

Microeconomia I

Custos

Prof. Fabio Barbieri

CONCEITO DE CUSTO

Conceito de custo

- Avaliação de cada agente a respeito da importância ou utilidade daquilo que se abdica quando faz uma escolha.
- Controvérsia dos custos:
 - Custos reais x custos de oportunidade
 - Marshall + Edgeworth x Wieser + Wicksteed

Conceito de Custo

Tradição inglesa

- custo real:
 - Esforço realizado:
 - pena associada ao trabalho braçal
- Objetivo
- independente do agente
- Retrospectivo
- “sangue, suor e lágrimas”

Tradição continental

- custo de oportunidade:
 - é a percepção subjetiva de um agente a respeito do valor daquilo que abdica quando faz uma escolha.
- Subjetivo
- Dependente do agente
- Prospectivo
- Águas passadas não movem moinho – *bygones are bygones*

Custos Econômicos e Contábeis

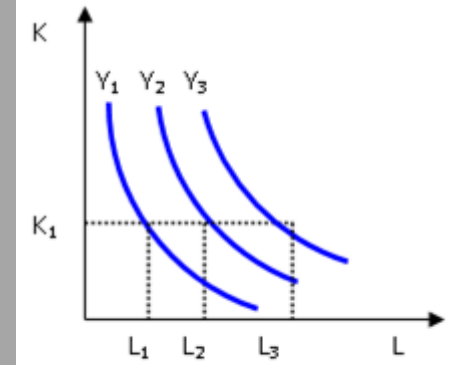
- Contábeis: se manifesta como desembolso em termos de valores monetários
- Econômicos: custos subjetivos de oportunidade
 - Decisão de investimento: lucro que seria obtido no segundo melhor projeto imaginado pelo agente
 - exemplos
 - Aluguel (não pago) do próprio galpão
 - Remuneração do empreendedor: salário obtido caso fosse funcionário em outra firma
 - Alchian: cada alternativa tem vantagens e desvantagens – custo não é sinônimo de desvantagens:
 - Comparação entre benefício líquido de cada alternativa
- Análise de eficiência exclui custos fixos
 - Custos fixos não são realocáveis

Horizonte de Planejamento

- Curto prazo
 - Horizonte de planejamento no qual não se contempla alterar a quantidade de pelo menos um fator produtivo
- Longo prazo
 - Horizonte de planejamento para o qual todos os fatores podem variar
- Observações derivadas do caráter subjetivo dos custos:
 - períodos não definidos em termos de unidades de tempo
 - distinção não absoluta: no CP custos de alterar fatores são proibitivos, mas alterar fatores não é impossibilidade
- Vamos agora estudar os custos nos dois prazos

CURTO PRAZO

Custos no Curto Prazo



- Seja a função de produção $Y = f(K, L)$ com K constante e L variável
- Seja w o preço do uso do fator trabalho e r o preço do uso do capital.
- Definições:
- **Custos fixos** são aqueles cujo montante independe do volume de produção Y
- **Custos variáveis** são aqueles que se alteram conforme decidimos produzir mais
- **Custos totais** são dados pela soma dos custos fixos mais os custos variáveis

$$CT = CF + CV$$

Definições

- **Custos médios** (CMe) são definidos pela razão entre os custos totais e a quantidade produzida. Indica o custo unitário do produto:
 - $CMe = CT/y$
- O custo médio (CMe) pode ser dividido em **custos variáveis médios** (CVMe) e **custos fixos médios** (CFMe):
 - $CMe = (CV + CF)/y = CV/y + CF/y = CVMe + CFMe$

Definições

- No caso da função de produção com dois fatores que tomamos como exemplo:

$$CMe = (wL + rK)/y$$

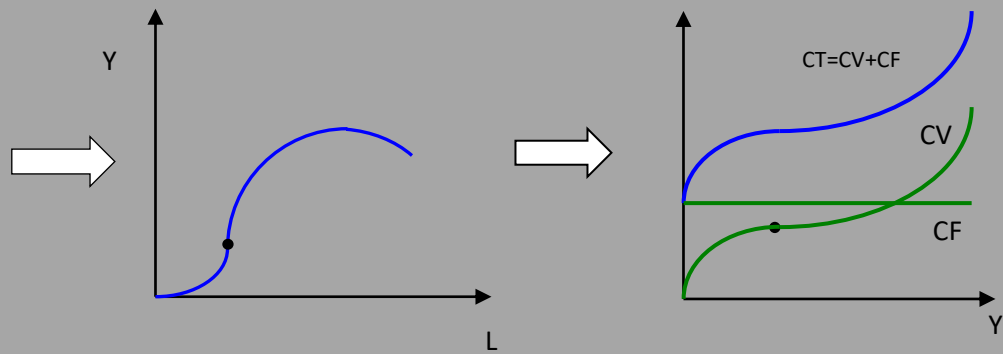
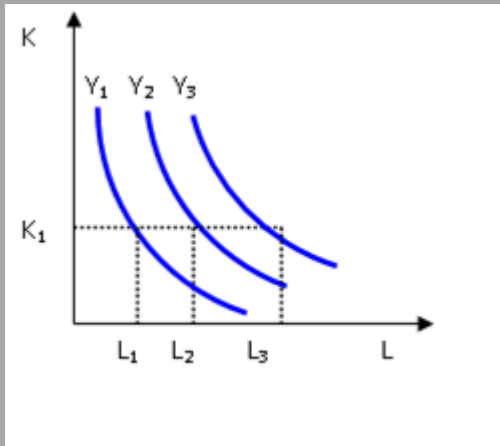
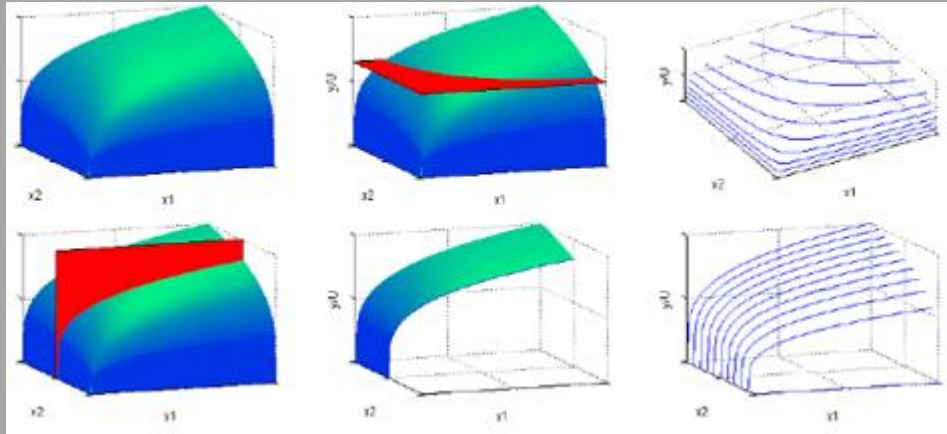
$$CVMe = wL/y = w/PM_e_L$$

$$CFMe = rK/y = r/PM_e_K$$

- **custos marginais** (CMg) são definidos como o acréscimo nos custos totais devido a um acréscimo pequeno na produção

$$CMg = \frac{dCT}{dY} = \frac{dCV}{dY}$$

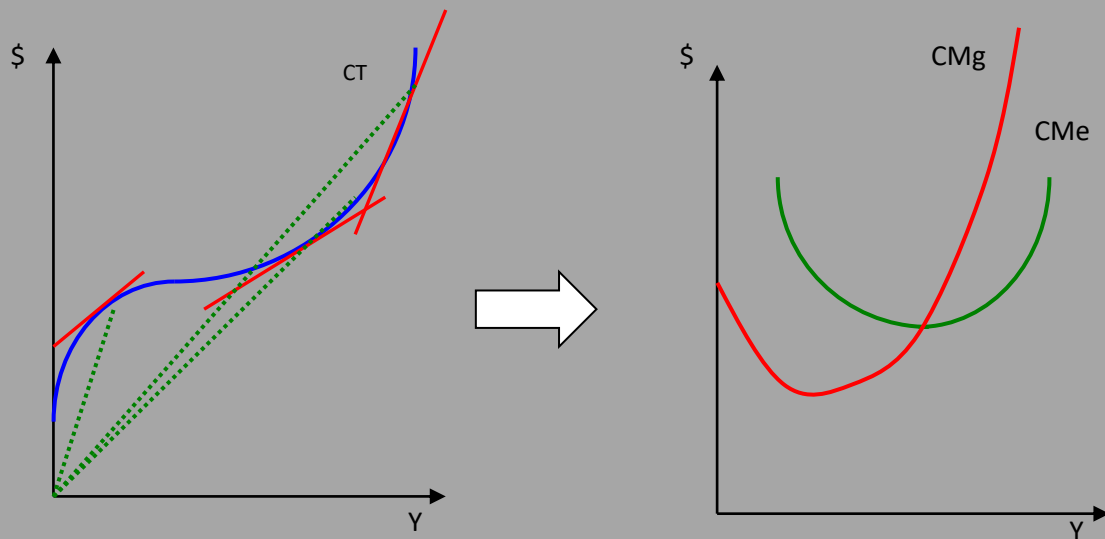
Gráficos: da Produção ao Custo



- PMg crescente $\rightarrow$ CMg decrescente
- PMg decrescente $\rightarrow$ CMg crescente

