MAT1514 – A Matemática na Educação Básica

IME-USP

Prof. Dr. Júlio César Augusto do Valle

Aula - 09/11

Em nossa aula, teremos:

- a) Comentários sobre a resolução da P1;
- b) Continuidade da abordagem sobre usos e concepções de frações no ensino de matemática;
- c) Operações com frações;
- d) O discreto e o contínuo nos conjuntos numéricos;

Questão 1.

(a) Explique porque um número natural escrito em base dez é *par* se, e só se, o *algarismo das unidades é par*.
(b) A mesma propriedade vale para números naturais escritos em base cinco? Justifique.

1. a) Temos o seguinte para um número natural escrito em base 10:

$$\underbrace{10^n \cdot x + 10^{n-1} \cdot y + \dots +}_{\text{sempre par para qualquer } n \text{ natural}} 10^0 \cdot w = a$$

sempre par para qualquer n natural. Uma vez que qualquer natural multiplicado por uma potência na base 10 é par.

Para que $\underline{a}$ seja par, $10^0 \cdot w$ certamente é par.

b) 32_5 ⇒ $3 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 15 + 2 = 17$

algarismo par

∴ Por contraexemplo é provado que não vale a mesma propriedade.

Questão 2.

(a) Construa as tábuas de adição e de multiplicação em base nove (9).
(b) Formule um problema ou exercício que envolva pelo menos duas operações, uma de adição e outra de multiplicação, em base nove.
Apresente uma solução, recorrendo às tábuas construídas.

Questão 2.

(a) Tábua de Adição em base nove :

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8	10
2	2	3	4	5	6	7	8	10	11
3	3	4	5	6	7	8	10	11	12
4	4	5	6	7	8	10	11	12	13
5	5	6	7	8	10	11	12	13	14
6	6	7	8	10	11	12	13	14	15
7	7	8	10	11	12	13	14	15	16
8	8	10	11	12	13	14	15	16	17

Tábua da Multiplicação em base nove :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	4	6	8	11	13	15	17
3	0	3	6	10	13	16	20	23	26
4	0	4	8	13	17	22	26	31	35
5	0	5	11	16	22	27	33	38	44
6	0	6	13	20	26	33	40	46	53
7	0	7	15	23	31	38	46	54	62
8	0	8	17	26	35	44	53	62	71

Questão 2.

(a) Construa as tábuas de adição e de multiplicação em base nove (9).
(b) Formule um problema ou exercício que envolva pelo menos duas operações, uma de adição e outra de multiplicação, em base nove.
Apresente uma solução, recorrendo às tábuas construídas.

(b) Imagine que existe um planeta em que seus habitantes utilizam em seu sistema de numeração a base 9 (isto é, utilizam apenas os símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8). Uma professora, que mora nesse planeta, recebe os seguintes valores por aula:

$ 6 por cada aula no ensino fundamental

$ 8 por cada aula no ensino médio.

Sabendo que em um mês ela deu 8 aulas no ensino fundamental e 12 aulas no ensino médio, qual será seu salário nesse mês?

Solução: Com os dados do problema, podemos construir a seguinte equação: $6 \times 8 + 8 \times 12 = x$

Utilizando as tábuas sabemos que $6 \times 8 = 53$

Calculando 8×12:

$$\begin{array}{r} {}^{1}12 \\ \times 8 \\ \hline 107 \end{array}$$

Assim, $x = 53 + 107$. Utilizando a tábua:

$$\begin{array}{r} 107 \\ +53 \\ \hline 161 \end{array}$$

Logo $x = 161_9$

Então o salário da professora será $ 161.

Questão 3.

(a) Em que base *b* o número 192_{10} é escrito como 140_b? Justifique sua resposta.
(b) Pode um número par ser representado, em alguma base, por 27? Justifique sua resposta.
(c) Em que base o número 81_{10} é escrito como 10000? Por que?

