Exercícios : Caminhada Aleatória ou Movimento Browniano

1) (a) Faça uma tabela com os valores da distribuição binomial $P(n)$ para $N = 10$ quando $p = 0,5$, e $p = 0,8$. (b) Estas distribuições são simétricas? (c) Determine o valor mais provável, n_{mp}, o valor médio $\langle n \rangle$ e o valor quadrático médio $\langle n^2 \rangle$ para os dois casos.

2) Num caso geral do movimento Browniano em que $p \neq q$, sabendo que x é o deslocamento onde cada passo tem tamanho l e duração τ, mostre que: (a) $x_0 = \langle x \rangle = (p-q)Nl$ e (b) $\sigma_x^2 = 4Npql^2$. Considere que o coeficiente de difusão é $D = l^2/2\tau$: (c) escreva a distribuição Gaussiana, $P(x,t)$ que descreve a probabilidade de encontra a partícula na posição x no tempo t. (d) Faça o gráfico para $p = 0,6$ e $p = 0,8$ em dois tempos diferentes, $t_2 = 2t_1$.

3) Uma pessoa embriagada anda cambaleando com um movimento muito parecido com um movimento Browniano em 1D com a probabilidade de dar um passo para direita de 0,5. Considere que cada passo dessa pessoa tem cerca de 0,5m e dura cerca de 4s (a) Qual é a posição média desta pessoa após 100 e 1000 passos? (b) Qual o coeficiente de difusão desse movimento? (c) Quanto tempo essa pessoa demoraria para percorrer 1km com esse movimento e com um movimento uniforme?

4) Resolva o problema anterior considerando a probabilidade de dar um passo para direita de 0,55. Discuta a diferença dos dois movimentos.

Relações matemáticas importantes: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$; $x \ll 1 \rightarrow e^x \cong 1 + x$;

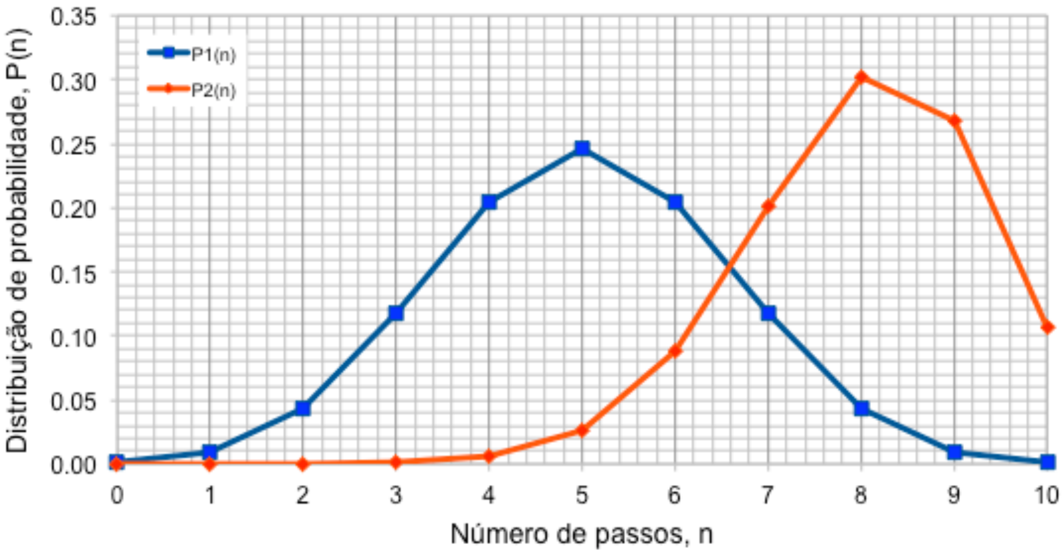
Dados:
1 u.m.a. = 1,66x10^{-27} kg; 1ns = 10^{-9} s; 1 Å = 10^{-10} m; 1 atm ≅ 10^5 Pa; k = 1,38x10^{-23} J/K.
m(He) = 4 u.m.a., m(C)= 12 u.m.a., m(O)= 16 u.m.a., $m(O_2)$ = 32 u.m.a., $m(N_2)$ = 28 u.m.a. e m(Ar) = 39,95 u.m.a.

