e}_j = \mu + \tau_j + \bar{e}_j$$

$$\hat{\tau}_j = \bar{Y}_j - \hat{\mu} - \hat{\bar{e}}_j = \left(\bar{Y}_j - \bar{Y}_{..}\right) - \hat{\bar{e}}_j$$

Preditor do efeito aleatório do Fator no nível j

Estimação dos Componentes de Variância

$$\boxed{\begin{array}{l} y_{ij} = \mu_j + e_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij}; \quad j = 1,\ldots,J \quad i = 1,\ldots,n_j \\ \tau_j \sim N\left(0\,;\sigma_A^2\right) \qquad e_{ij} \sim N\left(0\,;\sigma_e^2\right) \quad \tau_j \perp e_{ij} \end{array}}$$

$$\Rightarrow y_{ij} \sim N\left(\mu\,;\sigma_A^2 + \sigma_e^2\right)$$

$$E\left(QM\,\mathrm{Res}\right) = \sigma_e^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\sigma}_e^2 = QM\,\mathrm{Res}}$$

$$\frac{J\left(r-1\right)QM\,\mathrm{Res}}{\sigma_e^2} \sim \chi^2_{J(r-1)}$$

$$\boxed{\Rightarrow IC\left(\sigma_e^2\right)a\left(1-\alpha\right)\% = \left(\frac{J(r-1)QM\,\mathrm{Res}}{\chi^2_{(1-\alpha/2);J(r-1)}}\,;\,\frac{J(r-1)QM\,\mathrm{Res}}{\chi^2_{(\alpha/2);J(r-1)}}\right)}$$

Estimação dos Componentes de Variância

$$E\left(QMTrat\right)=\sigma_e^2+r\sigma_A^2 \quad \Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}_A^2=\frac{QMTrat-QM\,\mathrm{Re}\,s}{r}} \quad > 0\ ?$$

$$\sigma_A^2=\left(\frac{1}{r}\right)E\left(QMTrat\right)+\left(-\frac{1}{r}\right)E\left(QM\,\mathrm{Re}\,s\right)$$ **Combinação linear de Quadrados Médios**

Procedimento de Satterthwaite:

$$\boxed{\Rightarrow IC\left(\sigma_A^2\right)a\left(1-\alpha\right)\%=\left(\frac{(df)\hat{\sigma}_A^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2);(df)}};\frac{(df)\hat{\sigma}_A^2}{\chi^2_{(\alpha/2);(df)}}\right) \quad df=\frac{\left(r\hat{\sigma}_A^2\right)^2}{\frac{QMTrat^2}{J-1}+\frac{QM\,\mathrm{Re}\,s^2}{J(r-1)}}}$$

Estimação do Coeficiente de Correlação Intra-Classe

$$\rho = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_e^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\rho} = \frac{\hat{\sigma}_A^2}{\hat{\sigma}_A^2 + \hat{\sigma}_e^2}}$$

$$\frac{(J-1)QMFator}{r\sigma_A^2 + \sigma_e^2} \sim \chi^2_{(J-1)}; \quad \frac{J(r-1)QM\,\mathrm{Res}}{\sigma_e^2} \sim \chi^2_{J(r-1)}; \quad \frac{QMTrat}{r\sigma_A^2 + \sigma_e^2} \div \frac{QM\,\mathrm{Res}}{\sigma_e^2} \sim F_{(J-1),J(r-1)}$$

$$P\left(F_{(\alpha/2)(J-1),(n-J)} \le \frac{QMTrat}{r\sigma_A^2 + \sigma_e^2} \div \frac{QM\,\mathrm{Res}}{\sigma_e^2} \le F_{(1-\alpha/2)(J-1)(n-J)} \right) = 1-\alpha$$

$$\boxed{IC(\rho)\ a\ (1-\alpha)\% = \left(\frac{L}{1+L}; \frac{U}{1+U} \right)}$$

$$L = \frac{1}{r}\left[\frac{QMTrat}{QM\,\mathrm{Res}} \left(\frac{1}{F_{(1-\alpha/2)(J-1)(n-J)}} \right) - 1 \right] \quad U = \frac{1}{r}\left[\frac{QMTrat}{QM\,\mathrm{Res}} \left(\frac{1}{F_{(\alpha/2)(J-1)(n-J)}} \right) - 1 \right]$$