REPRESENTANDO OS NÚMEROS NO SISTEMA DECIMAL, TEMOS:

$192_{10} = 140_B \Leftrightarrow 192_{10} = (1 \cdot B^2 + 4 \cdot B + 0) \Leftrightarrow$

$B^2 + 4 \cdot B - 192 = 0$

PELA FÓRMULA DE BHÁSKARA, AS POSSÍVEIS SOLUÇÕES SÃO $B = -16$ OU $B = 12$. MAS $B = -16$ NÃO CONVÉM, POIS NÃO É UM NÚMERO NATURAL, PORTANTO $B = 12$ //

↳ $1.b^4 + 0.b^3 + 0.b^2 + 0.b^1 + 0.b^0 = 81 \Rightarrow b^4 = 81 = 3^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 3$

$\therefore 81_{10}$ é escrito como 10000 na base 3, isso é provado pela decomposição do número, e também vale ressaltar que só são consideradas as soluções tais que $b \in \mathbb{N}$.

Questão 3.

(a) Em que base *b* o número 192_{10} é escrito como 140_b? Justifique sua resposta.
(b) Pode um número par ser representado, em alguma base, por 27? Justifique sua resposta.
(c) Em que base o número 81_{10} é escrito como 10000? Por que?

SEJA $n \in \mathbb{N}$, PODEMOS ESCREVER UM NÚMERO PAR POSITIVO POR $2 \cdot n$. SE ESSE NÚMERO PODE SER REPRESENTADO POR 27 NA BASE B, ENTÃO:

$$2n = 27_B \iff 2n = (2 \cdot B + 7)_{10} \iff$$

$$2n = 2B + 7 \iff B = n - \frac{7}{2}$$

O VALOR DE B NÃO É UM NÚMERO NATURAL, PORTANTO NÃO CONVÉM PARA SER UMA BASE. DESSA FORMA UM NÚMERO PAR NÃO PODE SER REPRESENTADO POR 27 EM ALGUMA BASE.

Questão 4.
Leia com atenção:

“1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções.”

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017, p. 267) apresenta esta como a primeira competência específica a ser desenvolvida com a matemática.
Considerando nossos estudos sobre os Sistemas de Numeração, apresente dois aspectos com relação a esse conteúdo que podem contribuir para o desenvolvimento da competência descrita. Isto é, ao trabalhar essa temática, quais dois aspectos você considera relevantes para se alcançar a competência descrita?

AO ESTUDAR OS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO PODEMOS DESTACAR DOIS ASPECTOS:

1) A CONTAGEM COMO UMA NECESSIDADE
2) O AGRUPAMENTO COMO UMA NECESSIDADE

• Diversidade: A contagem e a medição possuem uma infinidade de diferentes modelos e sistemas, o que evidencia a diversidade cultural, as necessidades históricas de cada povo ou região, assim como contar com os dedos, talvez utilizar as falanges e criar algarismos, a linguagem matemática é tão viva e resiliente quanto os seres vivos que a proferem.

Questão 4.

Leia com atenção:

“1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções.”

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017, p. 267) apresenta esta como a primeira competência específica a ser desenvolvida com a matemática.
Considerando nossos estudos sobre os Sistemas de Numeração, apresente dois aspectos com relação a esse conteúdo que podem contribuir para o desenvolvimento da competência descrita. Isto é, ao trabalhar essa temática, quais dois aspectos você considera relevantes para se alcançar a competência descrita?

· Interação: O choque histórico gerado pela diversidade abrange uma nova necessidade, a precisão de compreender os outros povos, as negociações e as relações sociais criaram naturalmente a necessidade de unir conceitos, padronizar alguns sistemas numéricos e popularizar determinados grupos de algarismos. Não há vida coletiva sem comunicação, não há comunicação sem matemática e sem essa linguagem nem mesmo haveriam avanços científicos.

Questão 4.

Leia com atenção:

"1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções."

