• Exercícios

① A partir das relações (2.4) e guiado(a) pelos diagramas da **Fig. 2.1**, rededuza a Eq. (2.1) baseado na projeção de $\widetilde{\mathbf{e}}_0^a$ na direção de $\mathbf{e}_0^a$ (e vice-versa).

② Considere o procedimento *incorreto* apresentado acima da Eq. (2.8), quando tentávamos relacionar os comprimentos de uma régua medidos por diferentes observadores. O equívoco daquele procedimento estava em se medir a distância espacial entre as extremidades da régua em instantes diferentes. No entanto, podemos consertar o procedimento se levarmos em conta o quanto as extremidades da régua se movem nesse intervalo de tempo que separa os eventos, de acordo com $\mathcal{O}$. Faça isso e reobtenha a relação correta dada pela Eq. (2.8).

③ Ainda sobre contração de Lorentz, há uma maneira ainda mais "simples"[14] de obtê-la (do que a apresentada no texto ou pedida no exercício anterior), fazendo uso da dilatação temporal dada pela Eq. (2.1). Imagine que o *Flash* esteja correndo a uma velocidade relativística V ($< c$) ao longo de uma estrada (retilínea), indo de uma cidade A a outra B. Para você, parado no acostamento da estrada, a distância entre as cidades é L e o tempo de percurso da viagem do *Flash* foi de T, enquanto para ele próprio a viagem durou apenas $\widetilde{T} = T/\gamma$ — em acordo com a Eq. (2.1). Por outro lado, para o *Flash*, foram as cidades A e B, assim como o chão da estrada, que se moveram. Considerando isso, qual a distância entre as cidades A e B de acordo com o *Flash*? E explique por que não seria correto lançar mão da simetria entre os observadores e usar o análogo da Eq. (2.1) que daria $\widetilde{T} = \gamma T$.

④ Considere os observadores inerciais $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$ que já nos são familiares, em movimento relativo com velocidade $V = 0{,}6\,c$ e se cruzando no evento p. Cada um carrega consigo um cronômetro e uma régua orientada na direção do movimento relativo entre eles. Com a ajuda das Eqs. (2.4), construa, em papel milimetrado, um diagrama espaço-tempo como os das **Figs. 2.1 e 2.3**, representando as marcações de tempo dos dois cronômetros e as

[14] Deve-se tomar cuidado com argumentos "simples" demais porque, muitas vezes, a simplicidade deles advém de suposições implícitas que, de tão "óbvias" para nossa intuição clássica, nem nos damos conta de as estarmos usando. O problema é que, às vezes, nossa intuição clássica falha em contextos relativísticos e essas suposições podem ser falsas — levando aos vários "paradoxos" relativísticos.

folhas-de-mundo das duas réguas, sendo fiel aos valores de V e γ que aparecem nas Eqs. (2.4). Represente também, no mesmo diagrama, os lugares geométricos que indicam valores constantes de intervalo invariante $\mathcal{I}(p, q)$.

⑤ Considere os observadores inerciais $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$ padrões, caracterizados pelas tetradas $\{\mathbf{e}^a_\mu\}$ e $\{\widetilde{\mathbf{e}}^a_\mu\}$, respectivamente — relacionadas pelas Eqs. (2.4). No evento p em que as linhas-de-mundo de $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$ se cruzam, ambos observam um fóton que $\mathcal{O}$ descreve como tendo vindo da direção (espacial) que faz um ângulo θ com sua direção dada por $\mathbf{e}^a_1$. Sendo ℓ^a o 4-vetor que representa a direção de propagação desse fóton, pede-se:

(a) Escreva ℓ^a em termos da base tetrada que caracteriza $\mathcal{O}$ (não se esqueça que $g_{ab}\ell^a\ell^b = 0$);

(b) Calcule o ângulo $\widetilde{\theta}$ que o observador $\widetilde{\mathcal{O}}$ mede entre a direção (espacial) de onde esse fóton chegou e a direção dada por $\widetilde{\mathbf{e}}^a_1$; (O fato que $\theta \neq \widetilde{\theta}$ é chamado de *aberração estelar* e sobrevive mesmo em física newtoniana, quando se desprezam efeitos de ordem V^2/c^2. Verifique isso a partir de seu resultado.)

