

3.1.2 Elemento-de-linha

Como vimos, a expressão do intervalo invariante entre dois eventos quaisquer toma uma forma simples, dada pela Eq. (3.1), quando escrita em termos do sistema de coordenadas particular φ_s . Já para um sistema de coordenadas arbitrário, o fato de as linhas coordenadas — curvas ao longo das quais apenas uma das coordenadas varia — não serem necessariamente linhas retas no espaço-tempo, faz com que as componentes do 4-vetor separação entre dois eventos p e q , $\Delta s^a := \psi(p, q)$, não sejam simplesmente a diferença das coordenadas desses eventos: $\Delta s^\mu := \Delta s^a \mathbf{dx}_a^\mu \neq x^\mu(q) - x^\mu(p) =: \Delta x^\mu$.⁵ A **Fig. 3.4** ilustra bem essa diferença, pois, de acordo com a representação de p e q (e considerando, por exemplo, a base definida em p), Δs^a tem apenas componente na direção de ∂_0^a — logo, $\Delta s^j = 0$ —, enquanto que $\Delta x^j := x^j(q) - x^j(p) \neq 0$.

⁵Note que a expressão $\Delta s^a \mathbf{dx}_a^\mu$ é ambígua, pois se precisa dizer em que evento (p ou q ; ou outro) a base dual $\mathbf{dx}_a^\mu$ está sendo considerada. Independente dessa escolha, a conclusão de que $\Delta s^a \mathbf{dx}_a^\mu \neq \Delta x^\mu$ é, em geral, correta.

- **Exercício:** Para ilustrar num caso concreto e simples a diferença entre componentes do vetor separação entre dois eventos p e q (Δs^μ) e a diferença das coordenadas desses mesmos dois eventos (Δx^μ), vamos considerar um plano euclidiano bidimensional coberto com coordenadas polares $\{(r, \theta)\}$. Considere os pontos P_1 e P_2 do plano que nesse sistema de coordenadas são determinados por $(R, 0)$ e $(R, \pi/2)$, respectivamente, com R uma constante positiva.

- Obtenha as componentes do segmento orientado $\overrightarrow{P_1 P_2}$ na base coordenada $\{\partial_r^a, \partial_\theta^a\}$ definida em P_1 e compare com a diferença das coordenadas dos pontos;
- Repita o item anterior, mas agora utilizando a base coordenada definida em P_2 e, novamente, compare com a diferença das coordenadas dos pontos.

Embora a Eq. (3.1) não seja válida, em geral, para coordenadas arbitrárias, uma versão infinitesimal sua é. Isso porque, sendo p e q eventos *arbitrariamente próximos*, com $\psi(p, q) =: ds^a$, de modo que as coordenadas de p e q difiram por quantidades infinitesimais dx^μ , tem-se $ds^a = (\partial s^a / \partial x^\mu) dx^\mu = dx^\mu \partial_\mu^a$ — ou seja, infinitesimalmente vale que $ds^a dx_a^\mu = dx^\mu$ — e, portanto,

$$\mathcal{I}(p, q) = g_{ab} ds^a ds^b = g_{ab} \partial_\mu^a \partial_\nu^b dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.5)$$

À quantidade dada pela Eq. (3.5), que nada mais é do que o intervalo invariante entre eventos com separação infinitesimal, expresso em termos das coordenadas dos eventos, dá-se o nome de *elemento-de-linha* e é normalmente representado por ds^2 .⁶

- **Exercício:** Por concretude, considere, novamente, um plano euclidiano bidimensional coberto com coordenadas polares, como no exercício anterior. Considere dois pontos infinitesimalmente próximos, com coordenadas (r, θ) e $(r + dr, \theta + d\theta)$.
 - Calcule o quadrado da distância euclidiana entre eles, que é o análogo do elemento-de-linha do espaço-tempo; (Use apenas geometria plana para esse cálculo, lembrando que dr e $d\theta$ são infinitesimais.)
 - A partir daí, extraia as componentes da métrica nessas coordenadas.

⁶Não se deve encarar ds^2 como sendo o quadrado de uma quantidade ds , pois ds^2 é negativo para eventos com separação tipo-tempo. Encare ds^2 apenas como o “nome” da quantidade $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ que é quadrática na diferença infinitesimal de coordenadas.

