ACTIO: Docência em Ciências
ISSN: 2525-8923

http://periodicos.utfpr.edu.br/actio

Paradoxos falsídicos: os primeiros enfrentamentos do conceito de infinito no contexto da ciência matemática

Gisele de Lourdes Monteiro
E-mail: giselemonteiro@icloud.com
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), Rio Claro, São Paulo, Brasil.

Fabiane Mondini
E-mail: fabiane.mondini@unesp.br
http://orcid.org/0000-0003-4975-6637
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), Guaratinguetá, São Paulo, Brasil.

RESUMO

O artigo apresenta resultados de uma pesquisa teórica que objetivou estudar o infinito e a relação deste conceito matemático com os paradoxos falsídicos a partir de exemplos dados por Zenão, contrários a concepção atomista de tempo e espaço. Mais especificamente, estudamos os paradoxos da Dicotomia, de Aquiles, que argumentam contra a hipótese de o espaço ser dividido infinitamente. Investigamos, também, os paradoxos do Estádio e da Flecha, que contradizem a hipótese do espaço ser dividido infinitamente e questionam a possibilidade de um segmento ser formado por uma quantidade infinita de divisões. Embora, na atualidade, estejamos acostumados a lidar diariamente, mesmo que de modo intuitivo, com a ideia de velocidade e movimento, esses são, sem dúvida, conceitos abstratos e deve-se a isso a importância dos paradoxos de Zenão: por expor um primeiro pensar sistemático sobre o assumo. O paradoxo da Flecha e o do Estádio são de fato reais se o tempo for composto por unidades mínimas indivisíveis e o espaço por pontos discretos. Em contrapartida, se tempo e espaço forem considerados contínuos, surgem os paradoxos da Dicotomia de Aquiles. Dessa forma, Zenão cerca por todos os lados a ideia de movimento e de velocidade, mostrando controvérsias contundentes que por vezes passam despercebidas aos olhos já acostumados a observar o movimento. Por meio da dialética, partindo das premissas aparentemente consistentes e chegando a conclusões absurdas, Zenão apresentou argumentos para provar a fragilidade dos conceitos de multiplicidade e divisibilidade, adotados pela escola pitagórica. Esses paradoxos, fundamentados na filosofia de Parménides, apresentavam situações para sustentar a impossibilidade do movimento, considerando-o uma ilusão da percepção do mundo sensível e não uma verdade do mundo inteligível, que caracteriza o ser como único, imutável, infinito e imóvel.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. História da Matemática. Infinito. Paradoxo.

INTRODUÇÃO

Historicamente, atribuímos aos pré-socráticos as primeiras preocupações com o infinito. Desde sua origem, as ideias envolvendo o infinito são controversas e causadoras de perplexidade ao pensamento humano. Considerações dessa ordem aguçaram a curiosidade sobre o sentido de infinito para a Matemática e, consequentemente, sobre os chamados paradoxos desta ciência, que são elaborados a partir desse conceito, tais como os paradoxos de Zenão.

O conceito de infinito na Matemática é abstrato, contrário à intuição, bastante complexo à compreensão humana e sempre causou um desamparo lógico para os que se aventuraram na busca por compreendê-lo. Foi tema de intensas reflexões filosóficas e responsável pelo surgimento de vários paradoxos ao longo da História da Matemática. O infinito é controverso, tanto na sua forma atual, como potencial, e é um conceito que percorre todo o desenvolvimento da Matemática, desde o estudo dos números irracionais no século VI a.C. até os números hiper-reais do século XXI (MACHADO; SCHUCK; WAGNER, 2013).

Muitos matemáticos já se dedicaram a compreender este tema que sempre suscitou dúvidas e questionamentos. A incompreensão do infinito gerou problemas inexplicáveis e que permaneceram por muito tempo como desafio. Com o objetivo de compreender o infinito nos paradoxos falsídicos, elaboramos este texto com a intenção de apresentar uma discussão sobre a constituição desse conceito. Trata-se de um estudo teórico, histórico, analítico e reflexivo, que por meio da leitura atenta de outras pesquisas, discute o assunto e apresenta uma compreensão sobre a sistematização dessa ideia ao longo da História da Matemática.

Esclarecemos que compreendemos a história dessa ciência como "uma produção" (VALENTE, 2007, p. 34). Partimos dos rastros deixados por esse conceito no passado — e que permanecem no presente —, e sobre eles nos debruçamos para produzir conhecimento. O papel do historiador consiste em efetuar um trabalho sobre tais traços para construir os fatos. Desse modo, um fato não é outra coisa que o resultado de uma elaboração, de um raciocínio, de uma compreensão, a partir das marcas do passado, segundo as regras de uma crítica (VALENTE, 2007, p. 34).

Contudo, a história que se elabora não consiste simplesmente na explicação de fatos. A produção da história tampouco é o encadeamento deles no tempo, em busca de explicações a *posteriori*. O ofício do historiador não parte dos fatos como um dado a *priori* (VALENTE, 2007, p. 34). Nossa intenção é trazer à comunidade um estudo histórico, em que o passado não nos é dado *a priori,* e a história aqui apresentada é parte de um processo interpretativo e subjetivo, que se expõe ao diálogo com a comunidade, buscando legitimidade e validação (VALENTE, 2007, p. 36).

O CONTRASSENSO DOS PARADOXOS MATEMÁTICOS

O vocábulo paradoxo é composto, etimologicamente, pelo prefixo grego "*para*" (contra) e pelo sufixo "*doxa*" (senso). Ou seja, um paradoxo é uma afirmação que expressa ou parece expressar uma incoerência lógica, uma sequência de pensamentos que leva a um absurdo, uma ideia contrária ao senso comum. De acordo com o dicionário de Língua Portuguesa, paradoxo "é uma opinião ou proposição contrária ao senso comum; contrassenso, disparate. Falta de coerência ou de lógica [...]" (MICHAELIS, 2015, s. p.), ou ainda, "certo tipo de pensamento que contraria os princípios que costumam nortear o pensamento humano ou desafia o conhecimento e a crença da maioria dos seres humanos" (MICHAELIS, 2015, s. p.). Segundo Abbagnano (1998), paradoxo também pode ser definido como um sistema de crenças, contrárias a opinião da maioria.