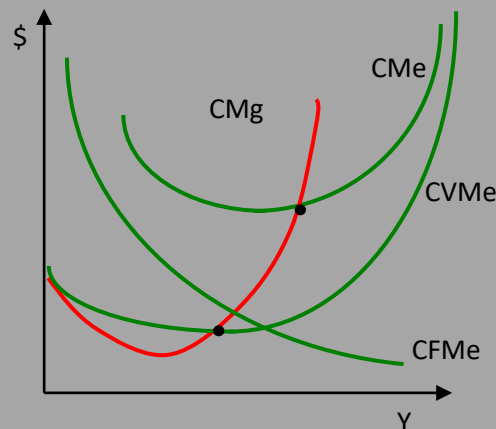
Gráficos: CMe e CMg

- A partir do gráfico da esquerda, podemos derivar o gráfico dos custos marginais e médios.
 - O custo marginal é simplesmente a inclinação do CT ou do CV.
 - O custo médio é obtido pela tangente do ângulo que liga um ponto qualquer da curva de CT à origem (linha pontilhada)



Gráficos: custos médios

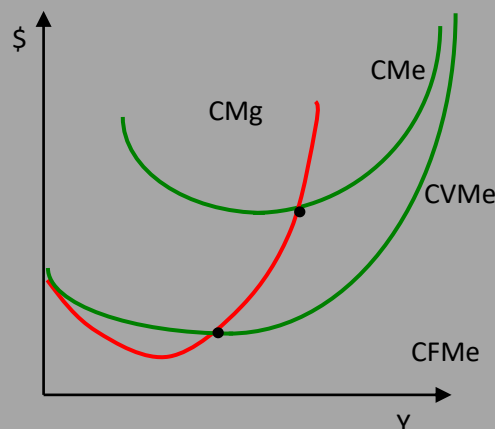
- Podemos ainda decompor o CMe em CFMe e CVMe
 - O CFMe é diluído conforme produção aumenta
 - O CVMe aumenta porque o CMg é crescente
 - O CVMe se aproxima de CMe para y grande
 - O CMg e o CVMe se aproximam para y pequeno
 - O CMg corta as curvas de CMe e CVMe no mínimo destas



Custos Marginais e Médios

- A curva de custo marginal cruza as curvas de custo médio e variável médio no ponto de mínimo destas.
- Prova: $\min C_{me} \rightarrow \text{C.P.O.: } (C_{me})' = 0$

$$\frac{dC_{Me}}{dY} = \frac{d\left(\frac{CT}{Y}\right)}{dY} = \frac{\left(\frac{dCT}{dY}\right) \cdot Y - CT \cdot 1}{Y^2} = \frac{CMg \cdot Y - CT \cdot 1}{Y^2} = \frac{CMg - \frac{CT}{Y}}{Y} = \frac{CMg - C_{Me}}{Y} = 0$$



Custos Marginais e Variáveis Médios

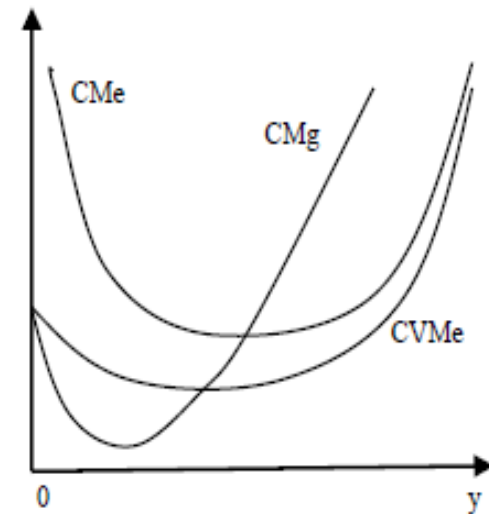
- O custo marginal de curto prazo é igual ao custo variável médio de curto prazo em $y = 0$, ou seja,

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} CMg_s(0) = \lim_{y \rightarrow 0^+} CVMes(0).$$

Prova:

Com efeito, sabemos que $CVMes(y) = \frac{CV_s(y)}{y}$.

$$\text{Logo, } \lim_{y \rightarrow 0^+} CVMes(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{CV_s(y)}{y}.$$



$$\text{Usando a regra de L'Hôpital, } \lim_{y \rightarrow 0^+} CVMes(y) = \frac{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{dCV_s(y)}{dy}}{\lim_{y \rightarrow 0^+} 1} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{dCV_s(y)}{dy}.$$

$$\text{Como } \frac{dCV_s(y)}{dy} = CMg_s(y), \text{ segue que } \lim_{y \rightarrow 0^+} CVMes(y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} CMg_s(y) = CMg_s(0) \quad \square$$

Exercício

(2010-6) Uma empresa produzindo bolas de futebol possui função de produção $Q = 2\sqrt{KL}$. Suponha que no curto prazo a quantidade de capital é fixa em $K = 100$ e seja L a quantidade de trabalho. Responda V ou F às seguintes alternativas:

- (0) A função custo marginal de curto prazo é igual a $CM_{gCP} = \frac{wQ}{400}$, em que w é a remuneração do capital e L a quantidade de trabalho.
- (1) A função custo médio de curto prazo é dada por $CM_{ecp} = \frac{100r}{Q} + \frac{wQ}{400}$;
- (2) No curto prazo, a curva de custo fixo médio é decrescente;
- (3) Esta função de produção possui produto marginal decrescente para o trabalho;
- (4) Essa função de produção possui retornos constantes de escala.

Solução:

Considerando r a remuneração do capital K e w a remuneração do trabalho L , o custo total é dado pela soma dos gastos com esses dois insumos: $CT = wL + rK$.

Para exprimir a função custo em termos da quantidade Q do bem, note que K é uma constante igual a 100 e L se relaciona com Q através da função de produção:

$Q = 2\sqrt{100L} \rightarrow L = \frac{Q^2}{400}$. Substituindo na função custo, obtemos:

$$CT(Q) = w \cdot \frac{Q^2}{400} + r \cdot 100$$

Exercício

$$CT(Q) = w \cdot \frac{Q^2}{400} + r \cdot 100$$

F (0) O custo marginal é dado pela derivada da função custo total em relação a Q:

$$CMg = Q \cdot w/200$$

V (1) O custo médio, por sua vez, é obtido pela divisão do custo total por Q:

$$CMe = \frac{CT}{Q} = \frac{Q^2 \frac{w}{400} + 100r}{Q} = \frac{100r}{Q} + \frac{wQ}{400}$$

V (2) O custo fixo médio é definido como o quociente entre o custo total e a quantidade:

CFMe = CF/Q = 100r/Q. A inspeção dessa fórmula confirma que de fato o CFMe é decrescente.

V (3) Calculemos o produto marginal: $PMg_L = \frac{dQ}{dL} = \frac{10}{\sqrt{L}}$, decrescente em L.

V (4) Multiplicando os dois insumos por λ : $2\sqrt{\lambda K \lambda L} = 2\sqrt{\lambda^2 KL} = 2\lambda^1 Q$

Como a função é homogênea de grau 1, tem-se retorno de escala constante.

LONGO PRAZO

Custos no Longo Prazo

- $Y = f(K,L)$, K e L variáveis
- Dualidade:
 - maximização de produção
 - minimização de custos
- Elementos:
 - Função de produção: $Y = f(K,L)$, K e L variáveis
 - Isocusto: $c = wL + rK$, c constante.

Isocusto

- Uma curva que contém todos as combinações de insumos que custam o mesmo valor define uma curva isocusto.
- Por exemplo, dado w_1 e w_2 , a linha isocusto de US \$ 100 é expressa por
- $w_1x_1 + w_2x_2 = 100.$