Modelo de Efeitos Aleatórios
Análise de Resíduos

$$y_{ij} = \mu_j + e_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij}; \quad j = 1, \ldots, J \quad i = 1, \ldots, n_j$$

$$\tau_j \sim N\left(0\,;\sigma_A^2\right) \qquad e_{ij} \sim N\left(0\,;\sigma_e^2\right) \quad \tau_j \perp e_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad y_{ij} \sim N\left(\mu\,;\sigma_A^2 + \sigma_e^2\right); \quad Cov\left(y_{ij}\,;y_{i'j'}\right) = \begin{cases} \sigma_A^2 + \sigma_e^2 & i = i' \quad j = j' \\ \sigma_A^2 & i \neq i' \quad j = j' \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

$$e_{ij} = y_{ij} - \mu_j = y_{ij} - E\left(y_{ij} \mid \tau_j\right)$$ $\Rightarrow$ Resíduo Condicional

$$\varepsilon_{ij} = \tau_j + e_{ij} = y_{ij} - \mu = y_{ij} - E\left(y_{ij}\right)$$ $\Rightarrow$ Resíduo Marginal

$$\tau_j = \left(\mu + \tau_j\right) - \mu = E\left(y_{ij} \mid \tau_j\right) - E\left(y_{ij}\right)$$ $\Rightarrow$ Efeito Aleatório

Modelo de Efeitos Aleatórios
Análise de Resíduos

Resíduo confundido com o efeito aleatório

- **Resíduo Condicional:** $e_{ij} = y_{ij} - E\left(y_{ij} \mid \tau_j\right) = y_{ij} - \mu_j \quad \Rightarrow \quad \hat{e}_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_j$

$\hat{e}_{ij} \times \hat{y}_{ij}$ Diagnóstico da homocedasticidade e normalidade dos erros

- **Resíduo Marginal:** $\varepsilon_{ij} = \tau_j + e_{ij} = y_{ij} - E\left(y_{ij}\right) = y_{ij} - \mu \quad \Rightarrow \quad \hat{\varepsilon}_{ij} = y_{ij} - \hat{\mu}$ Resíduo puro

$\hat{\varepsilon}_{ij} \times \text{índice das u.e.}; \quad \hat{\varepsilon}_{ij} \times \text{Covariáveis}$ Diagnóstico da estrutura de covariância (uniforme) e observações atípicas

- **Efeitos Aleatórios (EBLUP):** $\tau_j = E\left(y_{ij} \mid \tau_j\right) - E\left(y_{ij}\right) = \left(\mu + \tau_j\right) - \mu$

Preditor (confundido com o resíduo condicional)

$$\hat{\tau}_j = \bar{Y}_j - \hat{\mu} - \bar{\hat{e}}_j = \left(\bar{Y}_j - \bar{Y}_{..}\right) - \bar{\hat{e}}_j$$

$\hat{\tau}_j \times$ índice das u.e. Diagnóstico de observações influentes

Modelo de Efeitos Aleatórios
Análise de Resíduos

- **Resíduo Condicional:** $e_{ij} = y_{ij} - E\left(y_{ij} \mid \tau_j\right) = y_{ij} - \mu_j$

No pacote R:

"Response": resíduo condicional

> plot(fit): resíduo de Pearson é o default

"Resíduo de Pearson": é resíduo condicional padronizado (dividido pela raiz quadrada do QMRes)

"Resíduo normalizado": é o resíduo de Pearson multiplicado por um fator de correção (corrige a não independência entre observações)

