$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$

$$\boxed{\lim a_n = +\infty}$$

def. $\iff$ Para <u>todo</u> $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$\forall n \geq n_0 \implies a_n > M$

Exemplo

$(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$

$a_n = n$ $\qquad \lim a_n = +\infty$

Dado $M > 0$, $\exists n_0$ tal que $a_n > M$, $\forall n \geq n_0$.

(Prop. Arquimediana) $\qquad n_0 > M$

$n \geq n_0 > M$.

$(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \dots)$

$a_n = \sqrt{n}$ $\qquad \lim a_n = +\infty$.

Dado $M > 0$, <u>existe</u> $n_0 \in \mathbb{N}$ $\quad n_0 > M^2$ (pela p. Arq.)

$a_n > M, \quad \forall n \geq n_0$

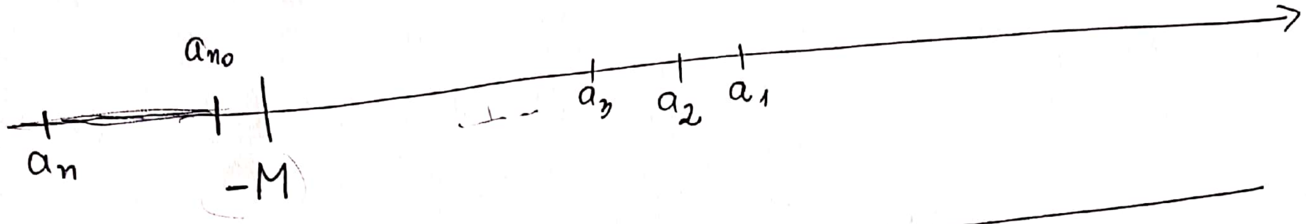
$\sqrt{n} > M, \quad \forall n \geq n_0$

$n > M^2$ $\qquad$ pois $\underline{n \geq n_0 > M^2}$

Dizemos que $\lim a_n = -\infty \iff$

Para todo $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$\forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n < -M$



$(a_n)_n$ $(b_n)_n$.

Vimos: se $\lim a_n = K \in \mathbb{R}$ e $\lim b_n = L \in \mathbb{R}$.

então $\lim (a_n + b_n) = K + L$

-

.

se $\lim a_n = +\infty$ e $\lim b_n = L$

$\Rightarrow \lim (a_n + b_n) = +\infty$.

Exemplos

① $\underbrace{a_n = n}_{\downarrow +\infty}$; $\underbrace{b_n = \frac{1}{n}}_{\downarrow 0}$ $\qquad \lim (a_n \cdot b_n) = \lim \cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} = 1$

② $\underbrace{a_n = n}_{\downarrow +\infty}$; $\underbrace{b_n = \frac{1}{n^2}}_{\downarrow 0}$ $\qquad \lim (a_n \cdot b_n) = \lim n \cdot \frac{1}{n^2} =$

$= \lim \frac{1}{n} = 0$

③ $\underbrace{a_n = n^2}_{\downarrow +\infty}$; $\underbrace{b_n = \frac{1}{n}}_{\downarrow 0}$ $\qquad \lim (a_n \cdot b_n) = \lim n^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim n$

$= +\infty$

indeterminação

(1) "$+\infty \cdot 0$" (Vide exemplos)

(2) "$\infty - \infty$"

(3) "$\frac{\infty}{\infty}$"

Lista 3 - Ex 7.

Séries

Dada uma sequência

$(a_1, a_2, a_3, \ldots)$

A expressão $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

é chamada <u>série</u>.

<u>Exemplos</u>

1. $a_n = 1, \ \forall n.$

$\sum a_n = 1 + 1 + 1 + \ldots$

2. $(a, ar, a \cdot r^2, ar^3, \ldots)$ (PG)

$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}$ <u>Série geométrica de razão r</u>

Como lidar com as séries?

<u>Somas parciais</u>:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$

Se a sequência das somas parciais $(S_n)_n$ for convergente e se $\lim S_n = S \in \mathbb{R}$ diremos que a série $\sum a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$

Caso contrário, a série é divergente.