Dada uma curva qualquer em $\mathbb{M}$ expressa em termos de coordenadas, $x^\mu(\lambda)$ (com λ sendo um parâmetro qualquer), note que as *componentes* v^μ do 4-vetor tangente à curva, na base coordenada associada, são dadas simplesmente pela derivada das coordenadas, pois⁷

$$v^a(\lambda) := \frac{ds^a(\lambda)}{d\lambda} = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} \frac{\partial s^a}{\partial x^\mu} = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} \partial_\mu^a =: v^\mu(\lambda) \partial_\mu^a.$$

Com isso em mente, propomos o seguinte exercício:

- **Exercício:** Considere, mais uma vez, o plano euclidiano bidimensional coberto com coordenadas polares $\{(r, \theta)\}$. Considere a curva dada pelas coordenadas $(r, \theta) = (R, \lambda)$, onde R é uma constante positiva e $\lambda \in [0, \pi]$ é o parâmetro da curva.

- Obtenha as componentes do vetor tangente a essa curva em termos da base coordenada $\{\partial_r^a, \partial_\theta^a\}$ em cada ponto;
- Calcule, usando a Eq. (2.10) e o resultado do exercício anterior, o comprimento dessa curva;
- Repita os dois itens acima para a curva dada por $(r, \theta) = (R(1 + \lambda), 2\pi\lambda)$, com $\lambda \in [0, 1]$ e visualize essas curvas e vetores no plano euclidiano.

A Eq. (3.5) tem importância central em Relatividade (tanto Restrita, quanto Geral) e, mais genericamente, em geometria, pois é ela que fornece a “tradução” entre os rótulos arbitrários que estamos dando aos eventos do espaço-tempo (as coordenadas) e a quantidade física/geométrica inerente ao espaço-tempo (o intervalo invariante). Apenas a título de curiosidade, note que a expressão para o *tensor* métrico numa base coordenada (dual) é

$$g_{ab} = g_{\mu\nu} \mathbf{dx}_a^\mu \mathbf{dx}_b^\nu,$$

que é muito semelhante à Eq. (3.5) (embora com significados diferentes). Essa semelhança é mais uma justificativa para nossa escolha de notação para os elementos da base coordenada dual.

Coordenadas cartesianas inerciais e transformações de Lorentz

Agora que falamos de sistemas de coordenadas arbitrários, vamos ver alguns exemplos concretos no espaço-tempo de Minkowski. A classe

⁷Embora omitamos, por simplicidade de notação, a dependência em λ nos elementos da base coordenada $\partial_\mu^a = \partial_\mu^a(\lambda)$, devemos lembrar que esses elementos podem mudar ponto a ponto do espaço-tempo e, portanto, da curva. Isso desempenhará um papel importantíssimo mais adiante.

mais simples de sistemas de coordenadas em $\mathbb{M}$ é a obtida pelas associações φ_s que descrevemos no começo desta seção, associadas a escolhas de eventos o e tetradas $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$ de referência. Isso provê um sistema de coordenadas onde cada evento $p \in \mathbb{M}$ é “rotulado” pela quádrupla s^μ que, ao mesmo tempo, são as componentes do 4-vetor $s^a = \psi(o, p)$ na base tetrada escolhida. Por outro lado, de toda a discussão que fizemos nas Seções 1.5, 2.1 e 2.2, sabemos como interpretar *fisicamente* essas componentes: $s^0/c =: t$ representa o tempo físico decorrido entre os eventos o e p , de acordo com a família de observadores inerciais caracterizada pela tetrada $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$; já as componentes espaciais $s^j =: (x, y, z)$ representam distâncias espaciais medidas (por esses mesmos observadores e a partir da linha-de-mundo que passa por o) ao longo das direções dadas por $\mathbf{e}_j^a$. Note, em particular, que, com essa interpretação, recupera-se a Eq. (1.3) a partir da Eq. (3.1), cuja versão infinitesimal (ou seja, o elemento-de-linha) toma a forma

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (3.6)$$

Qualquer sistema de coordenadas no qual o elemento-de-linha toma essa forma é dito ser um sistema de coordenadas *cartesiano inercial* — devido à interpretação física dessas coordenadas, que detalhamos acima. Equivalentemente, um sistema de coordenadas é cartesiano inercial se, e somente se, a base coordenada associada é um campo *uniforme* de tetradas em todo o espaço-tempo.