Retas de Isocusto

- Geralmente, dada w_1 e w_2 , a equação da linha iso-custo $\$c$ é

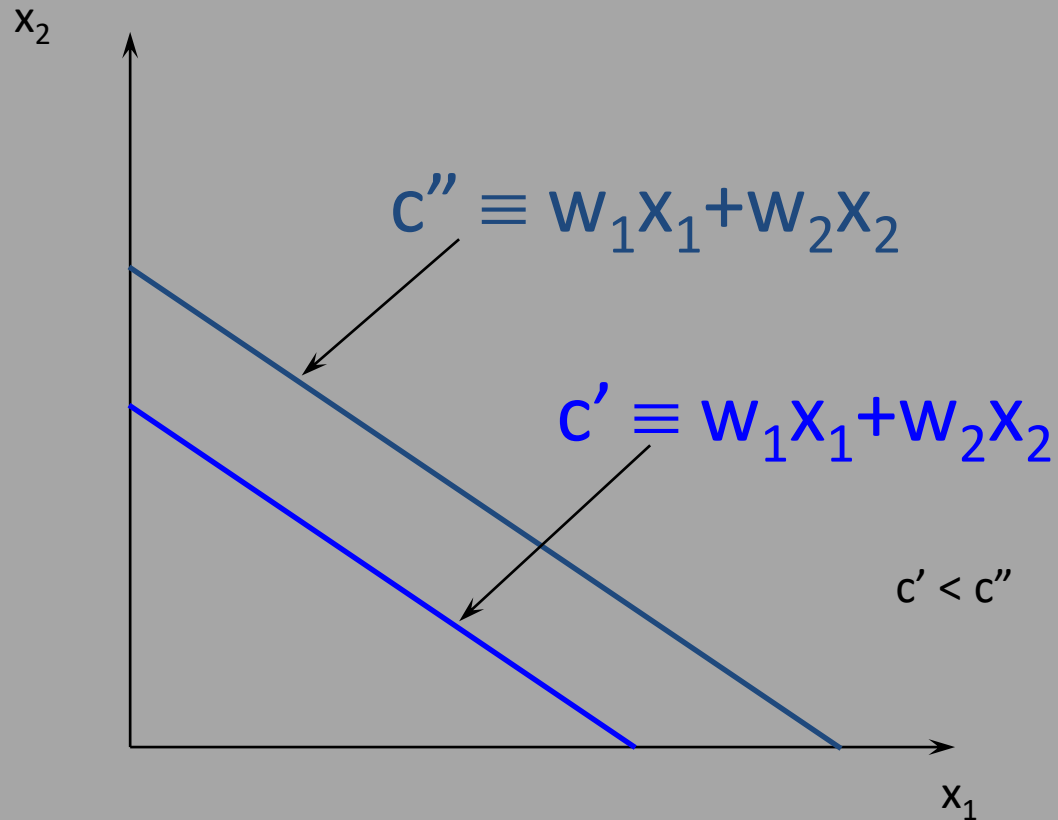
$$w_1x_1 + w_2x_2 = c$$

i.e.

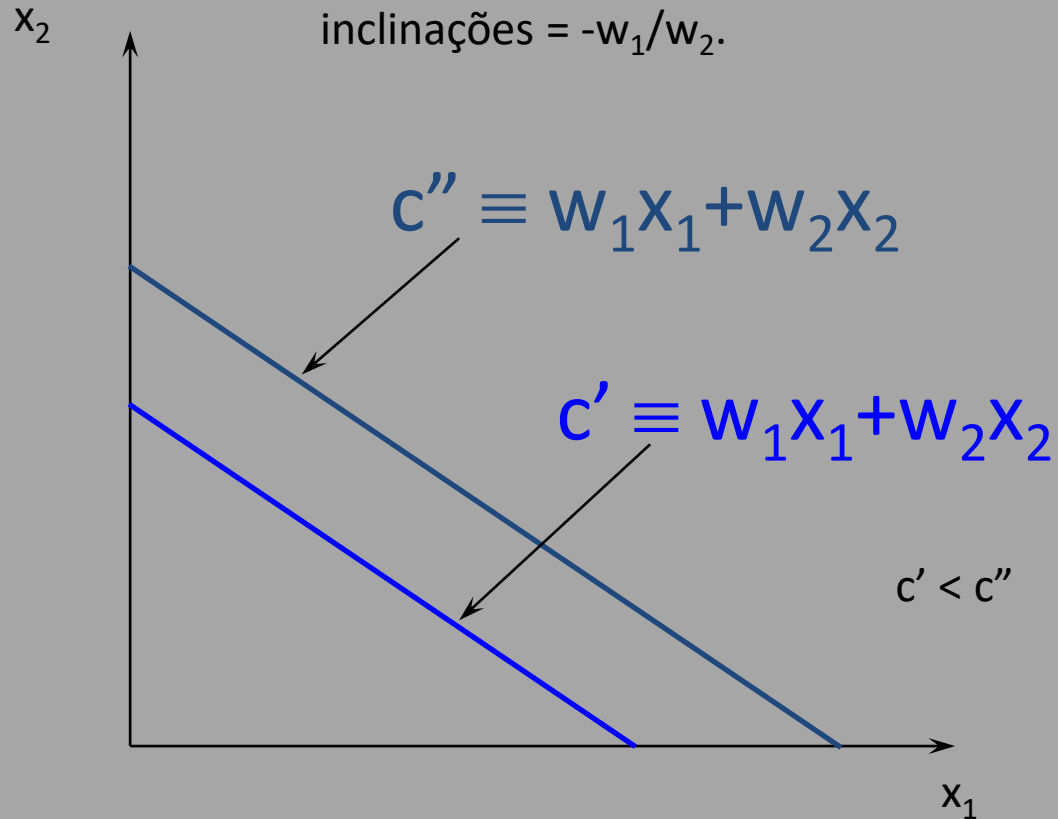
$$x_2 = -\frac{w_1}{w_2}x_1 + \frac{c}{w_2}.$$

- A inclinação é $-w_1/w_2$.