> Aristóteles, em Refutações sofísticas (cap. 12), considera a redução de um discurso a uma opinião paradoxal como o segundo fim da Sofística (o primeiro é a refutação, ou seja, provar a falsidade da asserção do adversário). Bernhard Bolzano intitulou Paradoxos do infinito (1851) o livro no qual introduziu o conceito de infinito como um tipo especial de grandeza, dotado de características próprias, e não mais como limite de uma série. [...]. No sentido religioso, chamou-se Paradoxo a afirmação dos direitos da fé e da verdade do seu conteúdo em oposição às exigências da razão (ABBAGNANO, 1998, p. 742).

Ainda, de acordo com Dias (1999) em seu livro *Compêndios de Matemática e Lógica Matemática*,

> Paradoxo é um argumento que produz uma conclusão surpreendente, à qual é contrária à nossa intuição. Os paradoxos podem ser classificados em Paradoxos Verídicos (aqueles que apresentam conclusões verdadeiras) e em Paradoxos Falsídicos (aqueles que apresentam conclusões falsas) (DIAS, 1999, p. 53).

Como se pode perceber, as definições dadas pela filosofia, matemática e Língua Portuguesa não estão em contradição, embora cada área apresente sua especificidade.

No contexto deste trabalho apresentamos o termo paradoxo em sua acepção que designa uma proposição ou crença contrária ao senso comum e à intuição. Para efeitos didáticos, vamos utilizar a classificação adotada por Quine (1976), a saber: paradoxos falsídicos (proposições aparentemente verdadeiras, no entanto falsas), paradoxos verídicos (proposições aparentemente falsas, no entanto verdadeiras) e antinomias (afirmações impossíveis de ser classificadas como falsas ou verdadeiras)[1].

Os paradoxos foram de suma importância para o desenvolvimento da Matemática, pois na busca de solução para o desamparo lógico que eles causavam é que foi desenvolvido o rigor matemático, em especial na área da lógica, bem como muitas outras ideias matemáticas.

Para identificar um paradoxo é necessário observar características implícitas ou explícitas do argumento que leva a uma sanção aparentemente falsa ou inconsistente. Quando a afirmação é falsa ou incoerente, surge a necessidade de refutá-la. Porém, nem sempre isto é imediato, haja vista que muitas vezes o argumento é aparentemente consistente. Por exemplo, a declaração "esta afirmação é falsa" é paradoxal, porque se a declaração for falsa é verdadeira e se for verdadeira é falsa. Afirmações deste tipo são controversas à ideia de que não há frases declarativas com valores diferentes de verdadeiro ou falso. Desta forma, percebe-se que nem sempre é simples verificar que um argumento, ou conjunto deles, ocasiona paradoxos. Para resolver tal empasse, deve-se mostrar que o argumento em que se baseia não é coerente, seja porque é inválido ou porque se fundamenta em premissas falsas.

Os paradoxos falsídicos, objetos de estudo desta pesquisa, são aqueles cujos argumentos são aparentemente consistentes, porém, nos levam a conclusões absurdas. Dentre esses paradoxos estão os de Zenão, que partem de argumentos a *priori* consistentes e chegam à conclusão inconcebível da impossibilidade do movimento. Em suma, os paradoxos falsídicos apresentam conclusões sempre falsas e a inconsistência se encontra em algum dos argumentos ou em alguma inferência.

PARADOXOS DE ZENÃO

Durante o século V a.C., as ideias pitagóricas sofreram algumas críticas, provenientes de outra corrente filosófica, fundada por Parménides[2] de Eleia[3] (515 – 450 a.C.). A escola pitagórica, mais direcionada para o abstrato, afirmava que o número, em toda a sua pluralidade, era o constituinte básico de todos os fenômenos. Este conceito atomístico de número, representado pelos números figurativos, foi fortemente questionado pelos seguidores da escola eleática. "O artigo de fé básico dos eleáticos era a unidade e permanência do ser, visão que contrastava com as ideias pitagóricas de multiplicidade e mudança" (Boyer, 1996, p. 51). Zenão de Eleia, um dos discípulos mais conhecido dessa escola, escreveu um livro contendo 40 paradoxos sobre a impossibilidade do movimento. Essa obra foi perdida, mas seu trabalho foi transmitido para outras escolas, principalmente a de Platão e a de Aristóteles, o que possibilitou o conhecimento de seu trabalho na atualidade. Dentre os paradoxos de Zenão, destacamos: Dicotomia, Aquiles, Flecha e Estádio, todos paradoxos classificados como falsídicos.

Em seus paradoxos, Zenão apresenta argumentos para provar a fragilidade dos conceitos de multiplicidade e divisibilidade. Ele adotava a dialética partindo das premissas aparentemente consistentes e chegando a conclusões absurdas como, por exemplo, a impossibilidade do movimento (Pessoa JR, 2008, p. 7; Boyer, 1996, p. 51).

Parménides foi o fundador da escola eleática e mentor de três princípios básicos, a saber: o princípio da identidade, o princípio da unidade e o princípio da imutabilidade. Todavia, na Matemática, em sua época, havia dois tipos de concepções que divergiam. Uma delas tratava dos elementos discretos separados e indivisíveis, ou seja, os números. A outra dizia respeito à continuidade, isto é, tratava de segmentos de retas e medidas de um modo geral com a propriedade de serem infinitamente divisíveis. O que é importante observar é que esse fato é contrário ao princípio da identidade. E foi desse conflito entre discreto e contínuo que nasceram os paradoxos de Zenão (Rezende, 2003, p. 94-95).

Zenão defendia as ideias de seu mestre, exaltando a unicidade e permanência em detrimento da pluralidade[4] e do movimento. Seu método consistia em supor uma tese e, a partir disso, desenvolver uma consequência que fosse contrária à sua suposição e, dessa forma, chegar ao absurdo (Pessoa JR, 2008, p. 7).

