Interpolação

Interpolação Polinomial - continuação

Nelson Kuhl

IME/USP

5 de novembro de 2020

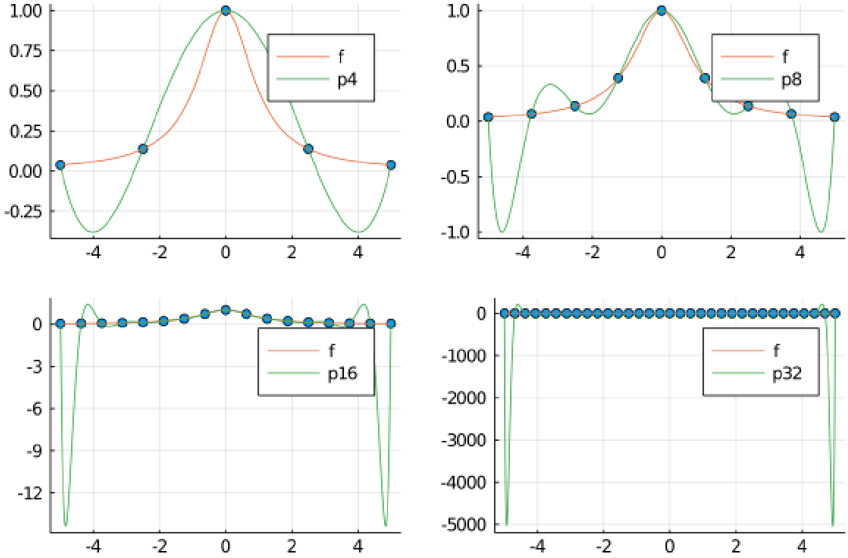
Exemplo de Runge

Como observado anteriormente, da fórmula do erro para a interpolação polinomial, não podemos garantir a convergência do polinômio interpolador para a função ao aumentarmos o número de pontos. Um exemplo clássico que ilustra este fato é o exemplo de Runge, no qual são obtidos os polinômios interpoladores para a função

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

em pontos igualmente espaçados no intervalo $[-5, 5]$. Gráficos com $n+1=$ 5, 9, 17 e 33 pontos são mostrados a seguir.

Exemplo de Runge



Exemplo de Runge

Os gráifcos sugerem que ao aumentarmos a quantidade de pontos igualmente espaçados, o polinômio interpolador irá oscilar com amplitudes cada vez maiores. Na verdade, pode-se provar que ao aumentarmos a quantidade de pontos igualmente espaçados, os polinômios interpoladores convergirão uniformemente para f se $|x| < x_c \approx 3.63$, ocorrendo divergência se $x_c < |x| < 5$. [1]

[1] James F. Epperson, *On the Runge example*, Amer. Math. Monthly 94 (1987), no. 4, 329–341

Exemplo de Runge

Os gráifcos sugerem que ao aumentarmos a quantidade de pontos igualmente espaçados, o polinômio interpolador irá oscilar com amplitudes cada vez maiores. Na verdade, pode-se provar que ao aumentarmos a quantidade de pontos igualmente espaçados, os polinômios interpoladores convergirão uniformemente para f se $|x| < x_c \approx 3.63$, ocorrendo divergência se $x_c < |x| < 5$. [1]

Em geral, interpolação de ordem alta com pontos igualmente espaçados não é boa para aproximações. Pode-se buscar uma escolha adequada de pontos, quando possível. Ou também usar interpolação polinomial por partes com os pontos dados, como veremos a seguir.

[1] James F. Epperson, *On the Runge example*, Amer. Math. Monthly 94 (1987), no. 4, 329–341

Interpolação linear por partes

Uma técnica muito flexível de interpolação para se evitar polinômios de grau alto é a interpolação polinomial por partes. O caso mais simples é o da interpolação linear por partes que descreveremos agora. Será apresentada também uma aplicação da fórmula do erro para a interpolação polinomial.