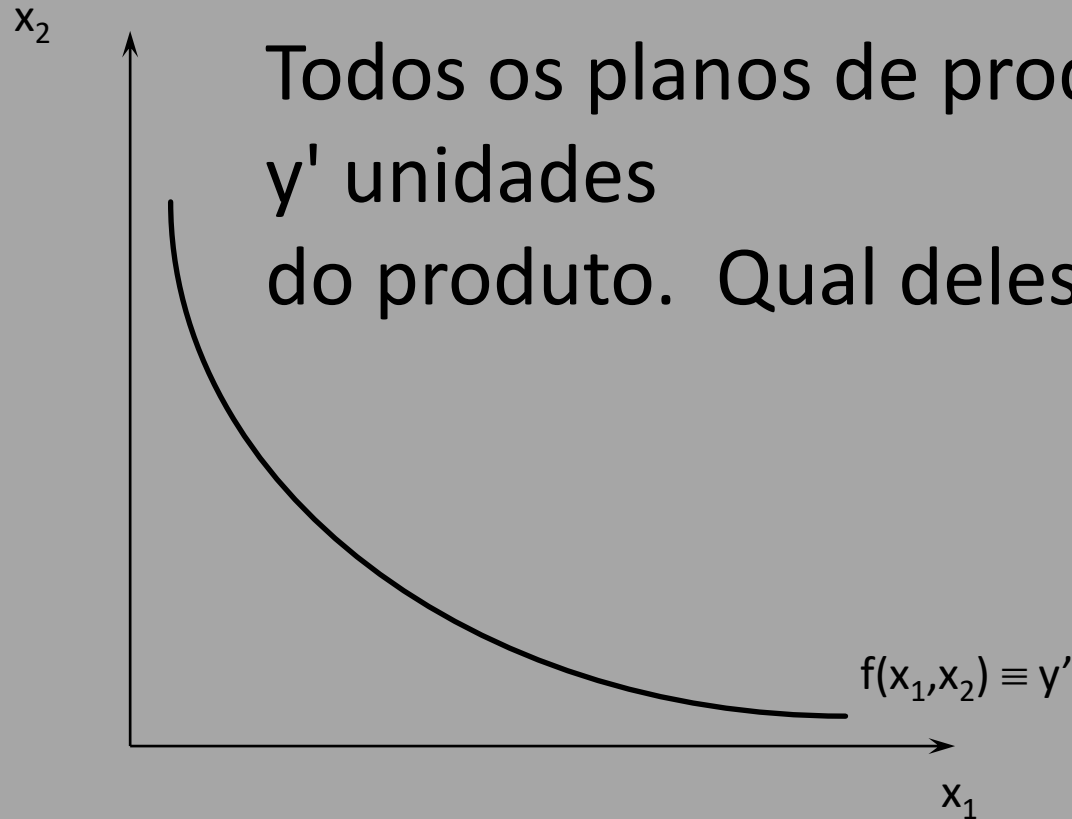
Retas de Isocusto



Retas de Isocusto

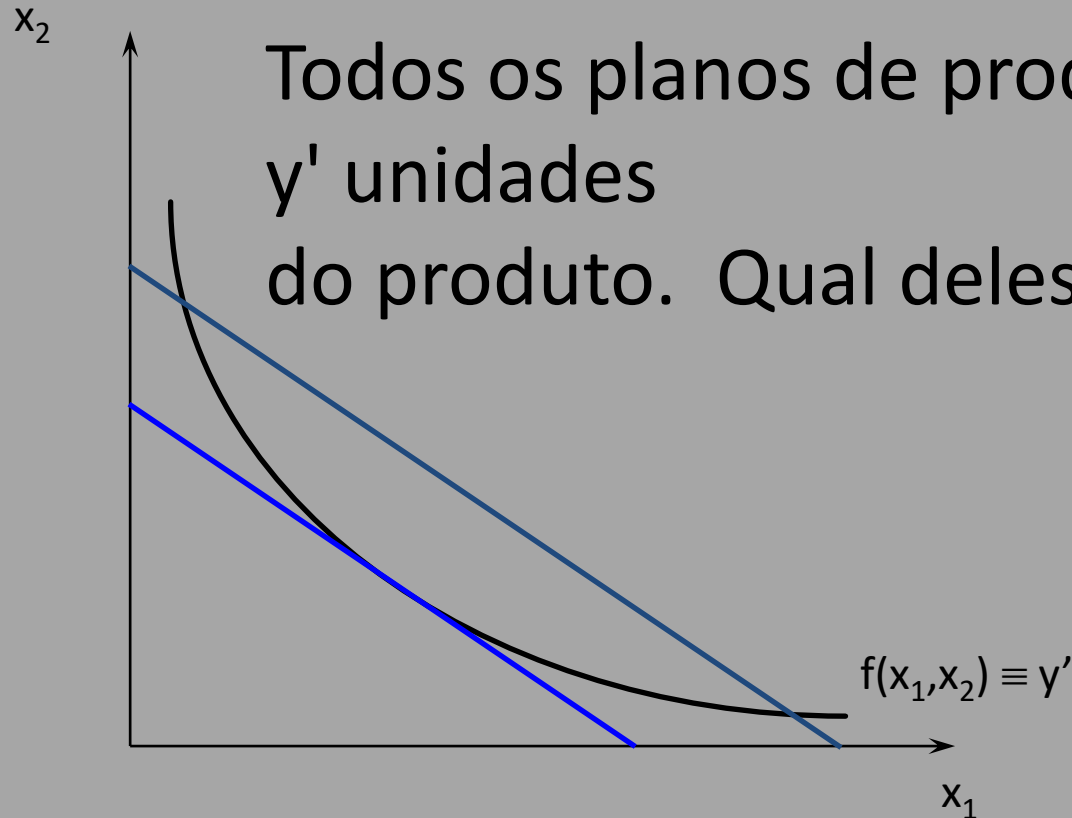


Isoquanta

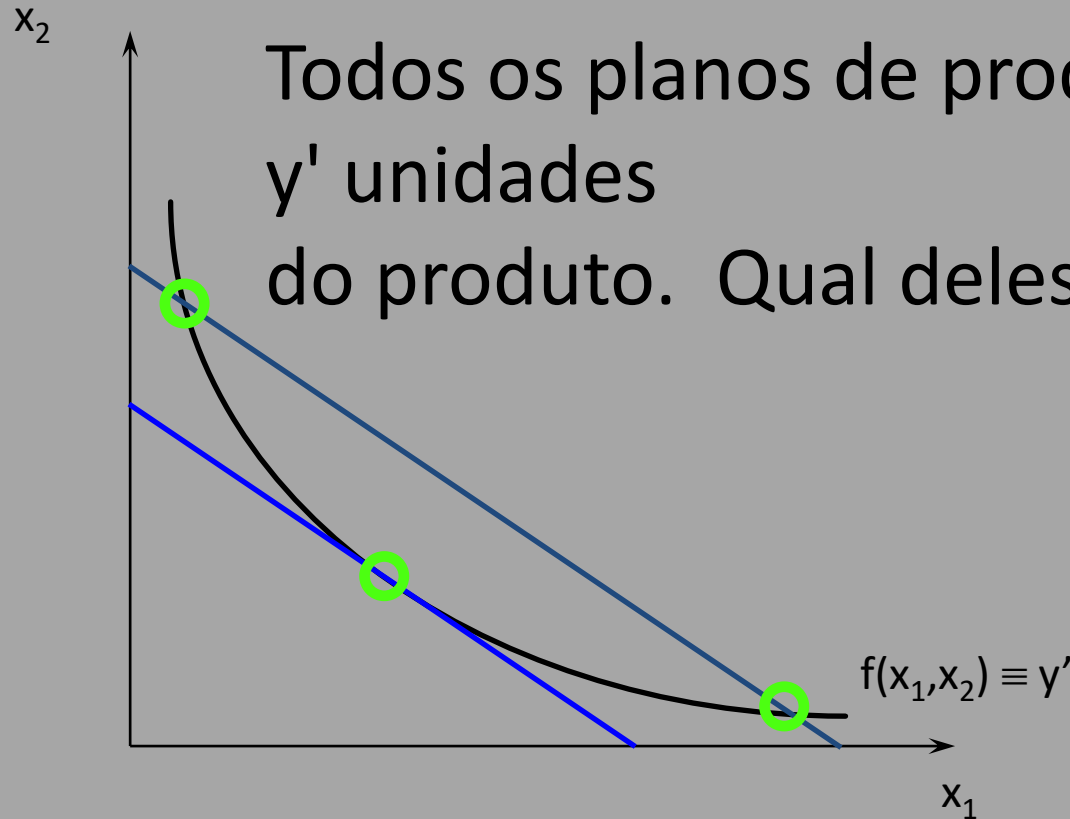


Todos os planos de produção que geram y' unidades do produto. Qual deles é o mais barato?