A escola pitagórica acreditava que o espaço e o tempo podiam ser constituídos de pontos e instantes, respectivamente. Por outro lado, o tempo e o espaço também possuem a propriedade conhecida como continuidade. Agora, “suponha-se que os elementos terminais que constituíam uma pluralidade, de um lado possuíam as características da unidade geométrica – o ponto – e por outro possuíam certas características de unidade numérica” (Boyer, 1996, p. 51). Esse foi o ponto culminante dos paradoxos e foi contra essa dualidade que Zenão propôs seus paradoxos.

De acordo com Brolezzi (1996, p. 22), a questão “está em se considerar tempo contínuo e espaço discreto, ou vice-versa. Os paradoxos de Zenão recolhem essa sensação de certo desamparo intuitivo, pois relatam uma situação de perplexidade comum frente à continuidade e ao infinito”.

Com esses paradoxos Zenão queria atacar a existência do movimento, que de acordo com ele não passava de ilusões provocadas pelos sentidos humano. Porém, é importe lembrar que Zenão era um eleata e sobretudo filósofo e lógico, portanto, questões como da impossibilidade do movimento eram abordadas por essa escola muito mais filosoficamente do que matematicamente. Vale ainda ressaltar que esses paradoxos contribuíram para o desenvolvimento do raciocínio matemático em relação ao rigor lógico, pois eles provocaram, desde a antiguidade até os dias atuais, muitos pesquisadores a buscarem soluções para o impasse gerado. Essas tentativas de explicação conduziram a muitas reflexões sobre o tema, e tais paradoxos foram considerados insolúveis até a criação do cálculo e o desenvolvimento das ideias de continuidade e infinito, conforme aponta Monteiro (2008),

> Para os matemáticos gregos, que não tinham uma real concepção de convergência em particular para o infinito, estes raciocínios eram incompreensíveis. Aristóteles considerou-os e resolveu pô-los de parte, ficando ao “abandono” por quase 2500 anos. Hoje, com o desenvolvimento da Matemática, nomeadamente no estudo de somas infinitas e de conjuntos infinitos, estes Paradoxos podem ser explicados de um modo razoavelmente satisfatório. Mas ainda agora, o debate continua sobre a validade dos Paradoxos e as suas racionalizações (MONTEIRO, 2008, p.12).

Zenão, em seus paradoxos da Dicotomia e de Aquiles, argumenta contra a hipótese de o espaço ser dividido infinitamente. Já nos paradoxos da Flecha e do Estádio, ele questiona a possibilidade de um segmento ser formado por uma quantidade finita de divisões. Sem utilizar a ideia de indivisibilidade do tempo, ou seja, unidade mínima de tempo (instantes), o raciocínio de Zenão não faria sentido. O paradoxo da Flecha contradiz os defensores da concepção atomista de tempo e espaço, pois esta concepção é a geradora desse paradoxo.

Embora estejamos acostumados a lidar diariamente, mesmo que intuitivamente, com a ideia de velocidade e movimento, esses são, sem dúvida, conceitos bem abstratos. Deve-se a isso a importância dos paradoxos de Zenão. O paradoxo da Flecha e o do Estádio são, de fato, reais, se o tempo for composto por unidades mínimas indivisíveis e o espaço por pontos discretos. Em contrapartida, se tempo e espaço forem considerados contínuos, surgem os paradoxos da Dicotomia de Aquiles. Dessa forma, Zenão cerca por todos os lados a ideia de movimento e de velocidade, mostrando controvérsias contundentes que por vezes passam despercebidas aos olhos já acostumados a observar o movimento.

A atitude mais comum em relação aos paradoxos de Zenão, desde sua origem, “é a do filósofo que, após ouvir as explicações de Zeno sobre a impossibilidade do movimento, ficou um instante pensativo e, levantando-se, disse que a solução de todos eles era 'pôr-se a andar', e foi-se embora" (Brolezzi, 1996, p. 23). A atitude do filósofo simboliza bem o pensamento grego da época diante das dificuldades de compreender fenômenos relacionados ao conceito de discreto e contínuo e com tudo que remetesse à ideia de infinito.

A seguir, vamos enunciar e fazer uma abordagem matemática de cada um dos quatro paradoxos mencionados (Dicotomia, Aquiles, Flecha e Estádio), sob o ponto de vista da física e à luz do Cálculo Diferencial e Integral, mostrando o que causa o paradoxo e buscando resolver o dilema, não como uma proposta de resolução definitiva, mas uma sugestão de reflexão sobre o paradoxo e o infinito.

DICOTOMIA

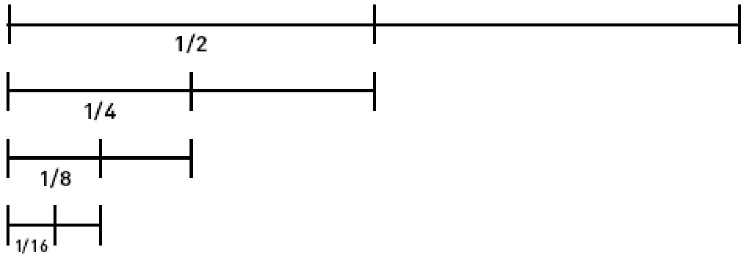
O paradoxo da dicotomia afirma que para um determinado objeto percorrer certa distância deve percorrer a primeira metade desse espaço, mas, antes disso, precisa percorrer metade da metade desse espaço e, antes disso, a metade da metade da metade e assim indefinidamente por meio de uma infinidade de subdivisões. Portanto, o movimento não chega nem a começar (Boyer, 1996, p. 51; Estrada et al, 2000, p. 240).

O paradoxo da dicotomia ataca o fato do espaço ser infinitamente divisível, pois apresenta um raciocínio que, partindo dessa ideia, chega-se à impossibilidade do movimento. Pode-se apontar como falha nesse paradoxo o fato de se tratar distância infinitamente divisível como distância infinita, isto é, entre dois pontos não se tem distância infinita, mas sim uma distância que se pode dividir indefinidamente.