Interpolação linear por partes

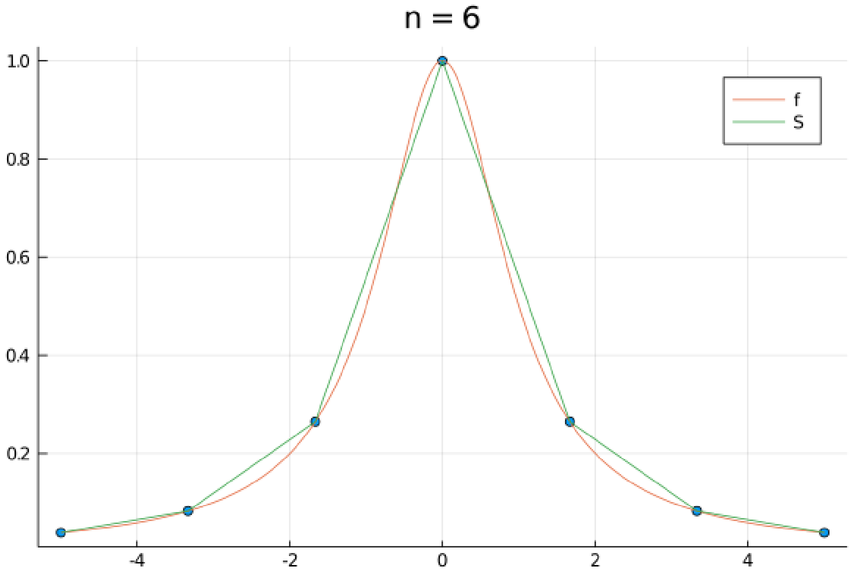
Uma técnica muito flexível de interpolação para se evitar polinômios de grau alto é a interpolação polinomial por partes. O caso mais simples é o da interpolação linear por partes que descreveremos agora. Será apresentada também uma aplicação da fórmula do erro para a interpolação polinomial.

Formulação do problema

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e seja $\Delta = \{x_k = a + kh,\ 0 \leq k \leq n\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ formada por $n + 1$ pontos equidistantes com espaçamento $h = \frac{b-a}{n}$. Deseja-se estimar o erro ao aproximarmos f por uma função $S_\Delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $S_\Delta(x_k) = f(x_k)$, $0 \leq k \leq n$, e tal que a restrição de S_Δ a cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$, é um polinômio de grau menor ou igual a 1.

Obs.: A função S_Δ é chamada de **spline linear** interpolador de f subordinado à partição Δ.

Interpolação linear por partes



Interpolação linear por partes

A idéia é estimarmos o erro em cada subintervalo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$, usando a fórmula do erro para a interpolação polinomial, e majorar uniformemente estas estimativas. Seja então S_k a restrição de S_Δ ao subintervalo I_k. Por definição, S_k é um polinômio de grau menor ou igual a 1 tal que $S_k(x_{k-1}) = f(x_{k-1})$ e $S_k(x_k) = f(x_k)$. Ou seja, S_k é o polinômio interpolador da tabela

x	x_{k-1}	x_k
y	$f(x_{k-1})$	$f(x_k)$

Usando a estimativa de erro para a interpolação com dois pontos temos

$$|f(x) - S_k(x)| \leq \frac{1}{2} \left(\max_{t \in I_k} |f''(t)| \right) |(x - x_{k-1})(x - x_k)|, \; x \in I_k.$$

Interpolação linear por partes

Para $x \in I_k$, temos $|(x - x_{k-1})(x - x_k)| = (x - x_{k-1})(x_k - x)$. Se definirmos

$$M_2 = \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|$$

então, como $I_k \subset [a, b]$, obtemos

$$|f(x) - S_k(x)| \leq \frac{M_2}{2}(x - x_{k-1})(x_k - x), \; x \in I_k.$$

Além disso,

$$0 \leq (x - x_{k-1})(x_k - x) \leq \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{2}\right)^2 = \frac{h^2}{4}, \; \forall x \in I_k,$$

o que nos dá finalmente uma estimativa uniforme

$$|f(x) - S_k(x)| \leq \frac{M_2}{8} h^2, \; \forall x \in I_k,$$

Interpolação linear por partes

que é a mesma para todos os subintervalos $I_k, 1 \leq k \leq n$.

Teorema 1

Sejam $f \in C^2([a,b])$, $\Delta = \{x_k = a + kh,\ 0 \leq k \leq n\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$ formada por $n+1$ pontos equidistantes com espaçamento $h = \frac{b-a}{n}$ e S_Δ o spline linear interpolador de f subordinado à partição. Então

$$|f(x) - S_\Delta(x)| \leq \frac{M_2}{8} h^2, \quad \forall x \in [a,b],$$

onde $M_2 = \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|$.