(c) Justificaremos, no próximo capítulo, que a frequência do fóton medida por um observador qualquer é proporcional à projeção de ℓ^a na direção puramente temporal do observador: $f \propto g_{ab}\mathbf{e}^a_0\ell^b$ (e a constante de proporcionalidade independe de observador). Tomando isso como verdade, obtenha a relação entre as frequências f e $\widetilde{f}$ que os observadores $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$ atribuem para esse fóton. (O fato que $f \neq \widetilde{f}$ é chamado de *efeito Doppler* e sobrevive mesmo em física newtoniana, quando se desprezam efeitos de ordem V^2/c^2. Verifique isso a partir de seu resultado.)

⑥ Denominaremos de *tri-vetor* (3-vetor) (e o denotaremos por letras maiúsculas em negrito) qualquer 4-vetor $\mathbf{V}^a$ que, *por construção*, seja puramente espacial para algum observador (ou seja, $\mathbf{V}^a \in \mathbb{V}^\perp(\mathbf{e}^a_0)$, onde $\mathbf{e}^a_0$ dá a direção da linha-de-mundo do observador em questão) e que tenha significado físico *apenas* para esse observador (por conta da informação do observador entrar na construção de $\mathbf{V}^a$). Um exemplo de 3-vetor é a 3-velocidade que um observador $\mathcal{O}$ atribui para uma linha-de-mundo qualquer.

(a) Seguindo a construção que levou à Eq. (2.2), mostre que a 3-velocidade $\mathbf{U}^a$ que um observador $\mathcal{O}$, passando pelo evento p, atribui para outra linha-de-mundo passando por p na direção do 4-vetor u^a, é dada por

$$\frac{\mathbf{U}^a}{c} = -\frac{u^a}{(g_{bc}\,\mathbf{e}_0^b\,u^c)} - \mathbf{e}_0^a; \tag{2.45}$$

(Note que a informação do observador — via $\mathbf{e}_0^a$ — aparece explicitamente na construção de $\mathbf{U}^a \in \mathbb{V}^\perp(\mathbf{e}_0^a)$, o que a caracteriza como um 3-vetor.)

(b) Mostre que se u^a é tipo-luz, então $\|\mathbf{U}^a\| = c$, qualquer que seja o observador;

(c) Se u^a é tipo-tempo, então podemos, por conveniência (e sem perda de generalidade), escolher u^a normalizado (o que *não* muda $\mathbf{U}^a$). Nesse caso, mostre que

$$\frac{\mathbf{U}^a}{c} = \gamma_U^{-1} u^a - \mathbf{e}_0^a, \tag{2.46}$$

onde γ_U é o fator de Lorentz com o módulo da velocidade espacial dado por $\|\mathbf{U}^a\|$;

(d) Seja $\mathbf{U}^a$ (respectivamente, $\widetilde{\mathbf{U}}^a$) a 3-velocidade que o observador inercial $\mathcal{O}$ (resp., $\widetilde{\mathcal{O}}$) atribui para uma dada partícula (com linha-de-mundo tipo-tempo). Seja $\mathbf{V}^a$ a 3-velocidade que $\mathcal{O}$ atribui para $\widetilde{\mathcal{O}}$. Utilizando a Eq. (2.46), relacione essas 3-velocidades, obtendo:

$$\gamma_{\widetilde{U}} = \gamma_V \gamma_U \left(1 - \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right), \tag{2.47}$$

$$(\widetilde{\mathbf{U}}^a)_\parallel = \frac{(\mathbf{U}^a - \mathbf{V}^a)_\parallel}{1 - \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}{c^2}}, \tag{2.48}$$

$$\widetilde{\mathbf{U}}^a_\perp = \frac{\mathbf{U}^a_\perp}{\gamma_V\left(1 - \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right)}, \tag{2.49}$$

onde $\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} := g_{ab}\mathbf{U}^a\mathbf{V}^b$ (já que ambos 3-vetores pertencem à mesma seção espacial) e $(\mathbf{W}^a)_\parallel$ (respectivamente, $\mathbf{W}^a_\perp$) representa a projeção do 3-vetor $\mathbf{W}^a$ na direção do (resp., perpendicular ao) movimento relativo entre $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$. (Existe uma sutil razão para a ligeira diferença de notação entre $(\mathbf{W}^a)_\parallel$ e $\mathbf{W}^a_\perp$. Tente descobrir qual é essa razão.)