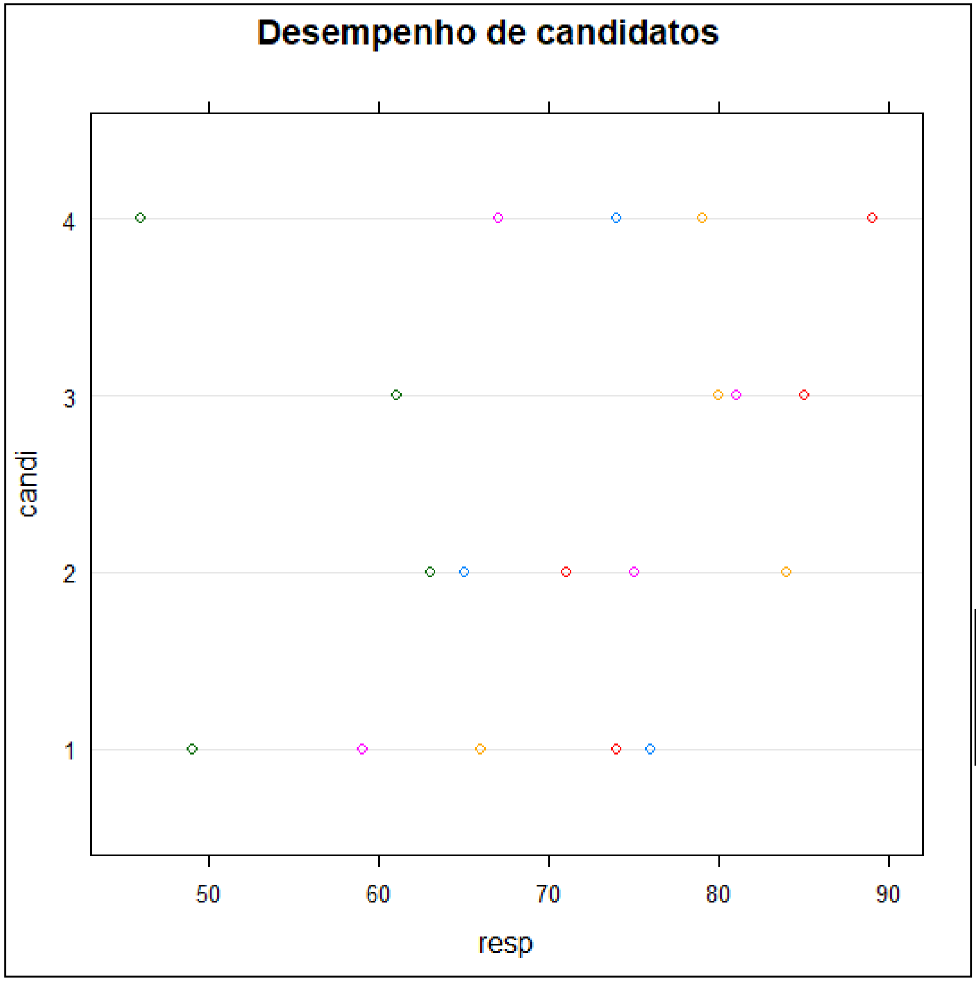
Exemplo

<u>Dados</u>: Avaliação do desempenho de candidatos de acordo com diferentes juízes

C1	C2	C3	C4
76	65	85	74
59	75	81	67
49	63	61	46
74	71	85	89
66	84	80	79

Há diferença no desempenho dos candidatos?

Adote um modelo de efeitos aleatórios. Compare com os resultados com aqueles de um DCA com efeito fixo!



Notas dos Candidatos:

Candi	1	2	3	4
Média	64.8	71.6	78.4	71.0
D.P.	11.12	8.41	9.99	16.11

Médias das Notas dos Candidatos:

Min.	Q1	Median	Mean	Q3	Max.	sd
64.8	69.5	71.3	71.5	73.3	78.4	5.56

Tabela de ANOVA:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	Fvalue	Pr(>F)
candi	3	463.75	154.58	1.1165	0.3717
Resid	16	2215.20	138.45		

$$H_0 : \sigma_A^2 = 0$$

Não há evidência para a rejeição de H_0: a variabilidade entre o desempenho médio dos candidatos é desprezível

