Lista de Exercícios para a P2

① Denominaremos de *tri-vetor* (3-vetor) (e o denotaremos por letras maiúsculas em negrito) qualquer 4-vetor $\mathbf{V}^a$ que, *por construção*, seja puramente espacial para algum observador (ou seja, $\mathbf{V}^a \in \mathbb{V}^\perp(\mathbf{e}_0^a)$, onde $\mathbf{e}_0^a$ dá a direção da linha-de-mundo do observador em questão) e que tenha significado físico *apenas* para esse observador (por conta da informação do observador entrar na construção de $\mathbf{V}^a$). Um exemplo de 3-vetor é a 3-velocidade que um observador $\mathcal{O}$ atribui para uma linha-de-mundo qualquer.

(a) Seguindo a construção que levou à Eq. (2.2) das notas de aula, mostre que a 3-velocidade $\mathbf{U}^a$ que um observador $\mathcal{O}$, passando pelo evento p, atribui para outra linha-de-mundo passando por p na direção do 4-vetor u^a, é dada por

$$\frac{\mathbf{U}^a}{c} = -\frac{u^a}{(g_{bc}\,\mathbf{e}_0^b\,u^c)} - \mathbf{e}_0^a; \tag{1}$$

(Note que a informação do observador — via $\mathbf{e}_0^a$ — aparece explicitamente na construção de $\mathbf{U}^a \in \mathbb{V}^\perp(\mathbf{e}_0^a)$, o que a caracteriza como um 3-vetor.)

(b) Mostre que se u^a é tipo-luz, então $\|\mathbf{U}^a\| = c$, qualquer que seja o observador;

(c) Sendo u^a a 4-velocidade de uma partícula massiva, mostre que sua 3-velocidade, de acordo com o observador $\mathcal{O}$, é dada por

$$\mathbf{U}^a = \gamma_U^{-1} u^a - c\,\mathbf{e}_0^a, \tag{2}$$

onde γ_U é o fator de Lorentz com o módulo da velocidade espacial dado por $\|\mathbf{U}^a\|$;

(d) Seja $\mathbf{U}^a$ (respectivamente, $\widetilde{\mathbf{U}}^a$) a 3-velocidade que o observador inercial $\mathcal{O}$ (resp., $\widetilde{\mathcal{O}}$) atribui para uma dada partícula (com linha-de-mundo tipo-tempo). Seja $\mathbf{V}^a$ a 3-velocidade que $\mathcal{O}$ atribui para $\widetilde{\mathcal{O}}$. Utilizando a Eq. (2), relacione essas 3-velocidades, obtendo:

$$\gamma_{\widetilde{U}} = \gamma_V \gamma_U \left(1 - \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right), \tag{3}$$

$$(\widetilde{\mathbf{U}}^a)_\parallel = \frac{(\mathbf{U}^a - \mathbf{V}^a)_\parallel}{1 - \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}{c^2}}, \tag{4}$$

$$\widetilde{\mathbf{U}}^a_\perp = \frac{\mathbf{U}^a_\perp}{\gamma_V \left(1 - \frac{\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}}{c^2}\right)}, \tag{5}$$

onde $\mathbf{U}\cdot\mathbf{V} := g_{ab}\mathbf{U}^a\mathbf{V}^b$ (já que ambos 3-vetores pertencem à mesma seção espacial) e $(\mathbf{W}^a)_\parallel$ (respectivamente, $\mathbf{W}^a_\perp$) representa a projeção do 3-vetor $\mathbf{W}^a$ na direção do (resp., perpendicular ao) movimento relativo entre $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$. (Existe uma sutil razão para a ligeira diferença de notação entre $(\mathbf{W}^a)_\parallel$ e $\mathbf{W}^a_\perp$. Tente descobrir qual é essa razão.)

② Considere três observadores inerciais, $\mathcal{O}$, $\widetilde{\mathcal{O}}$ e $\mathcal{O}'$, caracterizados, respectivamente, por tetradas $\{\mathbf{e}^a_\mu\}$, $\{\widetilde{\mathbf{e}}^a_\mu\}$ e $\{\mathbf{e}'^a_\mu\}$. De acordo com $\mathcal{O}$, $\widetilde{\mathcal{O}}$ se move com 3-velocidade $V_1\,\mathbf{e}^a_1$ e seus eixos espaciais estão alinhados. De acordo com $\widetilde{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}'$ se move com 3-velocidade $V_2\,\widetilde{\mathbf{e}}^a_2$ e seus eixos espaciais também estão alinhados.

(a) Qual a 3-velocidade de $\mathcal{O}'$, de acordo com $\mathcal{O}$? (Obtenha sua resposta compondo *apropriadamente* os *boosts* que relacionam $\mathcal{O}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$ e $\widetilde{\mathcal{O}}$ e $\mathcal{O}'$. Verifique se a velocidade obtida é consistente com o item (d) do Exercício ①.)