⑦ Considere espaço-tempo de Galileu $\mathbb{G}$ apresentado no Exercício ⑨ do capítulo anterior. Seguindo a construção feita na Seção 2.1 para se chegar nas relações (2.4), pede-se:

(a) Obtenha as relações análogas válidas no espaço-tempo de Galileu:

$$\left\{\begin{array}{l}\widetilde{\mathbf{u}}^a = \mathbf{u}^a + V\,\mathbf{e}_1^a \\ \widetilde{\mathbf{e}}_1^a = \mathbf{e}_1^a\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\mathbf{u}^a = \widetilde{\mathbf{u}}^a - V\,\widetilde{\mathbf{e}}_1^a \\ \mathbf{e}_1^a = \widetilde{\mathbf{e}}_1^a\end{array}\right. , \qquad (2.50)$$

onde $\mathbf{e}_1^a$ e $\widetilde{\mathbf{e}}_1^a$ são vetores tipo-espaço com norma unitária, na direção do movimento relativo entre $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$;

(b) Expressando o 4-vetor separação entre os eventos p e q, $s^a := \overrightarrow{pq}$, nas bases $\{u^a, \mathbf{e}_i^a\}_{i=1,2,3}$ e $\{\widetilde{u}^a, \widetilde{\mathbf{e}}_i^a\}_{i=1,2,3}$,

$$s^a = \Delta t\, u^a + \Delta x^i \mathbf{e}_i^a = \Delta\widetilde{t}\,\widetilde{u}^a + \Delta\widetilde{x}^i \widetilde{\mathbf{e}}_i^a,$$

(onde $\{\mathbf{e}_i^a\}_{i=1,2,3} = \{\widetilde{\mathbf{e}}_i^a\}_{i=1,2,3}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{S}$), obtenha as chamadas *transformações (boosts) de Galileu*:

$$\left\{\begin{array}{l}\Delta\widetilde{t} = \Delta t \\ \Delta\widetilde{x}^1 = \Delta x^1 - V\Delta t \\ \Delta\widetilde{x}^2 = \Delta x^2 \\ \Delta\widetilde{x}^3 = \Delta x^3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\Delta t = \Delta\widetilde{t} \\ \Delta x^1 = \Delta\widetilde{x}^1 + V\Delta\widetilde{t} \\ \Delta x^2 = \Delta\widetilde{x}^2 \\ \Delta x^3 = \Delta\widetilde{x}^3\end{array}\right. .$$

⑧ Considere a família de linhas-de-mundo dada, em relação a um evento $o \in \mathbb{M}$ arbitrário, por

$$x^a(t;\sigma,\lambda,\zeta) := t\left(\mathbf{e}_0^a + \sigma\mathbf{e}_1^a + \lambda\mathbf{e}_2^a + \zeta\mathbf{e}_3^a\right),$$

onde $\{\mathbf{e}_\mu^a\}_{\mu=0,\ldots,3}$ é uma base tetrada de $\mathbb{V}$ e t é o parâmetro ao longo de cada linha-de-mundo indexada por valores *fixos* de (σ,λ,ζ).

(a) Qual a restrição que se deve impor nos parâmetros σ,λ,ζ para que as linhas-de-mundo acima representem observadores físicos?

(b) Represente essa família de observadores num diagrama espaço-tempo e interprete o significado físico dos parâmetros σ,λ,ζ; (Pode representar num diagrama (1+1)-dimensional, mas certifique-se de que entende a situação também num diagrama (1+2)-dimensional e se esforce para entender a situação no espaço-tempo (1+3)-dimensional.)

(c) Reparametrize essas linhas-de-mundo de modo que o parâmetro sobre cada linha-de-mundo seja seu tempo-próprio τ;

(d) Calcule a 4-velocidade e a 4-aceleração de cada linha-de-mundo;

(e) Mostre que os eventos p pertencentes ao lugar geométrico Σ_τ determinado por $\tau =$ const. satisfazem $\mathcal{I}(o,p) =$ const. ≤ 0. Além disso, mostre que esse lugar geométrico é *localmente* ortogonal às 4-velocidades dos observadores dessa família (e, portanto, Σ_τ, embora *não* seja um subespaço de $\mathbb{M}$, pode ser considerada como a superfície espacial, ou de simultaneidade, *dessa* família). Represente Σ_τ no mesmo diagrama espaço-tempo do item (b);