Vimos, na aula passada:

Série geométrica $a + a\cdot r + a\cdot r^2 + \dots$ $(a \neq 0)$

$$S_n = a + a\cdot r + a\cdot r^2 + \dots + a\cdot r^{n-1}$$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (\text{se } r \neq 1)$$

$$\lim S_n = \frac{a}{1-r}, \quad \text{se } |r| < 1.$$
$$-1 < r < 1$$

se $r \leq -1$ ou $r > 1$, r^n $\begin{cases} \text{não existe} \\ \text{ou} \\ +\infty \quad (\text{se } r > 1) \end{cases}$

a série, nesse caso, diverge.

Se $r = 1$:

$$S_n = \underbrace{a + a + a + \dots + a}_{n \text{ vezes}} = n\cdot a$$

$$\lim S_n = a\cdot \lim n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a > 0 \\ -\infty, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Série geométrica converge} \iff |r| < 1}$$

Exemplos

1) $5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \dots$

É uma série geométrica, $a = 5$ e $r = -\frac{2}{3}$.

Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$, a série é convergente

e $S = \frac{a}{1-r} = \frac{5}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$

Exemplo 2 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

É uma série geométrica, $a = 1$, $r = x$.

Se $|x| < 1$, a série será convergente.

Se $|x| \geq 1$, a série será divergente.

Se $|x| < 1$: $\boxed{S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}}$

Série harmônica:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente

$$S_{2^m} > 1 + \frac{m}{2}$$

Exemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} = \frac{A(k+1) + Bk}{k(k+1)} = \frac{k(A+B) + A}{k(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow B = -1$$

$$\boxed{\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}, \quad \forall k \geq 1$$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

Portanto $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim \left(1 - \cancel{\frac{1}{n+1}}^{\to 0}\right)$

$= 1$

isto é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

<u>Teorema</u> (Critério do Termo geral)

Se uma série $\underbrace{\ }_{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$ é convergente então $\lim a_n = 0$.

<u>Demonstração</u> Sabemos que Σa_n é <u>convergente</u>.

isto é, existe $\lim S_n = S \in \mathbb{R}$.

$S_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) + a_n$

$S_n = S_{n-1} + a_n \quad \Rightarrow a_n = \underset{\downarrow\, S}{S_n} - \underset{\downarrow\, S}{S_{n-1}}$

$\lim a_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0.$

$\blacksquare$

Recíproca: "$\lim a_n = 0 \Rightarrow \Sigma a_n$ é convergente"

é <u>falsa</u>.

<u>Contra exemplo</u>: Série harmônica!

O teorema é usado para provar que uma série diverge (quando percebemos que não acontece $\lim a_n = 0$)

Exemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^2+1}$$

$$\boxed{a_n = \frac{n^2}{3n^2+1}}$$

termo geral

$$\lim a_n = \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}\left(3+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, pelo Critério do Termo geral, a série é divergente.

Teorema $\sum a_n$, $\sum b_n$ convergentes

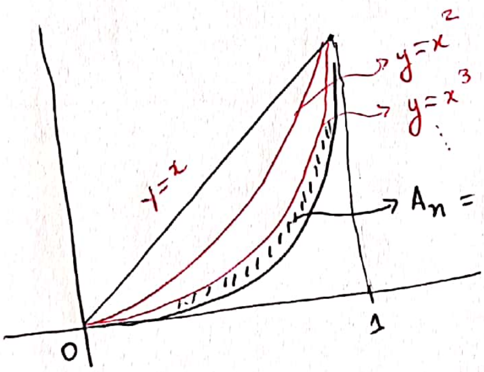
Então $\sum (a_n+b_n)$ é convergente para $\sum a_n + \sum b_n$

$\sum k \cdot a_n$ é convergente para $k \cdot \sum a_n$

$\sum (a_n - b_n)$ é convergente para $\sum a_n - \sum b_n$.