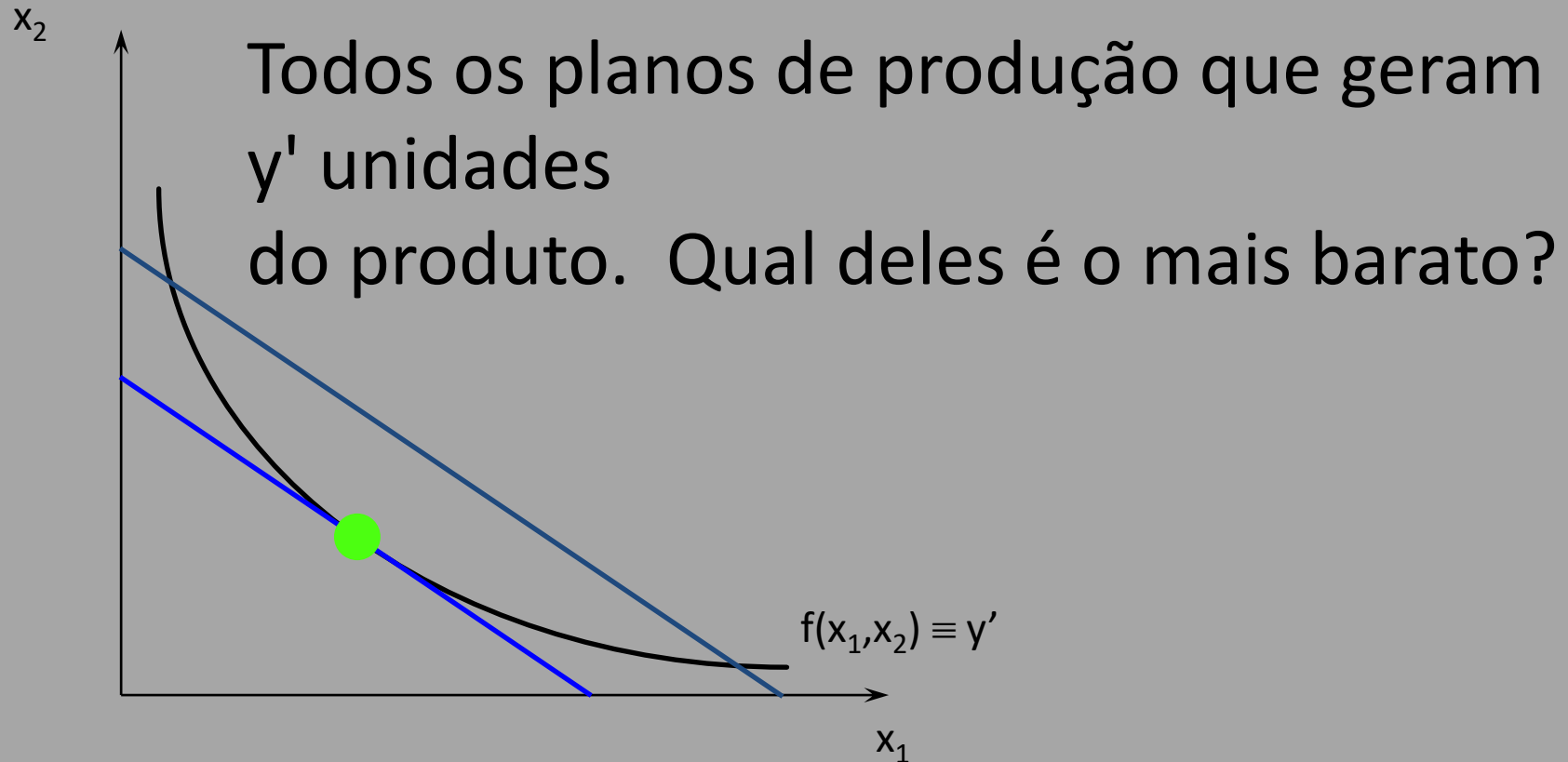
Minimização de Custos



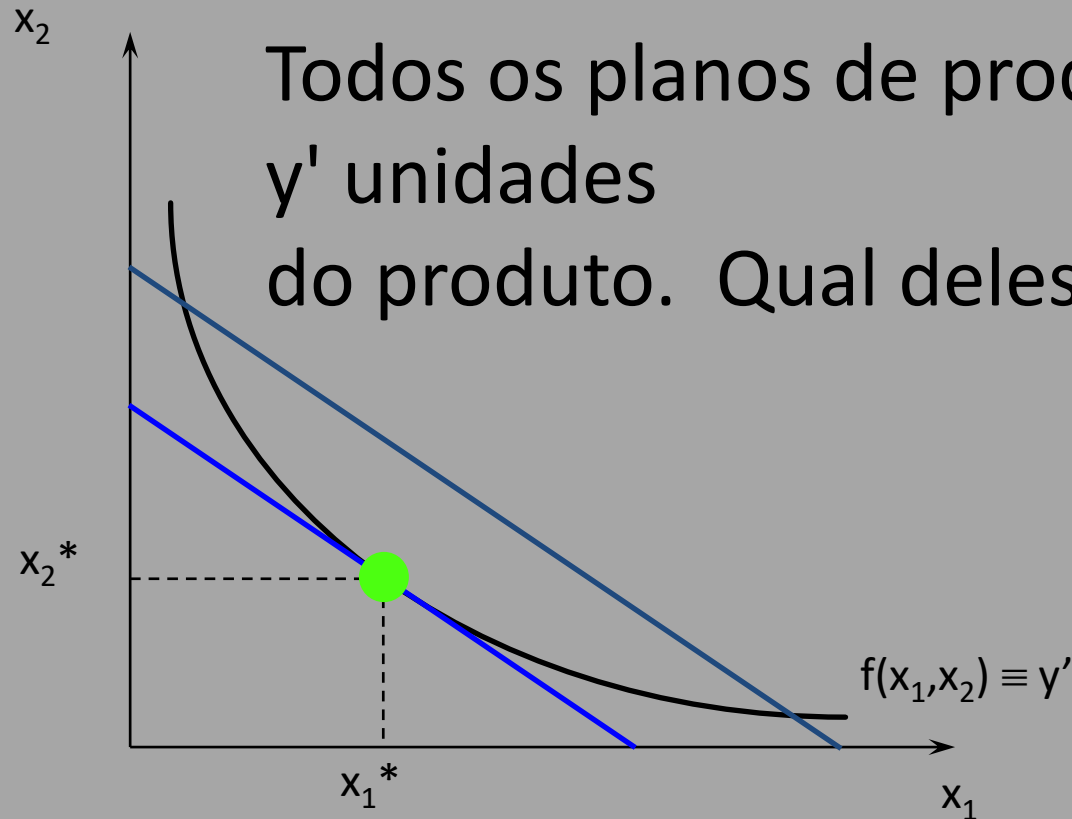
Minimização de Custos



Minimização de Custos



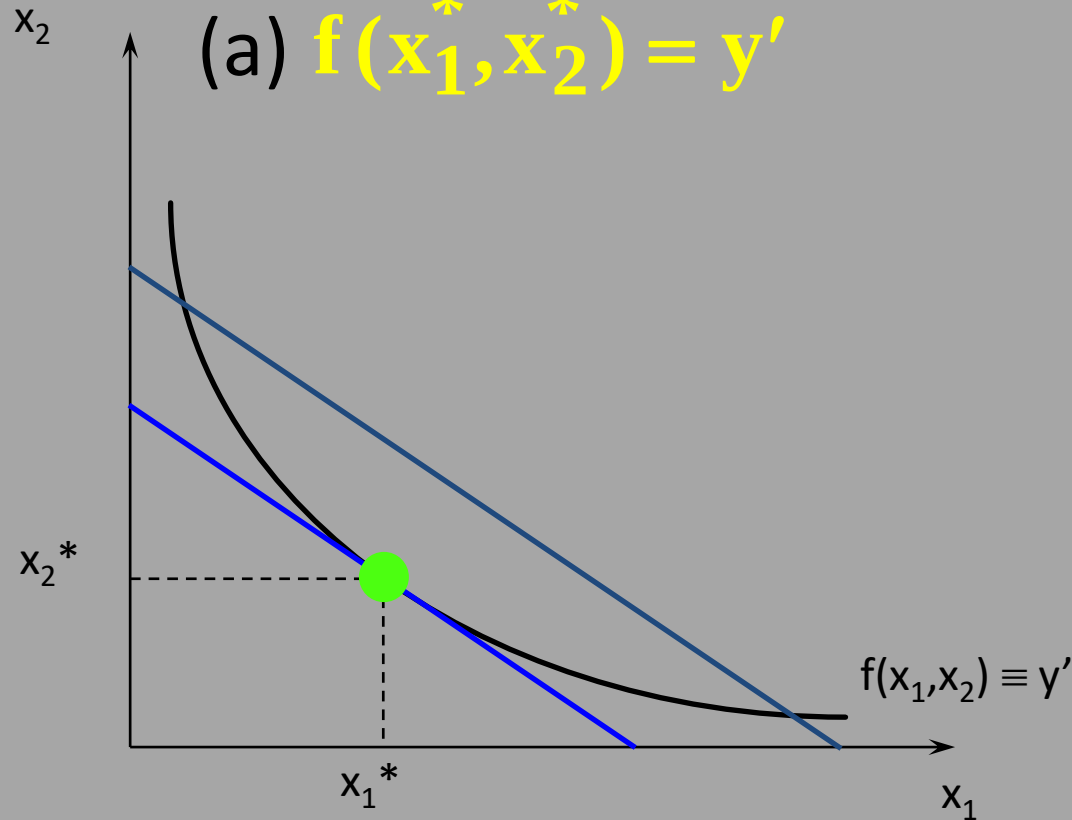
Minimização de Custos



Minimização de Custos

Em uma solução interior:

(a) $f(x_1^*, x_2^*) = y'$

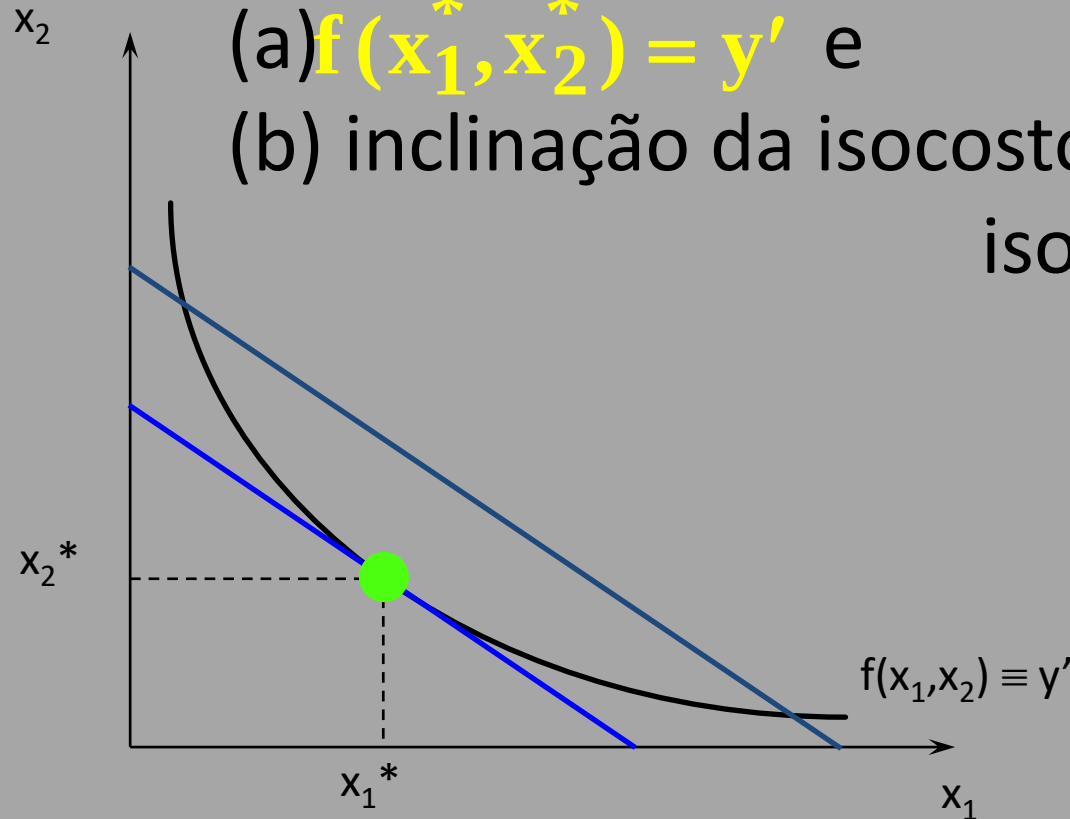


Minimização de Custos

Em uma solução interior:

(a) $f(x_1^*, x_2^*) = y'$ e

(b) inclinação da isocosto = inclinação da isoquanta



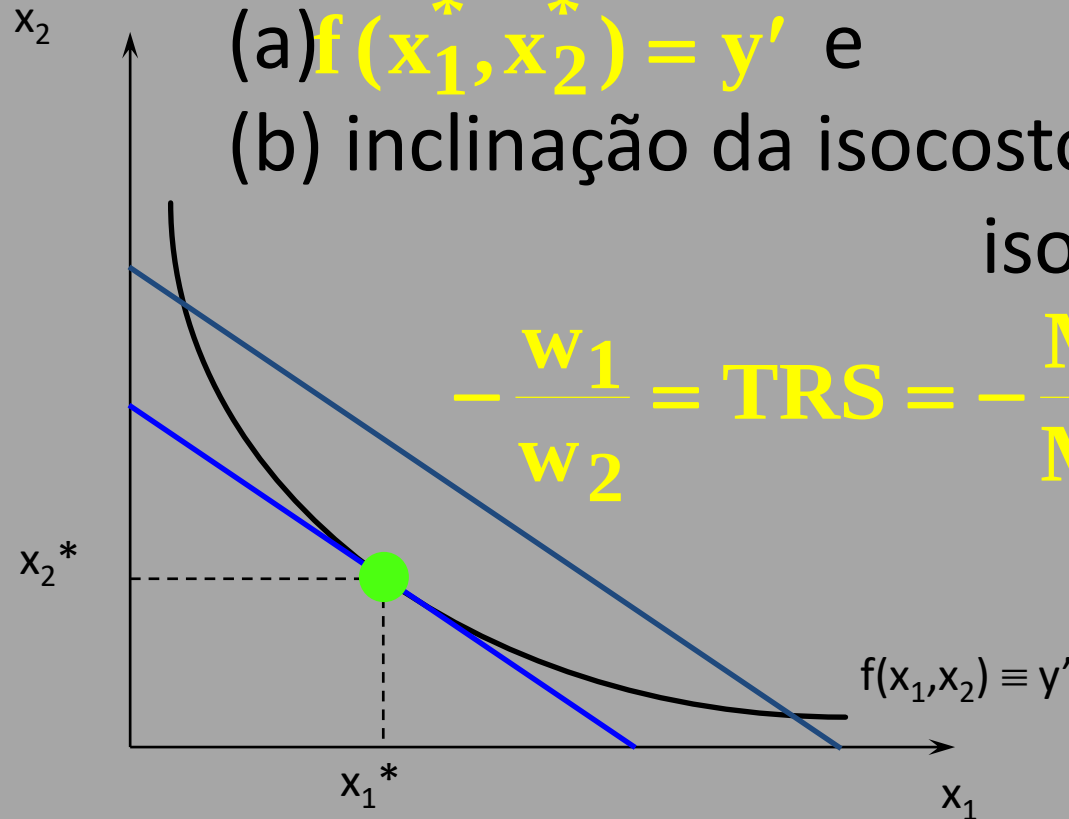
Minimização de Custos

Em uma solução interior:

(a) $f(x_1^*, x_2^*) = y'$ e

(b) inclinação da isocosto = inclinação da isoquanta, i.e.:

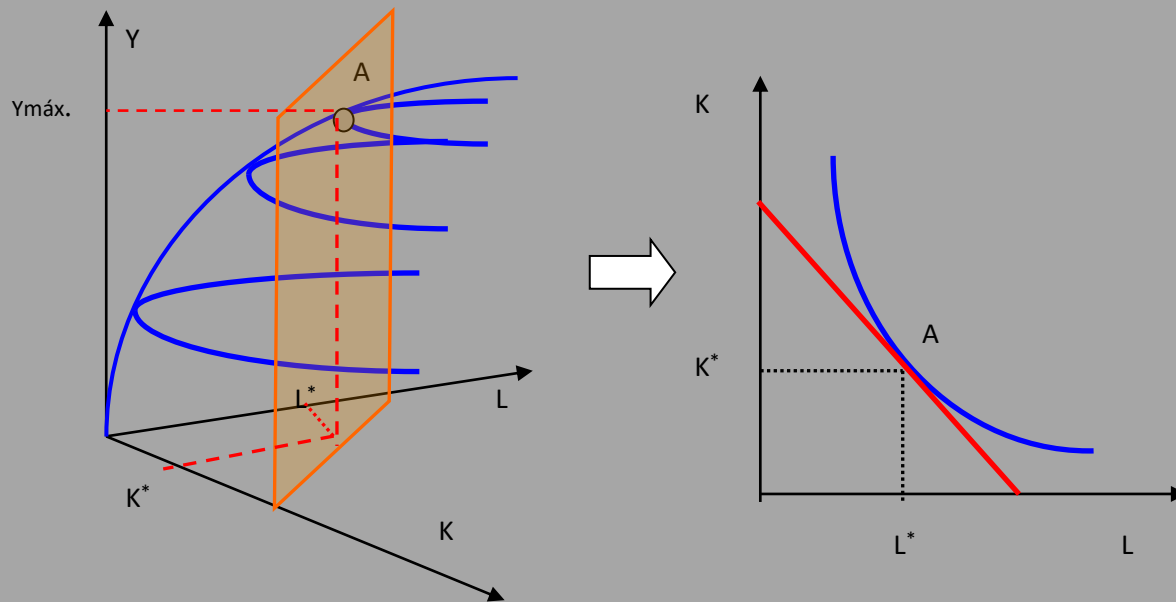
$$-\frac{w_1}{w_2} = TRS = -\frac{MP_1}{MP_2} \text{ at } (x_1^*, x_2^*).$$



Minimização de Custos no LP

$$\begin{array}{ll} \max_{K,L} Y = f(K,L) & \text{ou} \\ \text{s.a. } wL + rK = c \end{array}$$

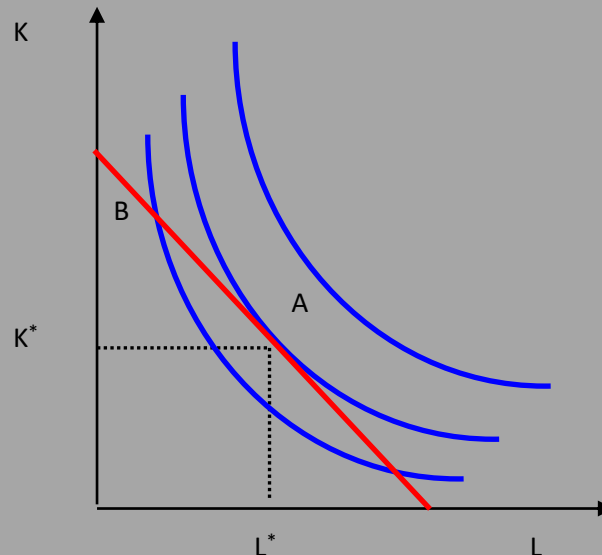
$$\begin{array}{ll} \min_{K,L} wL + rK & \\ \text{s.a. } f(K,L) = c \end{array}$$



- A solução dos dois problemas consiste em uma combinação de insumos (K^*, L^*)

Escolha no LP

- Em $A = (K^*, L^*)$, temos: $TMST = \frac{dK}{dL} = -\frac{PMg_L}{PMg_K} = -\frac{w}{r}$
- Em B a TMST supera a inclinação da isocusto:
 - vale a pena abdicar de capital para contratar trabalho



Funções de Demanda por Fatores

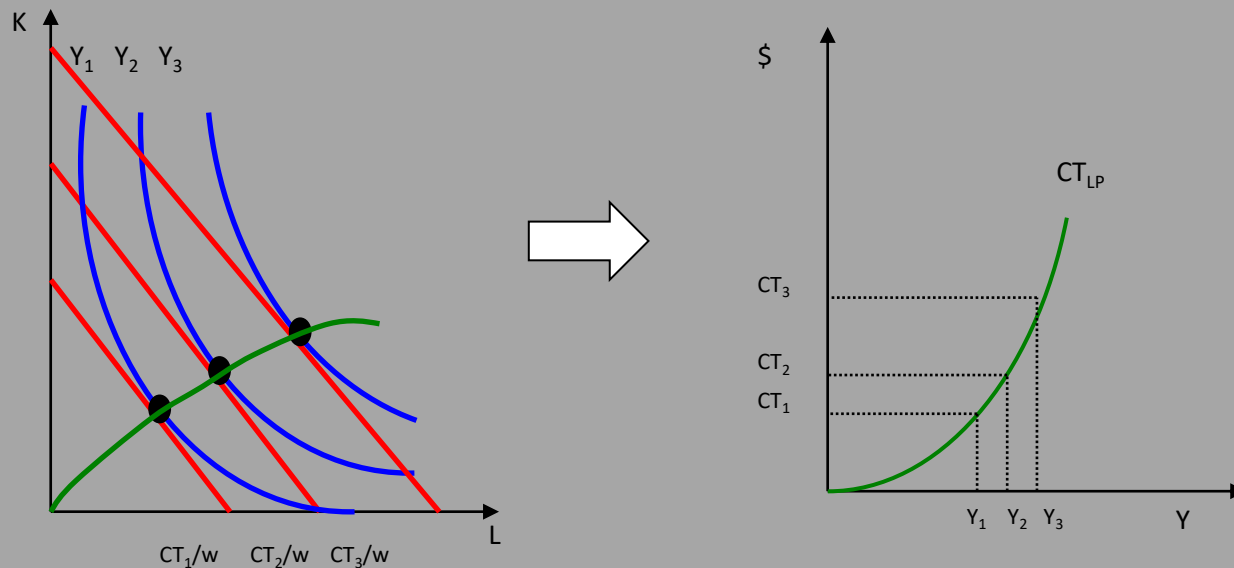
- O processo de minimização de custos gera as **funções de demanda condicional por fatores**, que indicam quanto de cada fator é demandando em função dos preços dos fatores e da quantidade produzida:

$$L^* = f(w,r,Y) \quad \text{e} \quad K^* = f(w,r,Y)$$

- Substituição econômica de fatores:
 - A escassez relativa dos insumos afeta seu preço relativo, modificando sua alocação
- A curva de custo é obtida pela substituição das demandas na definição do custo total:
 - $c(w,r,y) = wL^* + rK^*$

Curva de Custo no Longo Prazo

- Relaxando a restrição do problema, temos um caminho de expansão, que dá origem à curva de **custo total de longo prazo** (CT_{LP})



Exemplo de Minimização de Custo: Cobb-Douglas

- A função de produção cobb-douglas de uma empresa é
$$y = f(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}.$$
- Os preços dos insumos são w_1 e w_2 .
- Quais são as funções de demanda condicional dos fatores?