Na continuidade do texto faremos uma análise matemática desse paradoxo utilizando as ferramentas do Cálculo e respeitando as imposições do problema, sugerindo uma solução à luz dos conceitos da Matemática e da Física contemporâneas.

Represente-se por S a distância que o objeto pretende percorrer e seja t um tempo finito. Consideramos ainda que o objeto percorre o trajeto em velocidade constante[5] denominada *v*. No entanto, antes de percorrer a distância total S, o objeto deverá percorrer a metade da distância, ou seja, $\frac{S}{2}$ (Equação (1)) e é verdade que resta $\frac{S}{2}$ a ser percorrido. Porém, antes de percorrer $\frac{S}{2}$, o objeto deverá perfazer a distância de $\frac{S}{2^2}$. Agora observe que falta $\frac{S}{2} + \frac{S}{2^2}$ (Equação (2)) a ser percorrido e, assim, indefinidamente de acordo com a Figura 1 (Balieiro, Soares, 2009, p. 162).

Figura 1 - Representação esquemática da dicotomia (bissecção sucessiva) de um segmento de reta



Fonte: Adaptado de Machado; Schuck; Wagner (2013).

Dessa forma, Zenão de Eleia assumiu dividir a distância S a ser percorrida pelo objeto a um número infinito de segmentos, todos com comprimento diferente de zero, e, com isso, a distância total S resultaria da soma desses infinitos segmentos não nulos. Zenão, todavia, não tinha em sua época a ideia de soma de série para aferir tal fato. No entanto, sua ideia estava correta e hoje pode ser descrita como a convergência de uma série real, de acordo com a equação (3).

$$\frac{S}{2}+\frac{S}{2^2}+\cdots+\frac{S}{2^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S}{2^n}=S\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}=S\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}-1\right)=S\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1\right)=S$$

Equação (3)

Talvez pelo fato dos gregos não possuírem um modelo geométrico conveniente para o tempo, como tinham para a distância, Zenão afirmou que seria impossível dividir o tempo finito $t=\frac{S}{V}$, que será gasto para perfazer a distância S em um número infinito de parcelas, todas maiores que zero, e que resultasse numa soma finita. Entretanto, é verdade que para perfazer o trajeto $\frac{S}{2}$, o tempo que o objeto gastará será $\frac{t}{2}$. Observe, ainda, que para percorrer a distância $\frac{S}{2^2}$, o objeto gastará $\frac{t}{2^2}$, e assim indefinidamente. Assim, é possível dividir o tempo t que o móvel gasta para perfazer a distância S em infinitas parcelas maiores que zero cuja soma resultante seja finita, como pode ser observado por meio da Equação (4) (BALIEIRO; SOARES, 2009, p. 163):

$$\frac{t}{2}+\frac{t}{2^2}+\cdots+\frac{t}{2^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{2^n}=S\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}=t\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}-1\right)=t\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1\right)=t$$

Equação (4)

De acordo com a Equação (3) (soma da série S), respeitando as condições estabelecidas na proposição de Zenão, fica claro que este partiu a distância a ser percorrida em partes infinitas e a soma dessas parcelas resulta em uma soma finita. A série t também evidencia que é possível dividir o tempo de forma adequada de maneira a perfazer S no tempo $t=\frac{S}{v}$. Esse resultado está em desacordo com a argumentação de Zenão de que não é possível percorrer infinitos intervalos num tempo limitado.

As argumentações de Zenão são aparentemente consistentes. No entanto, quando investigadas à luz do Cálculo Diferencial e Integral, em particular a convergência de séries, o quadro defendido por Zenão se mostra falso e evidencia uma realidade paradoxal, ou seja, este é um paradoxo falsídico.

AQUILES

O paradoxo de Aquiles é semelhante ao primeiro, com a diferença das bissecções serem progressivas em vez de regressivas: se Aquiles, o corredor mais veloz da Ática, apostar corrida com uma lenta tartaruga nunca mais conseguirá alcançá-la, por mais depressa que corra. Com efeito, quando Aquiles chegar ao local inicial de onde a tartaruga partiu, esta já terá avançado um pouco mais e se encontrará em outra posição adiante dele e, quando Aquiles cobrir esta distância, a tartaruga já terá realizado novo avanço e assim esse processo continua indefinidamente. Portanto, conclui-se que Aquiles jamais poderá atingir a lenta tartaruga.

Nesse paradoxo, têm-se dois corpos que se movimentam com velocidades distintas. Como o senso comum nos mostra, Aquiles ultrapassa a tartaruga. Todavia, o raciocínio desenvolvido por Zenão está correto com exceção da conclusão, que é absurda: Aquiles nunca poderá atingir a tartaruga. Com os paradoxos da Dicotomia e Aquiles, Zenão buscava ruir a crença da continuidade do movimento, ou seja, seus paradoxos iam de encontro com a infinita divisibilidade do espaço. Neste paradoxo, bem como no da Dicotomia, mistura-se a ideia de distância infinita com distância infinitamente divisível. Isto é, podemos considerar que, no paradoxo de Aquiles, este deve percorrer infinitos intervalos, que são aqueles trechos nos quais a tartaruga tem vantagem sobre o corredor.

Para analisar matematicamente o problema, considera-se o seguinte: Aquiles e a tartaruga são objetos que estão em movimento retilíneo uniforme, na mesma direção e sentido, e no mesmo instante de tempo. Considera-se ainda que as sucessivas posições desses objetos sejam determinadas no sentido positivo sobre um eixo orientado Ox com origem em O.