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017, p. 267) apresenta esta como a primeira competência específica a ser desenvolvida com a matemática.
Considerando nossos estudos sobre os Sistemas de Numeração, apresente dois aspectos com relação a esse conteúdo que podem contribuir para o desenvolvimento da competência descrita. Isto é, ao trabalhar essa temática, quais dois aspectos você considera relevantes para se alcançar a competência descrita?

Primeiro aspecto: Mostrar como diferentes sociedades de forma independente criaram sistemas de numerações diferentes uns dos outros conforme suas necessidades e/ou visões de mundo.

Segundo aspecto: Mostrar como utilizamos outras bases além da base 10 no dia a dia. Por exemplo: Ao ver o horário, ao medir ângulos, ao pedir "uma dúzia" de ovos no mercado, etc.

Questão 5.

Leia com atenção:

“5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.”

Acima, está descrita a quinta competência específica de matemática, extraída da BNCC, como na questão anterior. Elabore um problema ou exercício que envolva operações entre Matrizes e que possibilite a utilização de tecnologias digitais. Apresente uma solução.

***Obs.:* Pode-se utilizar, inclusive, as calculadoras digitais, disponibilizadas no *e-disciplinas* em nossas aulas.**

	1	2	3	4
A	0	13	0,8	31
C	18	13	12	0
E	105	135	133	130
F	2,5	1	0,7	0
G	2,4	8,5	8,6	0
P	4	2	1,4	0
S	0	15	58	22

1 - Aveia em flocos (2 colheres de sopa, 30g)

2 - 6 pedaços de chocolate

3 - Porção 25 g de batata frita de pacote.

4 - 1 unidade de água tônica (350 ml)

vira a matriz $A_{7\times4}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 13 & 0,8 & 31 \\ 18 & \cdot & & \\ 105 & & \cdot & \\ 2,5 & & [\ldots] & \\ 2,4 & & & \\ 4 & & & \\ 0 & 15 & 98 & 22 \end{bmatrix}$$

onde:

A - Açúcares (g)

C - Carboidratos (g)

E - Valor Energético (Kcal)

F - fibras (g)

G - Gorduras (g)

P - Proteínas (g)

S - Sódio (mg)

O consumo desses alimentos foi

Porção calculada	ingerido	consumo
2 colheres (sopa)	8 colheres	$8/2 = 4$
6 pedaços (25g)	12 pedaços.	$12/6 = 2$
porção de 25 g	1 pacote (100g)	$100/25 = 4$
1 unidade (350 ml)	1 unid	$1/1 = 1$

→ ingerido / calculado

$$C_{4\times1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Questão 5.

Leia com atenção:

“5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.”

Acima, está descrita a quinta competência específica de matemática, extraída da BNCC, como na questão anterior. Elabore um problema ou exercício que envolva operações entre Matrizes e que possibilite a utilização de tecnologias digitais. Apresente uma solução.

Obs.: **Pode-se utilizar, inclusive, as calculadoras digitais, disponibilizadas no *e-disciplinas* em nossas aulas.**

A lista de consumo foi comparada com as porções que contém os nutrientes tabelados. 8 colheres de aveia, cada porção calculada é de 2 colheres de sopa, então 8/2 colheres de sopa ou seja 4 porções (E assim por diante).

Descubra a quantidade de nutrientes ingeridos através desse consumo por meio da multiplicação de matrizes $A_{7\times4} \cdot C_{4\times1}$. O cálculo pode ser feito manualmente, mas recomenda-se o site matrix.reshish.com/ptBr

matrix.reshish.com/ptBr/multiplication.php

Apresentando a solução temos:

$A_{7\times4} \cdot C_{4\times1} = N_{7\times1}$ (nutrientes ingeridos). $N_{7\times1}$

$$= \begin{array}{l} \text{Açucar.} \\ \text{Carboidratos.} \\ \text{Calorias.} \\ \text{Fibras} \\ \text{Gorduras} \\ \text{Proteínas} \\ \text{Sódio.} \end{array} \begin{bmatrix} 60{,}2 \\ 146 \\ 1352 \\ 14{,}8 \\ 61 \\ 25{,}6 \\ 444 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{g} \\ \text{g} \\ \text{Kcal} \\ \text{g} \\ \text{g} \\ \text{g} \\ \text{mg} \end{array}$$

Questão 6.