Exercícios interessantes: Stewart pag 660-661. Vol 2

$f_n(x) = x^n$, $0 \leq x \leq 1$



$\rightarrow A_n$ = área entre $y = x^{n-1}$ e $y = x^n$, $0 \leq x \leq 1$

$\downarrow$

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n(n+1)}$$

Critério da Integral

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad a_n > 0, \quad \forall n.$

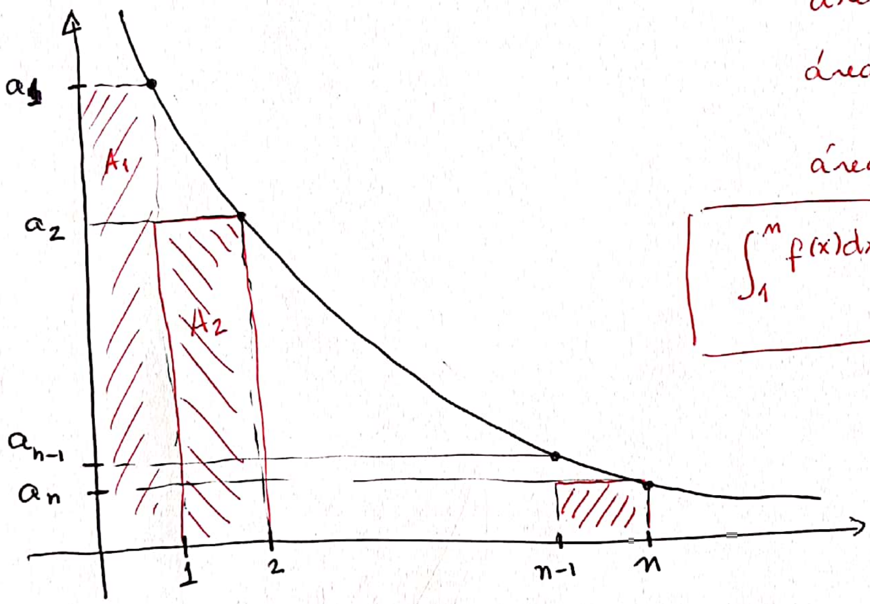
Defino $y = f(x)$, $\quad x \geq 1 \quad$ tal que $\quad f(n) = a_n$.

Se f for positiva, contínua, decrescente em $[1, \infty[$

Temos:

(a) Se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ for convergente, então $\sum a_n$ é convergente

(b) Se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ for divergente, então $\sum a_n$ é divergente.

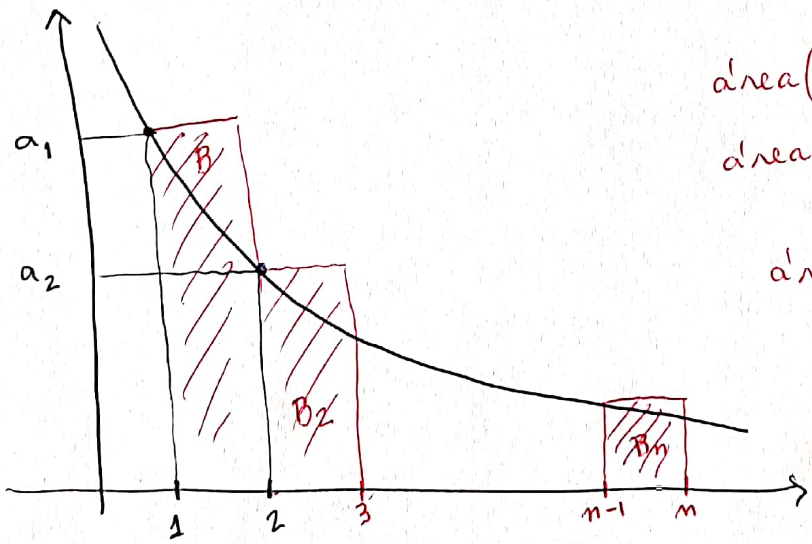


área$(A_1) = a_1 \cdot 1$

área$(A_2) = a_2 \cdot 1$

área$(A_n) = a_n \cdot 1$

$$\boxed{\int_1^{n} f(x)dx \geq a_2 + a_3 + \cdots + a_n.}$$



área$(B_1) = a_1 \cdot 1$

área$(B_2) = a_2 \cdot 1$

⋮

área$(B_n) = a_{n-1} \cdot 1$

$$\boxed{\int_1^{n} f(x) \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}$$