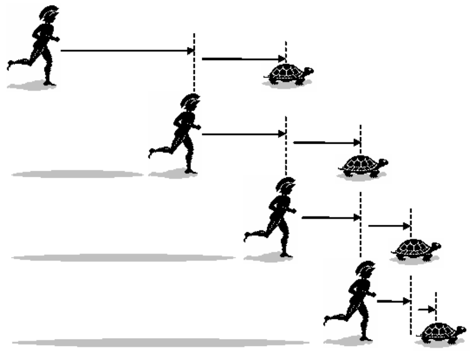
De acordo com o estabelecido por Zenão em seu paradoxo, a velocidade da tartaruga (v_t) é uma fração própria da velocidade de Aquiles (v_a). Aquiles (que ocupa a posição A_0 em relação à origem do sistema Ox) está a uma distância d_0 da tartaruga (posição T_0 em relação à origem do sistema Ox). Dessa forma, pode-se supor que a tartaruga ocupa a posição dada por (T_k)k∈N, em que T_k indica a sua k-ésima posição. Já o posicionamento de Aquiles é dado por (A_k)k∈N, em que A_k indica a sua k-ésima posição. Considere-se ainda (t_k)k∈N, em que t_k indica o k-ésimo instante de tempo do processo, e seja (d_k)k∈N a distância entre as posições ocupadas pela tartaruga, T_k, e as posições ocupadas por Aquiles, T_k, sobre o sistema de eixos Ox (BALIEIRO, SOARES, 2009, p. 164-165).

Posto isso, e de acordo com as condições preestabelecidas pelo paradoxo, tem-se a seguinte sugestão de resolução: Com efeito, as velocidades de Aquiles e da tartaruga podem ser expressas pela Equação (05): $v_t = rv_a$, sendo r um número Real, r∈]0,1[, portanto, indicando que a velocidade da tartaruga é uma fração própria da velocidade de Aquiles. Seja v_a constante num determinado tempo t. Aquiles perfaz uma distância $v_a t$ e a tartaruga um espaço $v_t t$. Dessa forma, no instante de tempo $t_1 = \frac{d_0}{v_a}$, tal expressão dá origem à Equação (06), $d_0 = v_a t_1$. Concomitantemente, do deslocamento da tartaruga de T_0 para T_1, vem a Equação (07): $d_1 = v_t t_1$. Substituindo as Equações (05) e (06) na Equação (07), gera-se a Equação (08): $d_1 = v_t t_1 = (r v_a) t_1 = r(v_a t_1) = r d_0$. Com isso, pode-se dizer que nesse instante Aquiles ocupa a posição $A_1 = T_0$, distante d_0 de A_0.

No entanto, nesse mesmo instante, a tartaruga ocupa a posição T_1 distante d_1 de T_0. Transcorrido o instante $t_2 = \frac{d_1}{v_a}$, isso implica a Equação (09): $d_1 = v_a t_2$. Da mesma forma e ao mesmo tempo, do deslocamento da tartaruga de T_1 para T_2 vem a Equação (10): $d_2 = v_t t_2$. Substituindo as Equações (05), (09) e (08) na Equação (10), gera-se a Equação (11): $d_2 = v_t t_2 = (r v_a) t_2 = r(v_a t_2) = r d_1 = r(r d_0) = r^2 d_0$.

Podemos observar que Aquiles está na posição $A_2 = T_1$, distante d_1 de A_1. Já a tartaruga, nesse mesmo instante, ocupa a posição T_2 distante d_2 de T_1. Este processo se repete indefinidamente, ou seja, decorrido um instante $t_k = \frac{d_{k-1}}{v_a}$, ter-se-á a Equação (12), $d_k = r^k d_0$. Desse fato decorre que a distância entre Aquiles e a tartaruga diminui paulatinamente, como ilustra a Figura 2. É verdade, e pode-se comprovar tal fato aplicando o limite na Equação (12), o que resulta na Equação (13): $\lim_{k \to \infty} d_k = \lim_{k \to \infty} r^k d_0 = d_0 \lim_{k \to \infty} r^k = 0$.

Figura 2 – Representação das sucessivas posições de Aquiles aproximando-se cada vez mais da tartaruga



Fonte: Adaptado de Vivan (2014).

Zenão e seus contemporâneos não admitiam uma ideia de infinito que permitisse aos gregos deste período explicar os fenômenos. Com isso, Zenão afirmava que para percorrer infinitos trechos não nulos, que separavam Aquiles da tartaruga, era necessário um tempo também infinito. Ou seja, de fato seria impossível que Aquiles alcançasse a tartaruga.

Agora, já desenvolvidas as ferramentas do Cálculo, nota-se, entretanto, que a soma S das infinitas distâncias d_k que Aquiles percorre para alcançar a tartaruga é finita, dada pela Equação (14): $S = \sum_{k=0}^{\infty} d_k = d_0 \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{d_0}{1-0}$.

Como o tempo que Aquiles leva para perfazer a distância d_k é $t_{k+1} = \frac{d_k}{v_a}$, decorre que para percorrer S, o tempo t que Aquiles gastará também será finito e é dado pela Equação (15) (BALIEIRO; SOARES, 2009, p. 166):

$$t = \sum_{k=0}^{\infty} t_{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{v_a} = \frac{1}{v_a} \sum_{k=0}^{\infty} d_k = \frac{1}{v_a} \sum_{k=0}^{\infty} d_0 r^k = \frac{d_0}{v_a} \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{d_0}{v_a} . \frac{1}{1-r} = \frac{d_0}{v_a\,(1-r)}$$

Equação (15)

A possibilidade de decompor uma grandeza limitada em infinitas partes é a conclusão absurda que Zenão chega ao considerar esses dois argumentos.

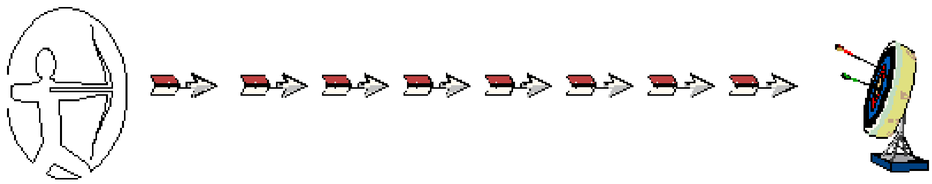
> Ainda que questões desse tipo não pudessem, no século V a. C., ser compreendidas em profundidade, parece digno de nota que já tão cedo tenham sido postas de modo bem agudo, criticando os sistemas filosófico-científicos estabelecidos e estimulando o aparecimento de outros. Mas o desafio mais sério às concepções da escola de Crotona viria a ter origem na aplicação à geometria das próprias técnicas da aritmética pitagórica (ESTRADA et al, 2000, p. 242).