Com base na análise de simetrias que fizemos na Seção 2.3, podemos facilmente obter a relação entre coordenadas cartesianas inerciais associadas a diferentes famílias de observadores inerciais. Isso porque diferentes famílias de observadores inerciais, digamos $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$, estão associadas a diferentes bases tetradas, $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$ e $\{\mathbf{e}'_\mu^a\}$, respectivamente, que, por sua vez, se relacionam por um elemento do grupo de Lorentz ortócrono, $\Lambda \in \mathcal{L}^\uparrow$:

$$\mathbf{e}'_\mu^a = \Lambda_\mu^\alpha \mathbf{e}_\alpha^a.$$

Com isso, lembrando que $s'^a := \psi(o', p) = \psi(o', o) + \psi(o, p) =: c^a + s^a$ — pois a escolha do evento de referência pode ser diferente para diferentes famílias de observadores —, a relação entre as coordenadas $s^\mu = (ct, x, y, z)$ e $s'^\mu = (ct', x', y', z')$ é obtida a partir de

$$\begin{aligned} s'^\mu \mathbf{e}'_\mu^a &= s'^a = c^a + s^a = (c^\mu + s^\mu) \mathbf{e}_\mu^a = (c^\mu + s^\mu) (\Lambda^{-1})^\alpha_\mu \mathbf{e}'_\alpha^a \\ \Rightarrow [s'^\mu - (\Lambda^{-1})^\mu_\alpha (s^\alpha + c^\alpha)] \mathbf{e}'_\mu^a &= 0 \\ \Rightarrow s'^\mu &= (\Lambda^{-1})^\mu_\alpha s^\alpha + c'^\mu, \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde, assim como c^μ , c'^μ é uma quádrupla constante qualquer (relacionada à mudança da origem do sistema de coordenadas).

A Eq. (3.7) (com $\Lambda \in O(3,1)$) representa a transformação mais geral entre coordenadas cartesianas inerciais; ou seja, a transformação mais geral que preserva a *forma* dada pela Eq. (3.6) para o elemento-de-linha. Aplicando essa expressão ao caso particular em que $\mathcal{O}'$ se move com velocidade V no sentido de $\mathbf{e}_1^a$, em relação a $\mathcal{O}$, mantendo “alinhados” os vetores espaciais da base [vide Eqs. (2.5) e (2.39)] e adotando o mesmo evento como referência ($o = o'$), temos, finalmente, as *transformações de Lorentz* na forma canônica apresentada nos livros didáticos:

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - Vx/c^2) \\ x' = \gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} . \quad (3.8)$$

• **Exercício:** Seja u^a a 4-velocidade de uma partícula e a^a sua 4-aceleração.

- (a) Expresse as componentes u^μ dessa 4-velocidade na base associada às coordenadas cartesianas inerciais $\{(ct, x, y, z)\}$ — associadas a uma família de observadores $\mathcal{O}$ —, em termos da velocidade usual $\vec{v} = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$;
- (b) Considere, agora, uma outra família de observadores inerciais $\mathcal{O}'$ cujas coordenadas cartesianas associadas, $\{(ct', x', y', z')\}$, se relacionam com as de $\mathcal{O}$ através das Eqs. (3.8). Aplicando a lei de transformação dada pela Eq. (3.4), obtenha as componentes u'^μ da 4-velocidade u^a nessas novas coordenadas e, em seguida, relacione $\vec{v}'$ com $\vec{v}$. Compare o resultado com o item (d) do Exercício ⑥ do capítulo anterior;
- (c) Expresse as componentes a^μ da 4-aceleração na base associada às coordenadas $\{(ct, x, y, z)\}$ do item (a), em termos da velocidade, $\vec{v}$, e das componentes centrípeta e tangencial da aceleração, $\vec{a} = d\vec{v}/dt = \vec{a}_{cp} + \vec{a}_{tg}$;
- (d) Calcule a aceleração própria dessa partícula, $\sqrt{g_{ab} a^a a^b}$, em termos de $\vec{v}$ e $\vec{a}$, e, a partir do resultado, justifique o nome “aceleração própria”.

Coordenadas cartesianas uniformemente aceleradas

Partindo para um exemplo concreto menos trivial, vamos considerar um sistema de coordenadas adaptado à família de observadores uniformemente acelerada que construímos na Subseção 2.2.1. Tomemos a Eq. (2.21) como ponto de partida, pois ela fornece uma maneira de

