# PLANO TANGENTE E APROXIMAÇÃO LINEAR

Disciplina de Cálculo II (LOB1004)
Profa. Responsável: Diovana Napoleão
Escola de Engenharia de Lorena EEL-USP
Departamento de Ciências Básicas e Ambientais

# PLANO TANGENTE E APROXIMAÇÃO LINEAR

Suponha que uma superfície $S$ tenha a equação $z = f(x, y)$, onde $f$ tenha derivadas parciais contínuas de primeira ordem, e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ ser um ponto em $S$. Sejam $C_1$ e $C_2$ as curvas obtidas pela intersecção dos planos verticais $y = y_0$ e $x = x_0$ com a superfície $S$. Então o ponto $P$ fica em $C_1$ em $C_2$. Encontre as equações das tangentes $T_1$ e $T_2$ à curva $C_1$ e $C_2$ no ponto $P$.

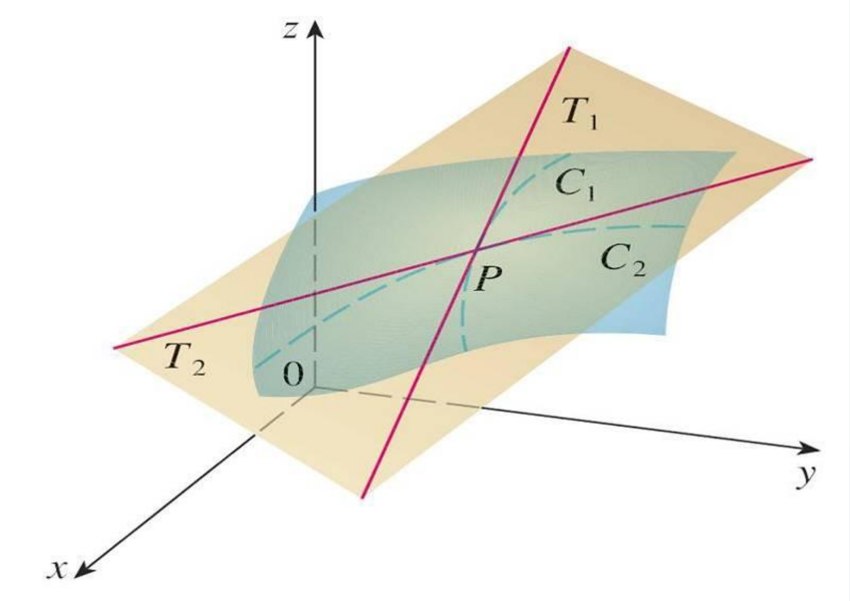
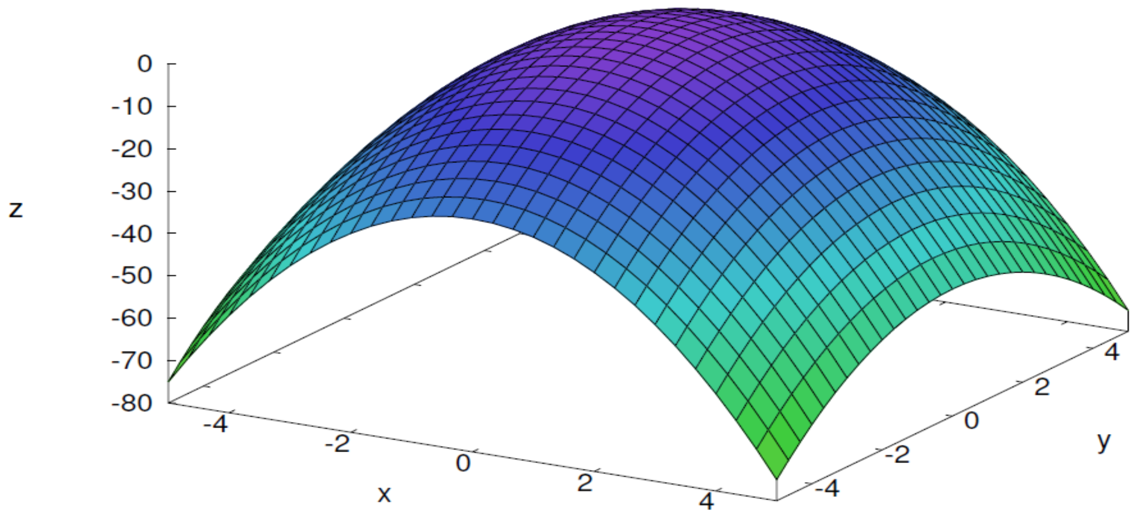