É possível observar, na argumentação de Zenão, que este assume um modelo geométrico para o espaço infinitamente divisível em partes não nulas e cada vez menores. Com isso, para percorrer cada uma dessas partes, é necessária uma quantidade de tempo que também pode ser subdividida em frações cada vez menores, sendo o tempo total equivalente à soma de todas essas frações. Portanto, o que Zenão quer dizer quando afirma que Aquiles nunca alcançará a tartaruga é que Aquiles não a alcançará em tempo finito, ou seja, pode-se inferir que Zenão de Eleia não estabelece um modelo geométrico para o tempo e, dessa forma, não pode dividi-lo em um número infinito de partes cuja soma resultante seja zero.

FLECHA

No paradoxo da flecha, Zenão afirma que, se o tempo é formado por instantes indivisíveis, então uma flecha voando ao encontro de seu alvo está na verdade parada. De fato, em cada instante a seta ocupa uma posição fixa, ou seja, em cada instante a flecha está parada. Sendo isso verdadeiro, a flecha está sempre parada, como ilustra a Figura 3. O paradoxo da flecha tem por objetivo provar que se o tempo é composto de instantes e o espaço composto por mínimos indivisíveis, então um corpo em movimento está, na verdade, sempre em repouso, além de levantar reflexão acerca da natureza do movimento e a ideia de velocidade instantânea. Nos dias atuais, define-se o movimento de um corpo pela sua velocidade e não pela mudança do espaço que este ocupa.

Figura 3 – Representação esquemática do paradoxo da flecha



Fonte: Fórum de Discursus.

O conceito de velocidade média convencionalmente é definido pela razão entre a variação de espaço percorrido e a variação de tempo decorrido num determinado percurso. Anos mais tarde, por volta da metade do século XVII, com a descoberta do cálculo infinitesimal essa ideia é generalizada ao nível do instante — fato desconhecido pelos gregos antigos — e dessa visão mais alargada nasce o conceito de velocidade instantânea como consequência da generalização. “Portanto, no contexto de velocidade instantânea, não faz sentido se falar em mudança de posição ou em espaço percorrido” (Monteiro, 2008, p. 24).

Para analisarmos o problema matematicamente, fazemos algumas considerações: supomos que o atirador de flechas esteja a uma distância x (em metros) do alvo para o qual deseja lançar a fecha, e consideramos que a flecha percorra uma trajetória retilínea e com movimento uniforme[6]. Seja t (em segundos) o tempo que a flecha leva para percorrer a distância x e seja a Equação (16) $x(t) = at^2 + bt$ uma função contínua, diferenciável em todos os pontos do seu domínio e que fornece as posições do objeto em função do tempo t, com a e b constantes reais positivas.

Posto isso, vamos calcular a velocidade média v_m (quociente entre variação do espaço e a variação do tempo: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$) desse objeto para dois instantes distintos t_1 e t_2, com $t_2 > t_1$. Então, de acordo com as condições iniciais do problema, temos velocidade média definida pela Equação (17) $v_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$. Substituindo t_1 e t_2 em (16) e, depois em (17), obtém-se a Equação (18), $v_m = \frac{at_2^2 + bt_2 - at_1^2 - bt_1}{t_2 - t_1}$. Colocando os fatores a e b em evidência na Equação (18), obtemos a Equação (19) $v_m = \frac{a\left(t_2^2 - t_1^2\right) + b(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}$, de onde podemos concluir que v_m é estritamente maior que zero, pois as constantes a e b são maiores que zero e como $t_2 > t_1$ a diferença $t_2 - t_1 > 0$.

Além disso, é evidente que o quociente entre valores positivos é também um valor positivo. No entanto, nada ainda nos permite concluir que Zenão estava errado ao afirmar que em cada instante a flecha está parada. Para poder fazer tal afirmação, recorremos ao conceito de derivada de uma função num ponto (isto é, velocidade instantânea) formalizada por Bolzano e Cauchy no século XIX. Então, vamos calcular a velocidade instantânea do móvel, cujo deslocamento é dado pela Equação (16). Para isso, temos que calcular o limite da função quando h tende a zero e esse resultado deve ser estritamente positivo para que possamos concluir a falha no argumento de Zenão. Assim, por definição, temos que a velocidade instantânea do móvel é dada por esse limite da Equação (20):

$$\mathrm{x}'(\mathrm{t}) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t + h) - x(t)}{h}$$

Equação (20)

Executando as devidas substituições, obtemos a Equação (21):

$$\mathrm{x}'(\mathrm{t}) = \lim_{h \to 0} \frac{a(t + h)^2 + b(t + h) - at^2 - bt}{h}$$

Equação (21)

Fazendo a distributiva, chagamos à Equação (22):

$$\mathrm{x}'(\mathrm{t}) = \lim_{h\to 0} \frac{at^2 + 2ath - ah^2 + bt + bh - at^2 - bt}{h}$$

Equação (22)

Colocando h (fator comum) em evidência, vem a Equação (23):

$$\mathrm{x}'(\mathrm{t}) = \lim_{h\to 0} \frac{h(2at + ah + b)}{h}$$

Equação (23)

Portanto, a velocidade instantânea pode ser descrita pela Equação (24):

$$\mathrm{x}'(\mathrm{t}) = \lim_{h\to 0} \frac{h(2at + ah + b)}{h} = 2at + b$$

Equação (24)

Dessa forma, temos a velocidade instantânea $x'(t) = 2at + b$ estritamente positiva para qualquer que seja o t, pois a e b são valores positivos por hipótese e t é referente a tempo e, portanto, sempre positivo, de onde podemos concluir a falha no argumento de Zenão e afirmar que a flecha não está parada em cada ponto, pois, como mostrado, a velocidade instantânea é diferente de zero em qualquer que seja o instante t. Portanto, a flecha está em movimento em todos os pontos do percurso.