(b) Mostre que um *boost* com a velocidade calculada no item anterior relaciona a base $\{\mathbf{e}^a_\mu\}$ com outra base que difere de $\{\mathbf{e}'^a_\mu\}$ por uma mera rotação espacial em torno do eixo $\mathbf{e}^a_3 \equiv \mathbf{e}'^a_3$. Além disso, obtenha uma expressão que determina o ângulo dessa rotação (em termos de V_1 e V_2).

Considere, agora, uma partícula com *spin* que executa movimento circular e uniforme em relação ao observador $\mathcal{O}$, no plano xy, com velocidade angular Ω e raio R. Suponha que não haja torque aplicado sobre a partícula em relação ao seu centro de massa — de modo que seu *spin* aponta sempre na mesma direção espacial (de acordo com seu próprio referencial). Tomemos um trecho *infinitesimal* de sua trajetória, percorrido num intervalo de tempo (infinitesimal) δt, de modo que no início desse intervalo a 3-velocidade da partícula (de acordo com $\mathcal{O}$) era dada por $\Omega R\, \mathbf{e}_1^a$.

(c) Qual a 3-velocidade dessa partícula no final do intervalo δt? Expresse o resultado apenas até primeira ordem em δt, já que esta é uma quantidade infinitesimal;

(d) Usando os resultados dos itens (b) e (c), calcule a *taxa* ω_T com que o *spin* da partícula precessiona em torno do eixo z de acordo com o observador $\mathcal{O}$. (Obs.: Para propósito de conferência, a resposta é $\omega_T = -(\gamma - 1)\,\Omega$ e esse fenômeno é chamado de *precessão de Thomas*.)

③ Algumas referências definem a chamada *rapidez* (em inglês, *rapidity*) como sendo o parâmetro adimensional real ϑ que se relaciona com a velocidade escalar V através de $\tanh(\vartheta) := V/c$. A vantagem desse parâmetro no contexto relativístico é que a composição de *boosts* na *mesma direção*, digamos $\Lambda_{\mathrm{B}_i}(V_1)$ e $\Lambda_{\mathrm{B}_i}(V_2)$, embora não seja aditiva nas velocidades [ou seja, em geral $\Lambda_{\mathrm{B}_i}(V_1)\Lambda_{\mathrm{B}_i}(V_2) \neq \Lambda_{\mathrm{B}_i}(V_1 + V_2)$], é aditiva nas *rapidezas* [ou seja, $\Lambda_{\mathrm{B}_i}(\vartheta_1)\Lambda_{\mathrm{B}_i}(\vartheta_2) \equiv \Lambda_{\mathrm{B}_i}(\vartheta_1 + \vartheta_2)$; abusando da notação, $\Lambda(\vartheta)$ é obtida substituindo-se $V = c\tanh(\vartheta)$ em $\Lambda(V)$]. Além disso, em termos de ϑ, as matrizes de *boosts* nas direções dos eixos espaciais assumem uma forma análoga às matrizes de rotação em torno dos eixos espaciais, onde ao invés das funções trigonométricas, aparecem as funções hiperbólicas.

(a) Obtenha a forma das matrizes $\Lambda_{\mathrm{B}_i}(V)$ em termos da rapidez ϑ;

(b) Mostre que, de fato, a composição de *boosts* numa mesma direção (arbitrária) é aditiva na rapidez.

Como uma curiosidade, considere a linha-de-mundo definida, em relação a um evento $o \in \mathbb{M}$ arbitrário, através de $\psi(o, p(\vartheta)) \equiv s^a(\vartheta) := \lambda_\vartheta(\kappa\, \mathbf{e}_1^a)$, onde λ_ϑ representa um *boost* na direção de $\mathbf{e}_1^a$, com rapidez ϑ, e $\kappa \neq 0$ é uma constante real.

(c) Obtenha explicitamente $s^a(\vartheta)$ em termos de κ, ϑ e da base tetrada $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$;

(d) Calcule a 4-velocidade, a 4-aceleração e a aceleração própria dessa linha-de-mundo.

④ Seja $\{x^\mu\}$ um dado sistema de coordenadas, $\{\partial_\mu^a\}$ a base coordenada associada (em $\mathbb{V}$) e $\{\mathbf{dx}_a^\mu\}$ a base dual (em $\mathbb{V}^*$). Suponha que nessas coordenadas, as componentes da métrica sejam dadas por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ B & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde A, B e C são números reais.

(a) Encontre uma condição que os valores A, B e C devem satisfazer;

(b) Calcule, explicitamente, a relação de cada um dos 4-vetores $(\mathbf{dx}^\mu)^a$ com os 4-vetores da base coordenada. O que acontece quando $\{x^\mu\}$ é um sistema de coordenadas cartesiano inercial?

(c) Calcule, explicitamente, a relação de cada um dos covetores $(\partial_\mu)_a$ com os covetores da base coordenada dual. O que acontece quando $\{x^\mu\}$ é um sistema de coordenadas cartesiano inercial?