(a) “Quando o produto de dois números é nulo, é porque um dos dois é zero”, diz um aluno. O mesmo vale para multiplicação de matrizes? Ilustre sua resposta com um exemplo.
(b) “A ordem dos fatores não altera o produto”.
Outra propriedade que caracteriza a multiplicação entre os números com que temos contato na Educação Básica é a propriedade comutativa. Essa propriedade é válida para a multiplicação de matrizes? Ilustre sua resposta com um exemplo.

2/5

a) NÃO.

EXEMPLO: Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Temos que A e B são matrizes não nulas.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que o produto entre duas matrizes não nulas resulta em uma matriz nula, já que $AB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) NÃO.

EXEMPLO: Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vemos que $AB \neq BA$.

Para o caso de matrizes que não são quadradas não vale a comutatividade pois o produto pode não ser possível.
EXEMPLO: Sejam as matrizes $A_{2\times2}$ e $B_{2\times1}$. É possível calcular o produto AB, mas não existe o produto BA devido à ordem das matrizes.

Questão 7.

Considere as seguintes matrizes A e E: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $E = \begin{pmatrix} 36 & 8 \\ 42 & 16 \end{pmatrix}$

Um código foi expresso pela multiplicação de matrizes A·M = E, onde M é a matriz que contém a mensagem original, disposta ordenadamente nas linhas. A é a matriz-chave e E a matriz-codificada. Descubra a mensagem original.
Obs.: **Foi utilizada a cifra alfabética de A como 0, B como 1, C como 2 e assim por diante.**

7) Considerando a matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, fazemos a multiplicação $A \cdot M = E$ para achar o valores de a, b, c, d, por meio de sistemas

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 8 \\ 42 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 3c = 36 \quad (-2) \\ 2a + c = 42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-2a} - 6c = -72 \\ \cancel{2a} + c = 42 \end{cases} +$$

$$-5c = -30$$

$$c = 6$$

$$2a + 6 = 42$$

$$2a = 36$$

$$a = 18$$

$$\begin{cases} b + 3d = 8 \quad (-2) \\ 2b + d = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-2b} - 6d = -16 \\ \cancel{2b} + d = 16 \end{cases} +$$

$$-5d = 0$$

$$d = 0$$

$$2b + 0 = 16$$

$$b = 8$$

Questão 7.

Considere as seguintes matrizes A e E: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $E = \begin{pmatrix} 36 & 8 \\ 42 & 16 \end{pmatrix}$

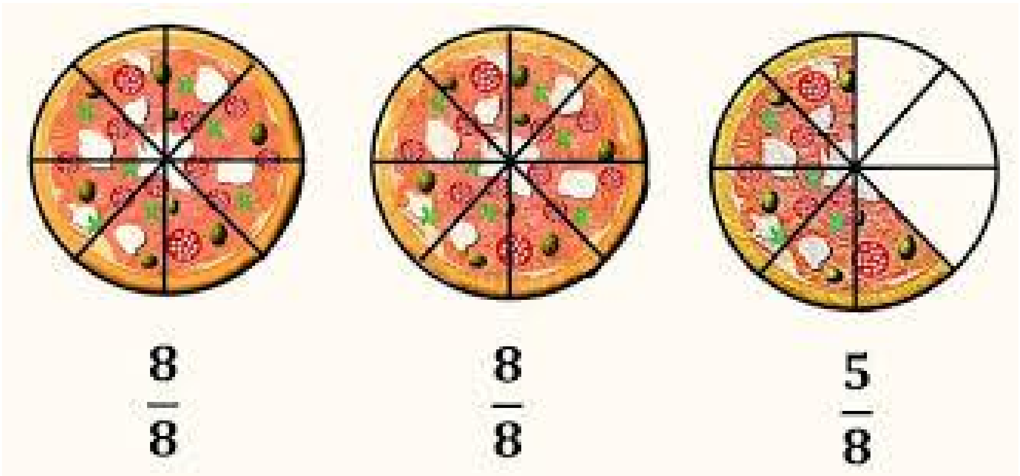
Um código foi expresso pela multiplicação de matrizes A·M = E, onde M é a matriz que contém a mensagem original, disposta ordenadamente nas linhas. A é a matriz-chave e E a matriz-codificada. Descubra a mensagem original.
Obs.: **Foi utilizada a cifra alfabética de A como 0, B como 1, C como 2 e assim por diante.**