Exemplo de Minimização de Custo: Cobb-Douglas

No plano de produção (x_1^*, x_2^*) que minimiza o custo de produção de y unidades de produção:

(a) $y = (x_1^*)^{1/3} (x_2^*)^{2/3}$ e

(b)
$$-\frac{w_1}{w_2} = -\frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2} = -\frac{(1/3)(x_1^*)^{-2/3} (x_2^*)^{2/3}}{(2/3)(x_1^*)^{1/3} (x_2^*)^{-1/3}}$$
$$= -\frac{x_2^*}{2x_1^*}.$$

Exemplo de Minimização de Custo: Cobb-Douglas

$$(a) \quad y = (x_1^*)^{1/3} (x_2^*)^{2/3} \quad (b) \quad \frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2^*}{2x_1^*}.$$

Exemplo de Minimização de Custo: Cobb-Douglas

$$(a) \quad y = (x_1^*)^{1/3} (x_2^*)^{2/3} \quad (b) \quad \frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2^*}{2x_1^*}.$$

De (b),

$$x_2^* = \frac{2w_1}{w_2} x_1^*.$$

Exemplo de Minimização de Custo: Cobb-Douglas

$$(a) \quad y = (x_1^*)^{1/3} (x_2^*)^{2/3} \quad (b) \quad \frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2^*}{2x_1^*}.$$

De (b),

$$x_2^* = \frac{2w_1}{w_2} x_1^*.$$

Agora substitua em (a) para obter

$$y = (x_1^*)^{1/3} \left(\frac{2w_1}{w_2} x_1^* \right)^{2/3}$$

Exemplo de Minimização de Custo: Cobb-Douglas

$$(a) \quad y = (x_1^*)^{1/3} (x_2^*)^{2/3} \quad (b) \quad \frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2^*}{2x_1^*}.$$

De (b),

$$x_2^* = \frac{2w_1}{w_2} x_1^*.$$

Agora substitua em (a) para obter

$$y = (x_1^*)^{1/3} \left(\frac{2w_1}{w_2} x_1^* \right)^{2/3} = \left(\frac{2w_1}{w_2} \right)^{2/3} x_1^*.$$

Exemplo de Minimização de Custo: Cobb-Douglas

$$(a) \quad y = (x_1^*)^{1/3} (x_2^*)^{2/3} \quad (b) \quad \frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2^*}{2x_1^*}.$$

De (b), $x_2^* = \frac{2w_1}{w_2} x_1^*.$

Agora substitua em (a) para obter

$$y = (x_1^*)^{1/3} \left(\frac{2w_1}{w_2} x_1^* \right)^{2/3} = \left(\frac{2w_1}{w_2} \right)^{2/3} x_1^*.$$

Logo $x_1^* = \left(\frac{w_2}{2w_1} \right)^{2/3} y$ é a demanda condicional pelo insumo1.

Exemplo de Minimização de Custo: Cobb-Douglas

Como $x_2^* = \frac{2w_1}{w_2} x_1^*$ e $x_1^* = \left(\frac{w_2}{2w_1} \right)^{2/3} y$

$$x_2^* = \frac{2w_1}{w_2} \left(\frac{w_2}{2w_1} \right)^{2/3} y = \left(\frac{2w_1}{w_2} \right)^{1/3} y$$

é a demanda condicional pelo segundo insumo

Exemplo de Minimização de Custo: Cobb-Douglas

Assim, a combinação mais barata de fatores que geram a quantidade y do bem é:

$$\begin{aligned} & \left(x_1^*(w_1, w_2, y), x_2^*(w_1, w_2, y) \right) \\ &= \left(\left(\frac{w_2}{2w_1} \right)^{2/3} y, \left(\frac{2w_1}{w_2} \right)^{1/3} y \right). \end{aligned}$$

Exemplo de Minimização de Custo: Cobb-Douglas

Assim, a função de custo total da empresa é

$$c(w_1, w_2, y) = w_1 x_1^*(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^*(w_1, w_2, y)$$

Exemplo de Minimização de Custo: Cobb-Douglas

Assim, a função de custo total da empresa é

$$\begin{aligned} c(w_1, w_2, y) &= w_1 x_1^*(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^*(w_1, w_2, y) \\ &= w_1 \left(\frac{w_2}{2w_1} \right)^{2/3} y + w_2 \left(\frac{2w_1}{w_2} \right)^{1/3} y \end{aligned}$$

Exemplo de Minimização de Custo: Cobb-Douglas

Assim, a função de custo total da empresa é

$$\begin{aligned}c(w_1, w_2, y) &= w_1 x_1^*(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^*(w_1, w_2, y) \\&= w_1 \left(\frac{w_2}{2w_1} \right)^{2/3} y + w_2 \left(\frac{2w_1}{w_2} \right)^{1/3} y \\&= \left(\frac{1}{2} \right)^{2/3} w_1^{1/3} w_2^{2/3} y + 2^{1/3} w_1^{1/3} w_2^{2/3} y\end{aligned}$$

Exemplo de Minimização de Custo: Cobb-Douglas

Assim, a função de custo total da empresa é

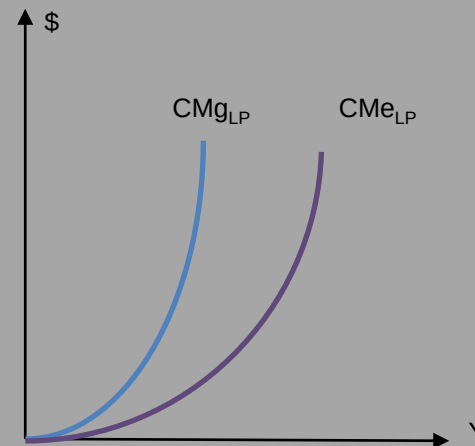
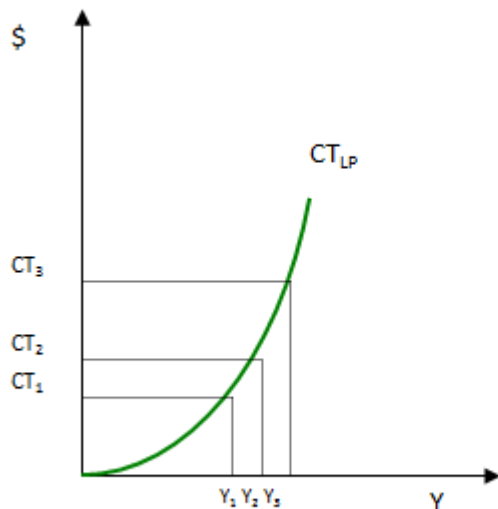
$$\begin{aligned}c(w_1, w_2, y) &= w_1 x_1^*(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^*(w_1, w_2, y) \\&= w_1 \left(\frac{w_2}{2w_1} \right)^{2/3} y + w_2 \left(\frac{2w_1}{w_2} \right)^{1/3} y \\&= \left(\frac{1}{2} \right)^{2/3} w_1^{1/3} w_2^{2/3} y + 2^{1/3} w_1^{1/3} w_2^{2/3} y \\&= 3 \left(\frac{w_1 w_2^2}{4} \right)^{1/3} y.\end{aligned}$$

Custos Médios e Marginais

- Os custos médio e marginal no longo prazo são definidos por:

$$CMe_{LP} = \frac{CT_{LP}}{Y}$$

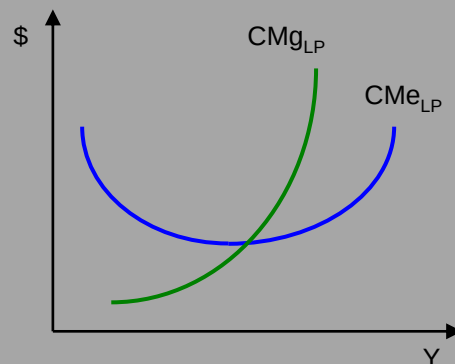
$$CMg_{LP} = \frac{dCT_{LP}}{dY}$$



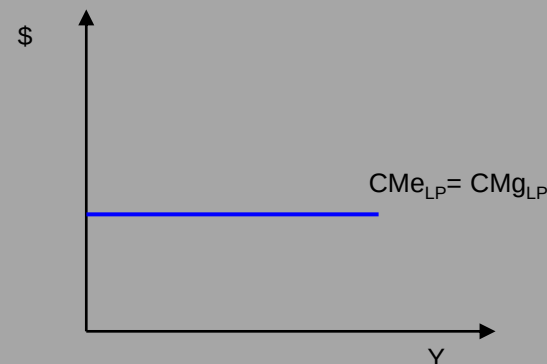
Custos Médios

- O formato da curva de custo médio depende dos retornos de escala
 - Retornos decrescentes: CMe crescente
 - Retornos constantes: CMe constante
 - Retornos crescentes: CMe decrescente