Interpolação linear por partes

que é a mesma para todos os subintervalos $I_k, 1 \leq k \leq n$.

Teorema 1

Sejam $f \in C^2([a, b])$, $\Delta = \{x_k = a + kh,\ 0 \leq k \leq n\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ formada por $n + 1$ pontos equidistantes com espaçamento $h = \frac{b-a}{n}$ e S_Δ o spline linear interpolador de f subordinado à partição. Então

$$|f(x) - S_\Delta(x)| \leq \frac{M_2}{8} h^2, \quad \forall x \in [a, b],$$

onde $M_2 = \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|$.

- Note que o erro tende a zero proporcionalmente a h^2. Esta conclusão independe do conhecimento do valor da constante M_2;

Interpolação linear por partes

que é a mesma para todos os subintervalos $I_k, 1 \leq k \leq n$.

Teorema 1

Sejam $f \in C^2([a,b])$, $\Delta = \{x_k = a + kh,\ 0 \leq k \leq n\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$ formada por $n+1$ pontos equidistantes com espaçamento $h = \frac{b-a}{n}$ e S_Δ o spline linear interpolador de f subordinado à partição. Então

$$|f(x) - S_\Delta(x)| \leq \frac{M_2}{8}h^2, \quad \forall x \in [a,b],$$

onde $M_2 = \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|$.

- Note que o erro tende a zero proporcionalmente a h^2. Esta conclusão independe do conhecimento do valor da constante M_2;
- se conhecermos o valor de M_2, podemos estimar o valor de h (ou quantos pontos precisamos usar) para garantirmos um erro menor do que uma certa tolerância.

Interpolação linear por partes

Para o exemplo de Runge onde

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5],$$

temos

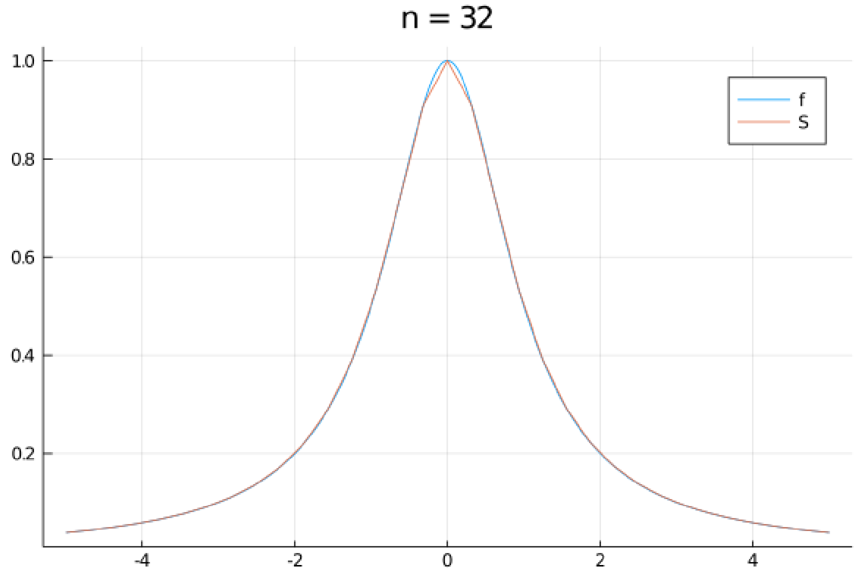
$$f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} \Longrightarrow M_2 = 2,$$

o que nos dá

$$|f(x) - S_\Delta(x)| \leq \frac{h^2}{4}, \quad \forall x \in [-5, 5].$$

Por exemplo, para 33 pontos equidistantes, $h = 10/32 = 0.3125$ e obtemos a esimativa de erro da ordem de 0.025 (compare com o gráfico do polinômio interpolador de grau 32).

Interpolação linear por partes



Interpolação linear por partes

Se quisermos também especificar h para garantir o erro máximo menor do que uma certa tolerância ϵ, basta impor

$$\frac{h^2}{4} < \epsilon \Longrightarrow h < 2\sqrt{\epsilon}.$$

Por exemplo, para um erro menor do que 0.01, escolhemos $h < 0.2$ (ou $n > 50$). Como o número de pontos é $n + 1$, se usarmos 52 pontos igualmente espaçados, garantimos que o erro entre o spline linear interpolador e a função será menor do que 0.01 no intervalo $[-5, 5]$.