O paradoxo do Estádio[7] é provavelmente o mais complexo de descrever dentre os paradoxos de Zenão e pode ser enunciado como segue. Considerem-se três filas de objetos idênticos, uma fileira paralela à outra, como pode ser observado na Figura 4. Sejam: a primeira fila contendo T_1, T_2, T_3, T_4 corpos idênticos entre si e imóveis; a segunda fileira contendo T_5, T_6, T_7, T_8 corpos, também idênticos entre si e aos da primeira fileira, que se move num dos sentidos (de acordo com a Figura 4) de modo que cada corpo da segunda fileira passa por um corpo da primeira num instante (unidade de tempo indivisível).

Sejam $T_9, T_{10}, T_{11}, T_{12}$ também corpos idênticos aos oito primeiros e entre si, que se movem uniformemente na mesma direção, mas em sentido oposto aos corpos da segunda fileira (como ilustra Figura 4), de maneira que cada corpo da terceira fila passa por um corpo da primeira num instante de tempo. Num dado momento, os corpos ocupam as posições relativas de acordo com a Figura 4. Dessa forma, decorrido um instante de tempo, cada um dos corpos em movimento (fileiras 2 e 3) passa por um corpo da fila em repouso (Figura 5) e, portanto, um corpo de uma fila passa por um corpo da outra fila em metade desse tempo. Então, a unidade de tempo é igual ao seu dobro. Assim, passado apenas um instante de tempo, ou seja, decorrida uma subdivisão do tempo, as posições relativas estarão como mostra a Figura 5:

Figura 4 – Posição relativa das filas

	T_1	T_2	T_3	T_4	
T_5	T_6	T_7	T_8	→	
	←	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}

Fonte: Adaptado de Boyer (1996, p. 52) e de Brolezzi (1996, p. 23).

Figura 5 – Posição relativa das filas após o primeiro instante

T_1	T_2	T_3	T_4
T_5	T_6	T_7	T_8
T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}

Fonte: Adaptado de Boyer (1996, p. 52) e de Brolezzi (1996, p. 23).

Observando as posições relativas das Figuras 4 e 5 podemos perceber que T_9 terá passado pelos corpos T_5 e T_6. Logo, o instante não serve como unidade mínima de tempo, uma vez que podemos tomar como um novo instante que seja menor que o primeiro T_9 leva para transpor T_5 e T_6 e assim indefinidamente, ou seja, não é possível adotar uma unidade mínima de tempo (Boyer, 1996, p. 52).

Hoje em dia, de acordo com as leis da Física, se dois corpos com a mesma velocidade e direção, mas em sentidos opostos, passam um pelo outro, a velocidade do conjunto será considerada igual à soma das velocidades de cada corpo. Portanto, essa velocidade será igual ao dobro da velocidade de cada um dos corpos analisado separadamente. O que gera a situação paradoxal, nesse caso, é considerar que uma fileira ultrapassaria outra sempre ao mesmo tempo, estando ela parada ou em movimento. O objetivo desse paradoxo, assim como o da flecha, é questionar os defensores do espaço e tempo composto por um número finito de unidades indivisíveis, isto é, aqueles que defendiam a concepção atomista de Demócrito e consideravam espaço e tempo grandezas discretas, pois se considerarmos a existência dessas unidades finitas e indivisíveis de espaço e tempo, isto implicaria aceitar que um corpo que viaja a uma velocidade constante deve passar em cada instante por uma quantidade fixa de pontos (unidades mínimas de espaço), estando esses em repouso ou não. Em suma, tal paradoxo é resultado de se considerar que um corpo leva tempo igual para passar por outro corpo estando este em movimento ou em repouso.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa proposta com a elaboração deste artigo é promover discussões acerca do infinito, dada a importância do tema, por meio do estudo dos paradoxos falsídicos. Pois, o "infinito" tangencia praticamente todos os ramos da Matemática e, por ser um conceito bastante atual, complexo e contraintuitivo, ainda hoje causa estranhamento àqueles que querem estudar Matemática.

Dentre os seus paradoxos, percebemos a semelhança entre o da Dicotomia e o de Aquiles, pois ambos partem da suposição de que o espaço é infinitamente divisível. Dessa forma, um objeto ou um corredor, na intenção de cruzar a linha de chegada ou o alvo, precisaria, antes de tudo, percorrer todos os infinitos pontos. Ou seja, jamais cruzaria a linha de chegada ou alcançaria o alvo. Com esse argumento, parece-nos que o movimento é impossível e o que vemos é uma simples ilusão.

No entanto, no paradoxo de Aquiles, por exemplo, nos parece óbvio dizer que Aquiles atinge a meta de alcançar a tartaruga, tornando a conclusão do eleata sem sentido, pois foge da realidade e, por esta razão, tal paradoxo deveria ser refutado. Todavia, não basta constatar a inconsistência com a realidade, faz se necessário apontar quais as falhas da narrativa de Zenão em cada um de suas quatro aporias[8], procedimento típico do pensamento matemático e necessário para validar ou refutar um argumento.

False paradoxes: the first faces of the infinity concept in the context of mathematical science

ABSTRACT

The paper presents the results of a theoretical research that studied the infinity and the relation of this mathematical concept with the false paradoxes given by Zeno, contrary to atomistic conception of time and space. More specifically, we studied the paradoxes of Achilles Dichotomy, who argue against the hypothesis that space is infinitely divided, and the Stadium and Arrow paradoxes, which question the possibility of a segment being formed by an infinite of divisions. Although nowadays we are used to deal daily, even intuitively, with the idea of speed and movement, these are undoubtedly abstract concepts. This is due to the Zeno's Paradoxes importance: by exposing a first systematic thinking about the assumption. The Arrow and Stadium Paradoxes are, in fact, real, if time is composed of indivisible minimum units and space by discrete points. In contrast, if time and space are considered continuous, the Achilles Dichotomy arises. Thus, Zeno's thoughts surround on all sides the idea of movement and speed, coming up controversies that sometimes go unnoticed by the eyes already used to observe the movement. Through dialectics, starting from the apparently consistent premises and arriving at absurd conclusions, Zeno presented arguments to prove the fragility of the multiplicity and divisibility concepts, adopted by the Pythagorean School. These paradoxes, based on Parmenides philosophy, present situations to support the movement impossibility, considering it an illusion of the perception of the sensitive world and not the truth of the intelligible world, which characterizes the being as unique, immutable, infinite and immovable.