Caso Tradicional

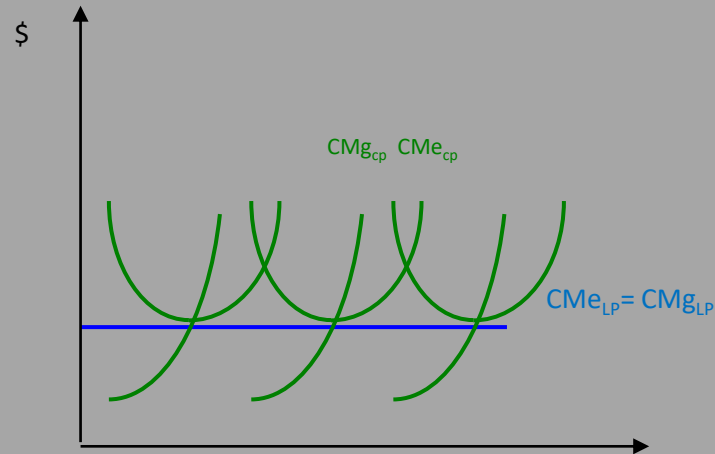


Retornos Constantes

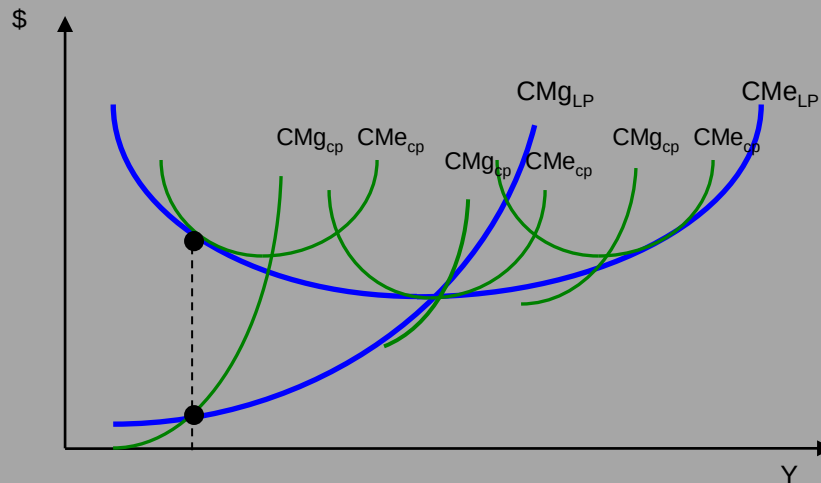


Custos no Curto e Longo Prazos

- Caso com Retorno Constante de Escala



- Caso usual



Exercício

(2008-6) De acordo com a teoria dos custos de produção, julgue as afirmações:

- (0) O custo de oportunidade do uso de um recurso econômico no longo prazo não precisa ser igual ao custo de oportunidade de seu uso no curto prazo.
- (1) Custo de oportunidade é um conceito absoluto, e não relativo.
- (2) Se a função de produção de uma firma é $f(K, L) = K + L$, em que K é capital e L trabalho e se $r > 0$ e $w > 0$ são, respectivamente, o custo de oportunidade do capital e do trabalho, então a função custo é $c(r, w, q) = q \min\{r, w\}$.
- (3) Se a função de produção de uma firma é $f(K, L) = \min\{K, L\}$, em que K é capital e L trabalho e se o custo de oportunidade do capital é $r > 0$ e o do trabalho é $w > 0$, então o custo marginal de cada unidade de produto é $r + w$.
- (4) Se a função custo de uma empresa é $C(q_x, q_y)$, em que q_x é a quantidade produzida de x e q_y é a quantidade produzida de y e se $C(10, 100) = 220$, $C(0, 100) = 160$ e $C(10, 0) = 70$, então a empresa não usufrui de economias de escopo ao produzir 10 unidades de x e 100 unidades de y .

solução:

F (4) Existem economias de escopo se a produção conjunta for mais barata do que a produção separada dos dois bens. No caso, o custo da produção separada é igual a \$230 (160+70), dez reais mais caro do que a produção conjunta. Existe portanto economia de escopo.

Exercício

1998- 5. Dada a função de produção $Q = 10 K^{0,5} L^{0,5}$ e o preço do capital (K) igual a R 4,00 e o preço do Trabalho (L) igual a R 4,00/hora, podemos concluir que a função custo total, médio e marginal de longo prazo serão dadas por:

(0) $CT = 12 q$; $C \text{ Médio} = 12$; $CMg = 12$

(1) $CT = 0,8q^2$; $C \text{ Médio} = 0,8 q$; $CMg = 1,6q$.

(2) $CT = 0,8 q$; $C \text{ Médio} = 0,8$; $CMg = 0,8$

(3) $CT = 10 q^2$; $C \text{ Médio} = 10q$; $CMg = 20q$.

(4) $CT = 0,5 q$; $C \text{ Médio} 0,5 q$; $CMg = 0,5$.

solução:

$$TMST = \frac{dK}{dL} = \frac{PMg_L}{PMg_K} = \frac{5K^{1/2}L^{-1/2}}{5L^{1/2}K^{-1/2}} = \frac{K}{L} = \frac{4}{4} = 1 \rightarrow K = L$$

$$y = 10\sqrt{KL} = 10L \rightarrow L = \frac{y}{10} = K$$

$$CT = 4L + 4K = 2.4 \frac{y}{10} = 0,8y$$

Exercício

(2009-4) Seja $Q = K^\alpha L^{1-\alpha}$ uma função de produção Cobb-Douglas. Julgue as afirmativas a seguir:

- (0) A demanda condicional pelo fator trabalho é $L^* = Q$.
- (1) Supondo que a quantidade produzida seja de 3 unidades, a remuneração do trabalho igual a 1, a remuneração do capital igual a 1 e que $\alpha = 0,5$, temos que a quantidade de trabalho demandada é igual a 3.
- (2) No longo prazo, a função custo associada a esta função de produção é do tipo ESC (Elasticidade de Substituição Constante), sendo que a elasticidade de substituição entre os fatores é 0,25.
- (3) Supondo os mesmos dados do item (1), temos que o custo total de produção é 6 (seis).
- (4) Esta função de produção, no curto-prazo, supondo que o capital seja fixo, possui um custo marginal decrescente em relação à quantidade de capital.

solução:

F (0) Teremos que resolver o problema:

$$\min K^r + L^w$$

$$K, L \quad \text{s.a.} \quad Q = K^\alpha L^{1-\alpha}$$

resolvendo, obtemos:

$$L = r^\alpha w^{-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^\alpha Q$$

$$K = r^{\alpha-1} w^{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\alpha-1} Q$$

V (1) Substituindo os valores indicados nas funções acima, obtemos:

$$K = L = 3$$

V (3) O custo total será então:

$$CT = wL + rK = 1.3 + 1.3 = 6$$

Exercício: continuação

F (2) A elasticidade de substituição é um conceito que mede, em termos percentuais, a variação da proporção capital-trabalho devida à variação na taxa marginal de substituição técnica:

$$\sigma = \frac{\frac{d(K/L)}{K/L}}{\frac{dTMST}{TMST}} = \frac{d \ln(K/L)}{d \ln |TMST|}$$

As funções do tipo CES, por definição, têm essa elasticidade constante. A função Cobb-Douglas, em particular, tem elasticidade igual a um:

$$TMST = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{K}{L} \rightarrow \ln TMST = \text{constante} + \ln \left(\frac{K}{L} \right) \rightarrow \sigma = 1$$

A função custo de longo prazo da função Cobb-Douglas:

$$CT = r^\alpha w^{1-\alpha} \frac{(1-\alpha)^{\alpha-1}}{\alpha^\alpha} Q$$

V (4) No curto prazo, os custos totais são $CT = wL + rK$, com K constante. Devemos substituir L nessa expressão pelo equivalente obtido a partir da função de produção, de modo a termos os custos em função da quantidade produzida.

$$Q = K^\alpha L^{1-\alpha} \rightarrow L = q^{\frac{1}{1-\alpha}} K^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \quad CT = wq^{\frac{1}{1-\alpha}} K^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} + rK$$

O custo marginal é obtido pela derivada dessa expressão:

$$CMg = \frac{dCT}{dQ} = \frac{w}{1-\alpha} q^{\frac{1}{1-\alpha}-1} K^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} = \frac{w}{1-\alpha} \left(\frac{Q}{K} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$