Formulário:

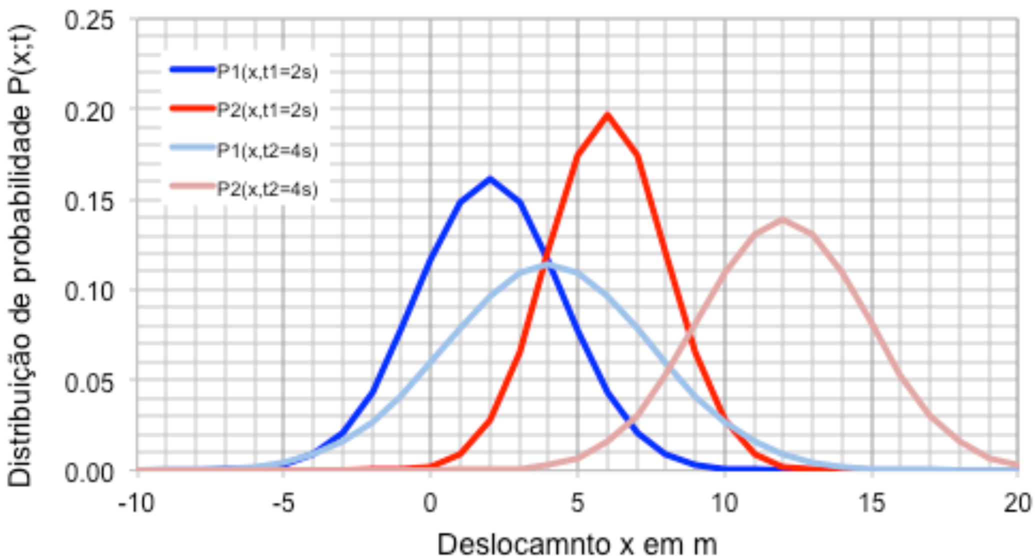
$G_n = \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x^2} dx \implies G_{2i} = \frac{1\cdot 3 \cdots (2i-1)}{2^{i+1}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2i+1}}}$ e $G_{2i+1} = \frac{i!}{2\alpha^{i+1}}$ $P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$; $P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(n-n_0)^2}{2\sigma_n^2}}$; $\langle n \rangle = Np$; $\langle n^2 \rangle = Np(q+Np)$; $\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$; $D = \frac{2l^2pq}{\tau}$; $D = \frac{kT}{6\pi a\eta}$; $dxdydz = 4\pi r^2 dr$; $dxdy = 2\pi r dr$; $f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$; $v_{qm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$; $\beta = (1/kT)$; $dp(\Gamma) = (1/Z)e^{-\beta E}\, d\Gamma$; $Z = z^N$; $z = \int \ldots \int e^{-\beta E_i}\, d\Gamma_i$; $\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}(lnZ)$; $F = -\left(\frac{1}{\beta}\right) lnZ$; $P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}$; $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}$; $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\rho_N \pi d^2}$; $P = \frac{\rho}{3}\langle v^2 \rangle$;

Respostas:
1)

n	N!	n!	(N – n)!	p1^n	p2^n	q1^(N – n)	q2^(N – n)	P1(n)	P2(n)	<n> = Np	<n> = Np
0	3628800	1	3628800	1.00000	1.00000	9.766E-04	1.024E-07	9.766E-04	1.024E-07	5	8
1	3628800	1	362880	0.50000	0.80000	1.953E-03	5.120E-07	9.766E-03	4.096E-06		
2	3628800	2	40320	0.25000	0.64000	3.906E-03	2.560E-06	4.395E-02	7.373E-05	nmp (gráfico)	nmp (gráfico)
3	3628800	6	5040	0.12500	0.51200	7.813E-03	1.280E-05	1.172E-01	7.864E-04	5	8
4	3628800	24	720	0.06250	0.40960	1.563E-02	6.400E-05	2.051E-01	5.505E-03		
5	3628800	120	120	0.03125	0.32768	3.125E-02	3.200E-04	2.461E-01	2.642E-02		
6	3628800	720	24	0.01563	0.26214	6.250E-02	1.600E-03	2.051E-01	8.808E-02	<n²> = Np.(q + Np)	<n²> = Np.(q + Np)
7	3628800	5040	6	0.00781	0.20972	1.250E-01	8.000E-03	1.172E-01	2.013E-01	27.5	65.6
8	3628800	40320	2	0.00391	0.16777	2.500E-01	4.000E-02	4.395E-02	3.020E-01		
9	3628800	362880	1	0.00195	0.13422	5.000E-01	2.000E-01	9.766E-03	2.684E-01		
10	3628800	3628800	1	0.00098	0.10737	1.000E+00	1.000E+00	9.766E-04	1.074E-01		



2)



3) (a) $\langle x \rangle = 0$ para 100 e 1000 passos; (b) 3,125x10^{-5} m^2/s; (c) com MRU t = 8x10^3 s e com MB t = 1,8x10^6 s (considere quanto a ponta da distribuição chega em 1km), ou seja no MB são cerca de 225 vezes mais tempo que no MRU.

4) (a) $\langle x \rangle = 5$ m para 100 e $\langle x \rangle = 50$ m 1000 passos; (b) 3,093x10^{-2} m^2/s; (c) com MRU t = 8x10^3 s e com MB t = 3,3x10^4 s (considere quanto a ponta da distribuição chega em 1km), ou seja no MB são cerca de 4 vezes mais tempo que no MRU.