0 = A	4 = E	8 = I	12 = M	16 = Q
1 = B	5 = F	9 = J	13 = N	17 = R
2 = C	6 = G	10 = K	14 = O	18 = S
3 = D	7 = H	11 = L	15 = P	

$M = \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} S & I \\ G & A \end{pmatrix}$ MENSAGEM: SIGA.

Logo, $M = \begin{bmatrix} 18 & 8 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ e transformando pela cifra obtemos a mensagem "Siga"
(18 = S, 8 = I, 6 = G, 0 = A)

Retornando às frações



- Fração como Relação parte-todo;
- Fração como quociente indicado ou número racional;
- Fração como razão;
- Fração como operador multiplicativo;

Retornando às frações

Um terço

Objetivo: Identificar a terça parte de um todo e relacioná-la à divisão por 3 e ao numeral que a representa.

Observe:

Dividimos um pão (1 unidade) em 3 partes iguais.
Cada uma dessas partes é **um terço** de pão.

Um terço ou **a terça parte** é cada uma das partes de um inteiro dividido em 3 partes iguais.

Um terço ou **a terça parte** representa-se assim:

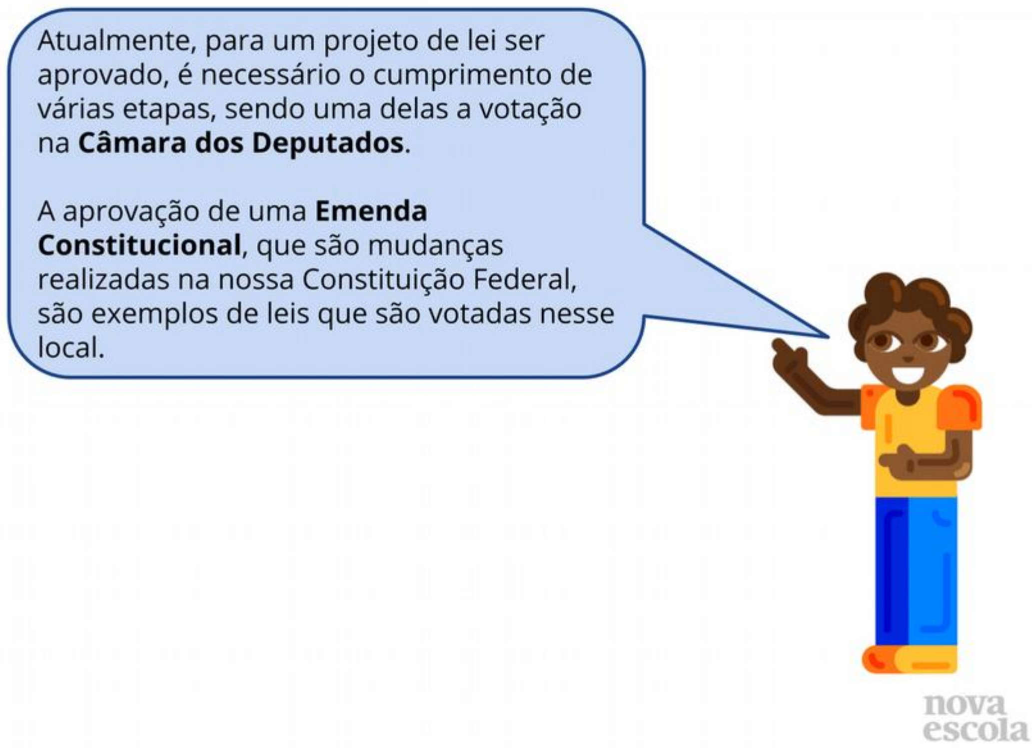
$\frac{1}{3}$ Lê-se: "**um terço**".