Há interesse em: $\hat{\mu}, \quad \hat{Var}(\hat{\mu}), \quad \hat{\sigma}_e^2$

```
library(nlme)
fit2<- lme(fixed = resp ~ 1, random = ~ 1|candi)
```

```
> summary(fit2)
Random effects:
 Formula: ~1 | candi
        (Intercept) Residual
StdDev:    1.796293 11.76648

Fixed effects: resp ~ 1
            Value Std.Error DF  t-value p-value
(Intercept) 71.45  2.780138 16 25.70016       0

Standardized Within-Group Residuals:
       Min         Q1         Med          Q3         Max
-2.1589328 -0.5919915  0.2482052  0.6862421  1.4955168
```

```
library(nlme)
fit2<- lme(fixed = resp ~ 1, random = ~ 1|candi)
```

```
> intervals(fit2)
Approximate 95% confidence intervals

 Fixed effects:
               lower  est.    upper
(Intercept) 65.55637 71.45 77.34363
attr(,"label")
[1] "Fixed effects:"

 Random Effects:
  Level: candi
                        lower     est.    upper
sd((Intercept)) 0.0005289431 1.796293 6100.216

 Within-group standard error:
    lower      est.     upper
 8.325405 11.766478 16.629822
```

```
> fixed.effects(fit2)#BLUEs
(Intercept)
      71.45

> coef(fit2)
  (Intercept)
1    70.75596
2    71.46565
3    72.17535
4    71.40304

> random.effects(fit2)
  (Intercept)
1 -0.69403783
2  0.01565499
3  0.72534781
4 -0.04696497
```

Notas dos Candidatos:

Candi	1	2	3	4
Média	64.8	71.6	78.4	71.0
D.P.	11.12	8.41	9.99	16.11

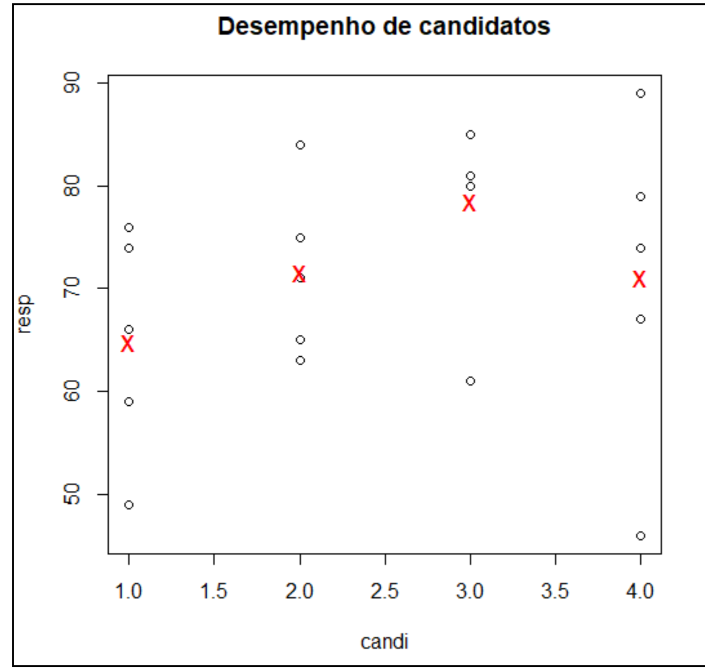
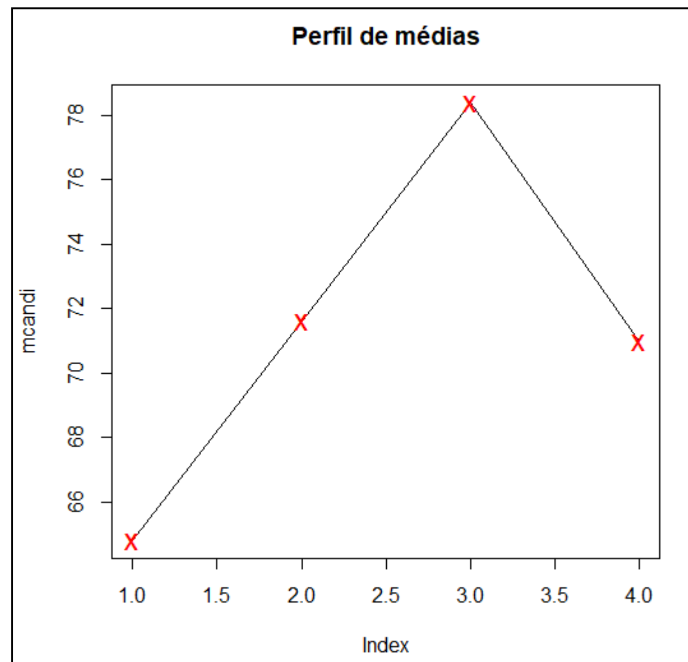