“localizar” eventos pertencentes ao *Rindler wedge* usando a quádrupla real $x^\mu := (c\tau, \zeta^j)$; portanto, essas serão nossas coordenadas — lembre que observadores parados nessas coordenadas ($\zeta^j = \text{constante}$) são uniformemente acelerados. Com isso, a base coordenada associada é dada por (fazendo $s^a \equiv x^a$ para a uniformidade de notação deste capítulo):

$$\partial_0^a := \frac{1}{c} \frac{\partial s^a}{\partial \tau} = \left(1 + \frac{a_0 \zeta^1}{c^2}\right) \left[\mathbf{e}_0^a \cosh\left(\frac{a_0 \Delta \tau}{c}\right) + \mathbf{e}_1^a \sinh\left(\frac{a_0 \Delta \tau}{c}\right) \right], \quad (3.9)$$

$$\partial_1^a := \frac{\partial s^a}{\partial \zeta^1} = \mathbf{e}_0^a \sinh\left(\frac{a_0 \Delta \tau}{c}\right) + \mathbf{e}_1^a \cosh\left(\frac{a_0 \Delta \tau}{c}\right), \quad (3.10)$$

$$\partial_{2,3}^a := \frac{\partial s^a}{\partial \zeta^{2,3}} = \mathbf{e}_{2,3}^a, \quad (3.11)$$

onde $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$ é uma base tetrad (fixa) qualquer. Dessas expressões, podemos prontamente obter o elemento-de-linha nessas coordenadas:

• **Exercício:** Obtenha o elemento-de-linha nas coordenadas $x^\mu = (c\tau, \zeta^j)$,

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{a_0 \zeta^1}{c^2}\right)^2 c^2 d\tau^2 + (d\zeta^1)^2 + (d\zeta^2)^2 + (d\zeta^3)^2, \quad (3.12)$$

de duas maneiras:

- (a) Diretamente das Eqs. (3.9–3.11) (usando a definição $g_{\mu\nu} := g_{ab} \partial_\mu^a \partial_\nu^b$);
- (b) Usando a lei de transformação dada pela Eq. (3.4) aplicada ao tensor métrico, usando a mudança de coordenadas $(ct, x, y, z) \mapsto (c\tau, \zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ que pode ser extraída diretamente da Eq. (2.21), com (ct, x, y, z) sendo as coordenadas cartesianas inerciais associadas a $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$.

A forma do elemento-de-linha acima justifica que as coordenadas espaciais ζ^j sejam ditas cartesianas — pois nas superfícies $\tau = \text{constante}$ (portanto, $d\tau = 0$) o elemento-de-linha toma a mesma forma que nas superfícies $t = \text{constante}$ nas coordenadas cartesianas inerciais [vide Eq. (3.6)].

Como vimos anteriormente, dada uma curva em $\mathbb{M}$ em termos de suas coordenadas, $x^\mu(\lambda)$, as componentes do 4-vetor tangente à curva são dadas pelas derivadas $dx^\mu(\lambda)/d\lambda$. Sendo assim, a 4-velocidade de um observador parado nas coordenadas ζ^j — que já sabemos ser uniformemente acelerado — tem componentes dadas por

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tilde{\tau}} = \frac{d\tau}{d\tilde{\tau}} (c, 0, 0, 0),$$

onde usamos $\tilde{\tau}$ para o tempo-próprio ao longo da linha-de-mundo em questão para discerni-la da coordenada τ (que, lembremos, é o tempo-próprio dos observadores parados em $\zeta^1 = 0$). A relação entre $\tilde{\tau}$ e τ , além de já ter sido obtida em mais de uma ocasião na Subseção 2.2.1, pode ser extraída do elemento-de-linha dado pela Eq. (3.12) lembrando que $d\tilde{\tau}^2 = -ds^2/c^2$ ao longo da linha-de-mundo dada, o que, neste caso ($d\zeta^j = 0$), leva a $d\tilde{\tau} = (1 + a_0\zeta^1/c^2)d\tau$ e, portanto,

$$u^\mu = \frac{(c, 0, 0, 0)}{1 + a_0\zeta^1/c^2}.$$

- **Exercício:** Reobtenha a expressão acima para u^μ aplicando a condição de normalização para a 4-velocidade, $u_a u^a = -c^2$.

Uma vez determinadas as componentes u^μ da 4-velocidade $u^a = u^\mu \partial_\mu^a$, podemos querer calcular a 4-aceleração associada, $a^a = du^a/d\tilde{\tau}$. Sabemos que a 4-velocidade calculada acima representa uma linha-de-mundo uniformemente acelerada. Porém, note que as componentes u^μ obtidas são constantes e, portanto, $du^\mu/d\tilde{\tau} = 0$. Sendo assim, as componentes a^μ da 4-aceleração *não* podem ser simplesmente dadas pela derivada das componentes da 4-velocidade:

$$a^\mu \neq \frac{du^\mu}{d\tilde{\tau}}.$$

Veremos, a seguir, a razão disso e como obter a^μ corretamente a partir de u^μ .