KEYWORDS: Mathematics Education. History of Mathematics. Infinite. Paradox.

NOTAS

[1] "Quine (1976) e Barker (1976) adotam a mesma classificação para os paradoxos. Barker (1976) divide os paradoxos em três classes, entretanto não usa nomenclatura específica para estas classes. Com isso, julgamos conveniente utilizar a nomenclatura adotada por Quine (1976)" (DORTA, 2013, p. 30).

[2] A escola filosófica de Parménides pautava-se na impossibilidade do movimento. Para essa Filosofia o movimento é uma ilusão da percepção do mundo sensível e não uma verdade do mundo inteligível, em que o ser é único, imutável, infinito e imóvel.

[3] Deve-se aos pensadores eleatas, como eram conhecidos, a invenção da *dialética* e do método de demonstração por *redução ao absurdo, um "m*odo de provar uma proposição que consiste em aceitar por momentos a sua negação e daí deduzir uma contradição" (Estrada et al, 2000, p. 240).

[4] "O estado de haver muitas coisas distintas, ao invés de uma só" (PESSOA JR, 2008, p. 7).

[5] "Note que, nessas condições, em um tempo finito *t*, o móvel percorrerá a distância *vt*" (BALIEIRO e SOARES, 2009, p. 162).

[6] "Percorre espaços iguais em intervalos iguais" (Loura, 2002, p. 34).

[7] "O *estádio* é uma das unidades de comprimento utilizada na Grécia antiga. Como era habitual na Antiguidade não havia uma só medida para o estádio, pois, por exemplo, o estádio que empregou Erastóstenes para medir a circunferência da Terra era aproximadamente 158 metros (estádio egípcio), enquanto, o comprimento do estádio olímpico (estádio ático) era de 192 metros" (Balieiro; Soares, 2009, p. 164).

[8] Aporia é um termo usado no sentido de dúvida racional, isto é, de dificuldade inerente a um raciocínio, e não no de estado subjetivo de incerteza. É, portanto, a dúvida objetiva, a dificuldade efetiva de um raciocínio ou da conclusão a que leva um raciocínio (Abbagnano, 1998, p. 75).

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia.** 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

BALIEIRO FILHO, I. F. Alguns paradoxos da matemática: um resgate histórico e possibilidades para o ensino e a aprendizagem. In: XXXIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. **Anais** [...]. Águas de Lindóia: SBMAC, 2010.

BALIEIRO, I. F.; SOARES, M. R. Uma abordagem da análise matemática para alguns problemas derivados das concepções filosóficas de Zenon, Antifon e Brison. **Revista Brasileira de História da Matemática,** Ilha Solteira, v. 8, p. 155-172, 2009.

BARKER, S.F. **Filosofia da matemática**. Trad. Leônidas Hegenberg. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1976.

BOYER, C. B. (1996) **História da matemática.** 2. ed. São Paulo: Editora Blücher, 1996. 496 p.

BROLEZZI, A. C. **A tensão entre o discreto e o contínuo na história da matemática e no ensino de matemática.** 1996. 95 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996.

DIAS, C. M. C. **Compêndios de matemática e de lógica matemática:** uma abordagem extemporânea. 2. ed. Curitiba: C. M. Corrêa Dias, 1999.

DORTA, F. **Os paradoxos e as aulas de matemática: algumas reflexões e sugestões.** 2013. 162 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de Londrina, Londrina, 2013

ESTRADA, M. F. et al. **História da matemática.** 1ª ed. Lisboa: Universidade Aberta, v. único, cap. 9.3, 2000

FORUM DE DISCURSUS. Wordpress. Disponível em: <forumdediscursus.wordpress.com/antiga-2/tudo-parado>. Acesso em: 10 out. 2015.

LOURA, L. C. **Tópicos de matemática,** jul. Notas de Aula, 2002.

MACHADO, R. B.; SCHUCK, C. A.; WAGNER, D. R. Convergências no infinito: discussões sobre arte, matemática e olhar. In: Encontro Nacional de Educação em Matemática. **Anais** [...]. Curitiba: PUC-PR, 2013.

MICHAELIS, J. D. **Dicionário escolar**: língua portuguesa. São Paulo: Melhoramentos. 2015. Disponível em: <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/>. Acesso em jan. 2018.

MONTEIRO, M. C. S. T. **A evolução do conceito de limite.** Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Portucalense Infante D. Henrique, Porto, 2008.

PESSOA JR., O. **Filosofia da física clássica.** 2º semestre. 63 f. Notas de aula, 2008.

QUINE, W.V. **Ways of paradox and other essays**. Cambridge: Harvard University Press, Massachusetts and London. 1976.

REZENDE, W. M. **O Ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.** 2003. 468 f. Tese (Doutorado em Educação, área de Ensino de Ciências e Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil**, 1730-1930. (2ª edição). São Paulo: Editora Annablume, 2007.

VIVAN, L. C. **Blog recordando matemática:** a matemática simples e descomplicada! São Paulo, 2014. Disponível em: <http://recordandomatematica.blogspot.com.br/2014/07/oparadoxo-de-zenon.html>. Acesso em: 10 out. 2015.

Recebido: 23 jan. 2019
Aprovado: 13 abr. 2019
DOI: 10.3895/actio.v4n2.9400
Como citar:
MONTEIRO, G. L., MONDINI, F. Paradoxos falsídicos: os primeiros enfrentamentos do conceito de infinito no contexto da ciência matemática. ACTIO, Curitiba, v. 4, n. 2, p. 30-47, mai./ago. 2019. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio>. Acesso em: XXX

Correspondência:
Gisele de Lourdes Monteiro.
Rua da Palha, 21 Paraibuna. São Paulo. CEP: 12260-000 Brasil.