Tabela de ANOVA:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	Fvalue	Pr(>F)
candi	3	463.75	154.58	1.1165	0.3717
Resid	16	2215.20	138.45		



Interprete os resultados da ANOVA sob o Modelo de Efeitos Fixos

Obtenha:

$$\hat{\mu}_j, \quad \hat{\sigma}_e^2, \quad \hat{Var}\left(\hat{\mu}_j\right), \quad \hat{\tau}_j$$

```
> coefficients(fit1)
      (Intercept)  (candi)2  (candi)3  (candi)4
            64.8   6.8       13.6      6.2
```

```
Coefficients:
                  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)         64.800      5.262  12.314 1.41e-09 ***
as.factor(candi)2    6.800      7.442   0.914   0.3744
as.factor(candi)3   13.600      7.442   1.828   0.0863 .
as.factor(candi)4    6.200      7.442   0.833   0.4170
```

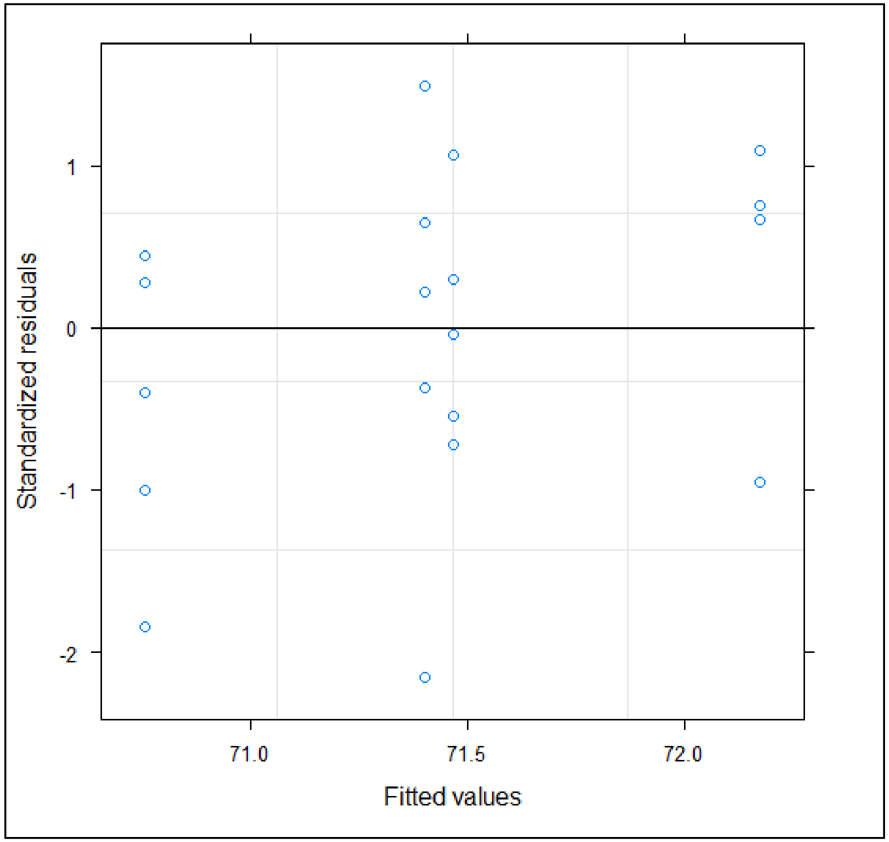
```
> fit1.tk
  Tukey multiple comparisons of means
    95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = resp ~ candi)

$candi
    diff        lwr      upr     p adj
2-1  6.8 -14.491063 28.09106 0.7978994
3-1 13.6  -7.691063 34.89106 0.2970659
4-1  6.2 -15.091063 27.49106 0.8379962
3-2  6.8 -14.491063 28.09106 0.7978994
4-2 -0.6 -21.891063 20.69106 0.9998037
4-3 -7.4 -28.691063 13.89106 0.7546744
```

Resíduos: Modelo de Efeitos Aleatórios

Resíduo condicional



Resíduos: Modelo de Efeitos Fixos