• Exercícios

- ① Em coordenadas cartesianas inerciais $\{(ct, x, y, z)\}$, considere uma linha-de-mundo dada pela equação horária $z(t) = gt(T - t)/2$ (e $x(t) = y(t) = 0$), com g e T sendo duas constantes positivas (satisfazendo $gT < 2c$) e $t \in [0, T]$.
 - (a) Calcule o tempo-próprio τ decorrido ao longo dessa linha-de-mundo, deixando clara sua comparação com T (de ser maior, menor ou igual);
 - (b) Obtenha uma aproximação para $\tau - T$ válida até segunda ordem em $gT/c \ll 1$.
- ② Em coordenadas cartesianas uniformemente aceleradas $\{(c\tau, \zeta^j)\}$, cujo elemento de linha associado é o dado pela Eq. (3.12) — mas com $a_0 = g > 0$ —, considere a linha-de-mundo dada pela equação horária $\zeta^1(\tau) = g\tau(T - \tau)/2$ (e $\zeta^2(\tau) = \zeta^3(\tau) = 0$), com $gT \ll c$ e $\tau \in [0, T]$.
 - (a) Calcule uma aproximação (válida até segunda ordem em $gT/c \ll 1$) para o tempo-próprio $\tilde{\tau}$ decorrido ao longo dessa linha-de-mundo, deixando clara sua comparação com T (de ser maior, menor ou igual);
 - (b) Discuta a relação do resultado acima com o do item (b) do exercício anterior;
 - (c) Com base nos resultados anteriores, se jogássemos um relógio verticalmente para cima, a partir da superfície da Terra, de modo que ele atingisse uma altura de 100 m antes de cair de volta ao solo, *estime* qual seria a diferença de tempo marcada pelo relógio em relação ao tempo na superfície da Terra sob ambas as hipóteses: (i) A superfície da Terra ser um referencial inercial e (ii) a superfície da Terra ser um referencial com aceleração própria para cima com intensidade g .
- ③ Considere coordenadas $\{(ct', r', \theta', z')\}$ adaptadas ao referencial girante do carrossel da Seção 2.2, cuja relação com as coordenadas *cilíndricas* inerciais $\{(ct, r, \theta, z)\}$ (nas quais o eixo do carrossel coincide com o eixo Oz) é dada por $t' = t\sqrt{1 - \Omega^2 R^2/c^2}$, $r' = r$, $\theta' = \theta - \Omega t$ e $z' = z$.
 - (a) Obtenha o elemento-de-linha nessas coordenadas, deixando claro qual o significado de t' e para quem;

- (b) Calcule as componentes u^μ (na base coordenada associada) da 4-velocidade de um observador “parado” em (r'_0, θ'_0, z'_0) ;
- (c) Calcule as componentes a^μ da 4-aceleração do mesmo observador do item anterior;
- (d) Calcule a aceleração própria do observador dos itens anteriores;

④ Numa tentativa de construir um sistema de coordenadas cartesiano acelerado o mais análogo possível ao sistema cartesiano inercial, um aluno optou por substituir a coordenada τ — que representa o tempo físico apenas dos observadores em $\zeta^1 = 0$ — pela coordenada $\tilde{\tau} := (1 + a_0\zeta^1/c^2)\tau$ — que é o tempo físico de cada observador parado nesse sistema de coordenadas. A esperança desse aluno era de que, ao utilizar apenas distâncias e tempo físicos como coordenadas, o elemento de linha assumiria a mesma forma que em coordenadas cartesianas inerciais, Eq. (3.6), havendo, assim, uma completa simetria entre esses sistemas de coordenadas.

- (a) Obtenha a matriz jacobiana de transformação de coordenadas $(c\tau, \zeta^j) \mapsto (c\tilde{\tau}, \zeta^j)$;
- (b) Represente a base coordenada associada a $(c\tilde{\tau}, \zeta^j)$ em termos da associada a $(c\tau, \zeta^j)$; (Sugestão: embora as coordenadas espaciais ζ^j sejam as mesmas em ambos os sistemas de coordenadas, denote-as por letras diferentes — por exemplo, $\tilde{\zeta}^j$, com a condição de que $\tilde{\zeta}^j = \zeta^j$. Ao final do processo você deve entender o porquê desse cuidado.)
- (c) Calcule o elemento de linha nas coordenadas $(c\tilde{\tau}, \zeta^j)$ e veja se o aluno conseguiu o que queria.