(f) Considere, por simplicidade, as linhas-de-mundo indexadas por $(0,0,0)$ e $(\sigma,0,0)$, para um dado valor de σ. Calcule a separação $D(\tau,\sigma)$ entre essas linhas-de-mundo ao longo da superfície espacial Σ_τ. Além disso, mostre que a taxa com que essa separação muda, com o tempo-próprio τ, satisfaz a chamada *lei de Hubble* (ou seja, é proporcional a $D(\tau,\sigma)$ e, portanto, é arbitrariamente grande para linhas-de-mundo arbitrariamente afastadas)[15];

(g) Considere a curva fechada dada pela interseção de Σ_τ com as linhas-de-mundo indexadas por $(\sigma\cos\theta, \sigma\sin\theta, 0)$, com σ *fixo* e $\theta \in [0, 2\pi)$. Calcule o perímetro $C(\tau,\sigma)$ dessa curva e relacione o resultado com o valor de $D(\tau,\sigma)$ encontrado no item anterior. O que se pode inferir a respeito da geometria de Σ_τ?

⑨ Considere dois observadores inerciais, $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$, caracterizados, respectivamente, por tetradas $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$ e $\{\widetilde{\mathbf{e}}_\mu^a\}$ que se relacionam por um *boost* com 3-velocidade $\mathbf{V}^a = A\mathbf{e}_1^a + B\mathbf{e}_2^a$ (em relação a $\mathcal{O}$), onde A e B são constantes quaisquer.

(a) Obtenha explicitamente a matriz de *boost* $\Lambda_{\rm B}(\mathbf{V}^a)$.

Escolhendo-se apropriadamente valores de V_1 e V_2, pode-se obter uma outra tetrada $\{\mathbf{e}'^a_\mu\}$, a partir de $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$, pela combinação de *boosts* em direções particulares, $\Lambda_{\rm B2}(V_2)\Lambda_{\rm B1}(V_1)$ [vide Eqs. (2.39) e (2.40)], de modo que $\mathbf{e}'^a_0 = \widetilde{\mathbf{e}}_0^a$ — ou seja, o observador $\mathcal{O}'$, associado a $\{\mathbf{e}'^a_\mu\}$, está em repouso em relação a $\widetilde{\mathcal{O}}$.

[15] De fato, estamos diante de um exemplo particular de modelo cosmológico homogêneo e isotrópico chamado *universo de Milne* — que, como visto na solução do item (b) deste exercício, pode ser representado pela porção do espaço-tempo de Minkowski contida no interior do cone-de-luz de um evento o arbitrário. Embora seja observacionalmente irrelevante — pois se refere a um modelo cosmológico completamente vazio; por isso, plano —, o universo de Milne é útil para se analisar por outro ângulo alguns fenômenos cosmológicos, como a velocidade ilimitada da lei de Hubble e o *red-shift* cosmológico.

(b) Com a ajuda do item (d) do Exercício ⑥, determine os valores de V_1 e V_2 (em função de A e B);

(c) Mostre que $\{\mathbf{e}'^a_j\}_{j=1,2}$ e $\{\widetilde{\mathbf{e}}^a_j\}_{j=1,2}$ *não* estão alinhados e que estão relacionados por uma rotação em torno de $\mathbf{e}'^a_3 = \widetilde{\mathbf{e}}^a_3$. Determine o ângulo dessa rotação.

⑩ Seja $\iota_\vartheta : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$ (com $\vartheta \in \mathbb{R}$) o *boost* associado a $\Lambda_{\mathrm{B}_1}(c \tanh \vartheta)$ em relação a um evento $o \in \mathbb{M}$ e para uma dada escolha de $\{\mathbf{e}^a_\mu\}$.

(a) Mostre que $\iota_{\vartheta_1} \circ \iota_{\vartheta_2} = \iota_{\vartheta_1 + \vartheta_2}$;

(b) Mostre que, como representado na **Fig. 2.18**, a órbita $p(\vartheta) := \iota_\vartheta(p)$ é uma hipérbole, uma semi-reta ou um ponto, dependendo da localização de p em relação a o;

(c) Seja $\psi_o(p) = s^a = s^\mu \mathbf{e}^a_\mu$. Mostre que se $|s^0| < |s^1|$, então $p(\vartheta)$ é uma linha-de-mundo uniformemente acelerada. Além disso, calcule o valor da aceleração própria em função de s^μ e a relação entre ϑ e o tempo-próprio ao longo dessa linha-de-mundo.