Note que o pão tem 3 pedaços iguais a $\frac{1}{3}$, isto é, 3 terços.

Apresentação na fração 1/3 para a 2ª série.

- Fração como Relação parte-todo;
- Fração como quociente indicado ou número racional;
- Fração como razão;
- Fração como operador multiplicativo;

Fração como operador multiplicativo



Fração como operador multiplicativo

Para se iniciar a votação de uma emenda constitucional, é necessário que estejam presentes 1/3 do total de deputados (quantidade essa que é chamada de Quórum) e para a aprovação é necessário que 3/5 do Quórum vote favorável à mudança.

a) Se, em um dia de votação, compareceram 170 Deputados de um total de 513, a votação pode ter ocorrido?

b) Sabendo que, em outro dia de votação, 108 deputados votaram a favor de determinada emenda e ela foi aprovada, qual foi o Quórum máximo do dia?

c) Utilizando frações, desenvolva um problema com base no enunciado da atividade para seu colega resolver. Em seguida, troque de problema com seu colega, para que um resolva o problema do outro. Após a resolução, faça a troca novamente para a correção.

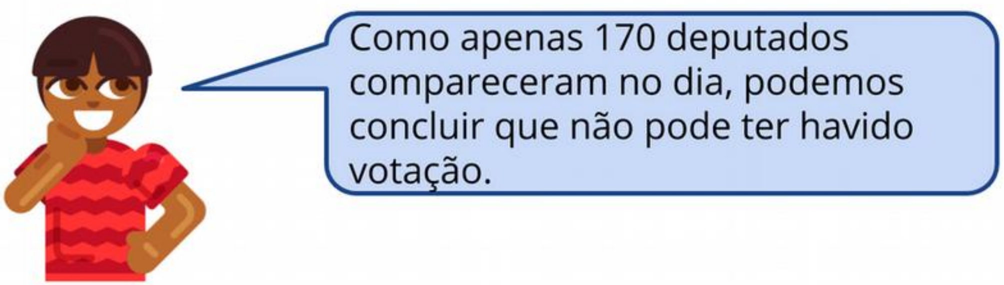
Fração como operador multiplicativo

a) A pergunta está relacionada à possibilidade de a votação ter ocorrido ou não. Logo, concluímos que estamos nos referindo ao quórum, ou seja, iremos utilizar a fração 1/3.

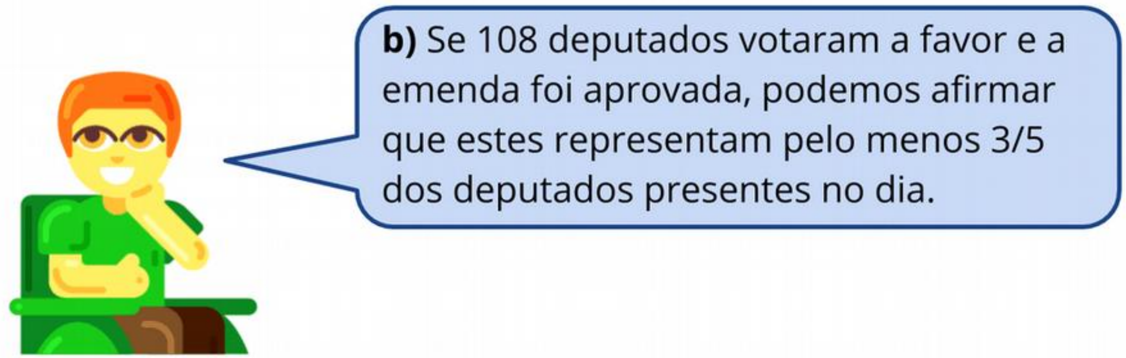
- Total de deputados = 513.
- Total de comparecimentos = 170.