⑤ Seja u^a a 4-velocidade de uma partícula e a^a sua 4-aceleração.

(a) Expresse as componentes u^μ dessa 4-velocidade na base associada às coordenadas cartesianas inerciais $\{(ct, x, y, z)\}$ — associadas a uma família de observadores $\mathcal{O}$ —, em termos da velocidade usual $\vec{v} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$;

(b) Considere, agora, uma outra família de observadores inerciais $\mathcal{O}'$ cujas coordenadas cartesianas associadas, $\{(ct', x', y', z')\}$, se relacionam com as de $\mathcal{O}$ através de um *boost* com velocidade V na direção x. Obtenha as componentes u'^μ da 4-velocidade u^a nessas novas coordenadas e, em seguida, relacione $\vec{v'}$ com $\vec{v}$. Compare o resultado com o item (d) do Exercício ①;

(c) Expresse as componentes a^μ da 4-aceleração na base associada às coordenadas $\{(ct, x, y, z)\}$ do item (a), em termos da velocidade, $\vec{v}$, e das componentes centrípeta e tangencial da aceleração, $\vec{a} = d\vec{v}/dt = \vec{a}_{cp} + \vec{a}_{tg}$;

(d) Calcule a aceleração própria dessa partícula, $\sqrt{g_{ab}\, a^a a^b}$, em termos de $\vec{v}$ e $\vec{a}$, e, a partir do resultado, justifique o nome "aceleração própria".

⑥ Sendo $\{(ct, x, y, z)\}$ um sistema de coordenadas cartesiano inercial, considere as novas coordenadas $\{(c\tau, x, y, \zeta)\}$ definidas pelas relações

$$ct = \zeta \sinh(\kappa\tau), \quad z = \zeta \cosh(\kappa\tau),$$

onde κ é uma constante positiva.

(a) Encontre a relação entre $\{\partial^a_\tau, \partial^a_\zeta\}$ e $\{\partial^a_t, \partial^a_z\}$;

(b) Calcule as componentes da métrica nas coordenadas $\{(c\tau, x, y, \zeta)\}$ a partir da expressão $g_{\mu\nu} := g_{ab}\partial^a_\mu \partial^b_\nu$;

(c) Calcule as componentes da métrica nas coordenadas $\{(c\tau, x, y, \zeta)\}$ a partir da lei de transformação tensorial;

(d) Calcule a 4-velocidade, a 4-aceleração e a aceleração própria da linha-de-mundo $(x, y, \zeta) = (x_0, y_0, \zeta_0) =$ constante. Deixe claro, no processo, a relação entre o tempo-próprio da linha-de-mundo e a coordenada τ.

⑦ Numa tentativa de construir um sistema de coordenadas cartesiano acelerado o mais análogo possível ao sistema cartesiano inercial, um aluno optou por substituir a coordenada τ do sistema de coordenadas dado no exercício anterior pela coordenada $\widetilde{\tau} := (\kappa\zeta/c)\tau$ — que é o tempo físico de cada observador parado nesse sistema de coordenadas (vide resolução do item (d) do exercício anterior). A esperança desse aluno era de que, ao utilizar apenas distâncias e tempo físicos como coordenadas, o elemento-de-linha assumiria a mesma forma que em coordenadas cartesianas inerciais, havendo, assim, uma completa simetria entre esses sistemas de coordenadas.

(a) Obtenha a matriz jacobiana de transformação de coordenadas $(c\tau, x, y, \zeta) \mapsto (c\widetilde{\tau}, x, y, \zeta)$;

(b) Represente a base coordenada associada a $(c\widetilde{\tau}, x, y, \zeta)$ em termos da associada a $(c\tau, x, y, \zeta)$;

(c) Calcule o elemento-de-linha nas coordenadas $(c\widetilde{\tau}, x, y, \zeta)$ e veja se o aluno conseguiu o que queria.

⑧ Considere coordenadas $\{(ct', r', \theta', z')\}$ adaptadas ao referencial girante do carrossel da Seção 2.2, cuja relação com as coordenadas *cilíndricas* inerciais $\{(ct, r, \theta, z)\}$ (nas quais o eixo do carrossel coincide com o eixo Oz) é dada por $t' = t\sqrt{1 - \Omega^2 R^2/c^2}$, $r' = r$, $\theta' = \theta - \Omega t$ e $z' = z$.

(a) Obtenha a relação entre a base coordenada $\{\partial'_\mu\}$ e a base *tetrada* que caracteriza o referencial *inercial* em relação ao qual o eixo de rotação do carrossel é fixo;

(b) Obtenha o elemento-de-linha nas coordenadas $\{(ct', r', \theta', z')\}$, deixando claro qual o significado físico de t' e para quem;

(c) Calcule as componentes u'^μ da 4-velocidade de um observador "parado" em (r'_0, θ'_0, z'_0);

(d) Calcule as componentes a'^μ da 4-aceleração do mesmo observador do item anterior;

(e) Calcule a aceleração própria do observador dos itens anteriores.