$$\frac{1}{3} \text{ de } 513 = \frac{1}{3} \times 513 = \frac{351}{3} = 171.$$

Para que a votação ocorra, é necessário que 171 deputados compareçam à Câmara no dia da votação.



Fração como operador multiplicativo



Se pelo menos $\frac{3}{5}$ dos deputados votaram a favor, podemos afirmar que no máximo $\frac{2}{5}$ dos deputados votaram contra a emenda.

$\frac{3}{5}$ dos presentes → 108 deputados $\qquad \frac{3}{5} \div 3 \rightarrow 108 \div 3$

$\frac{1}{5}$ dos presentes → 36 deputados $\qquad \frac{1}{5} \times 2 \rightarrow 36 \times 2$

$\frac{2}{5}$ dos presentes → 72 deputados

Fração como operador multiplicativo

A operação matemática que fundamenta a utilização de uma fração como operador é a **MULTIPLICAÇÃO**.

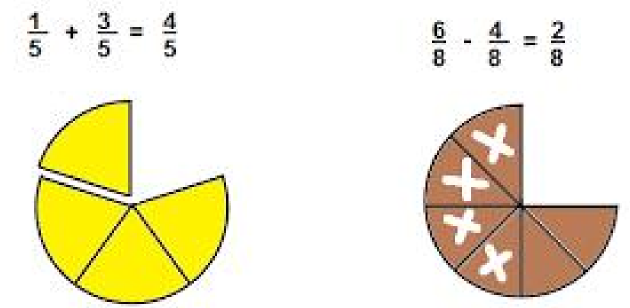
Para se dar início na votação de uma emenda, há a necessidade de um Quórum igual a $\frac{1}{3}$, essa fração representa a quantidade de deputados que devem estar presentes no momento. E a **multiplicação** foi a operação utilizada para a determinar essa quantidade.

$$\frac{1}{3} \text{ de } 513 = \boxed{\frac{1}{3} \times 513} = \frac{513}{3} = 171$$

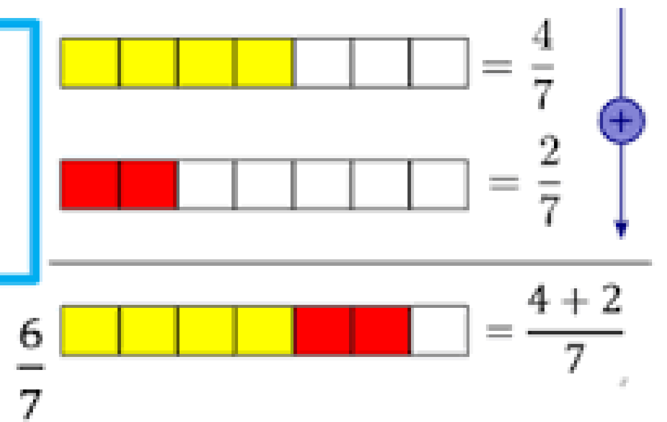
Para saber mais:
https://novaescola.org.br/plano-de-aula/sequencia/as-fracoes-em-nosso-dia-a-dia/175

Atividade da semana

Operações entre frações e sua representação



$$\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4+2}{7}=\frac{6}{7}$$



Paradoxos de Zenão