**Figura 1- Plano tangente contém as retas tangentes *T1 e T2***

# PLANO TANGENTE E APROXIMAÇÃO LINEAR

**Considere o seguinte exemplo:**

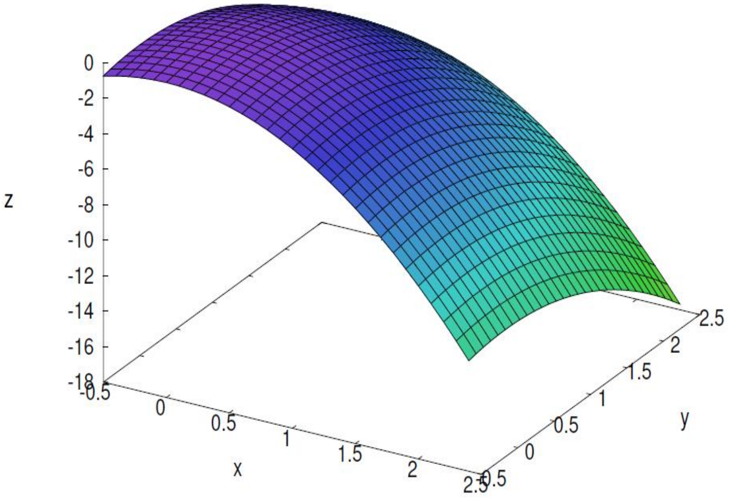
Considere o paraboloide elíptico dado por $z = -2x^2 - y^2$.



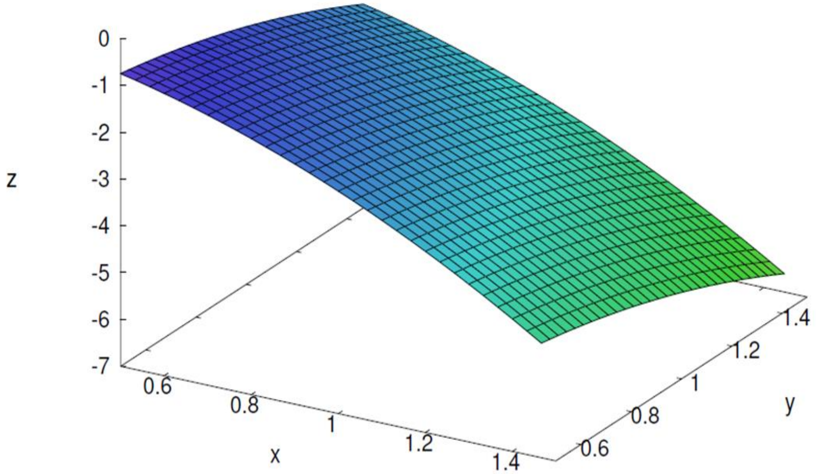

Suponha que desejamos estudar a figura próximo do ponto $P(1, 1, -3)$.

# PLANO TANGENTE E APROXIMAÇÃO LINEAR

A medida que damos *zoom*, vemos:



A medida que damos mais *zoom*, vemos:



# PLANO TANGENTE E APROXIMAÇÃO LINEAR

**Será apresentada a dedução da equação do plano tangente a S em P.**

A equação de qualquer plano passando por $P = (x_0, y_0, z_0)$ é

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

ou ainda, supondo $C \neq 0$, obtemos

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0). \qquad (1)$$

A intersecção do plano tangente com o plano $y = y_0$, fornece

$$z - z_0 = a(x - x_0).$$

Agora, essa reta é também tangente a superfície $S$ ao londo da curva $\mathcal{C}_1$ obtida pela intersecção com o plano $y = y_0$. Logo,

$$a = f_x(x_0, y_0).$$

Analogamente, devemos ter

$$b = f_y(x_0, y_0).$$

# PLANO TANGENTE E APROXIMAÇÃO LINEAR

## Plano Tangente

Suponha que $f$ seja uma função de duas variáveis com derivadas parciais de primeira ordem contínuas. A equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ é dada por

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

$$z - f(x_0 - y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} f(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} f(x_0, y_0)(y - y_0)¶$$

# PLANO TANGENTE E APROXIMAÇÃO LINEAR

**Considerando a expressão anterior na forma de produto escalar tem-se:**

$$z - f(x_0 - y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} f(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} f(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + (-1)(z - z_0) = 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)}_{\text{Vetor normal ao plano tangente}} . (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

# PLANO TANGENTE E APROXIMAÇÃO LINEAR

## Reta Normal

Defini-se a reta normal ao gráfico de f em P $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ como sendo a reta que passa por P e tem a direção do vetor $\vec{n}$.

$$X = P + \delta\vec{n}$$

$$(x,y,z) = \left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right) + \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$$

# LINEARIZAÇÃO E APROXIMAÇÃO LINEAR

## Linearização e Aproximação Afim

A função afim (transformação linear transladada)

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

é denominada **linearização** de $f$ em $(x_0, y_0)$.
A linearização fornece uma **aproximação afim** de $f$ para pontos $(x, y)$ próximos de $(x_0, y_0)$.

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

# LINEARIZAÇÃO E APROXIMAÇÃO LINEAR

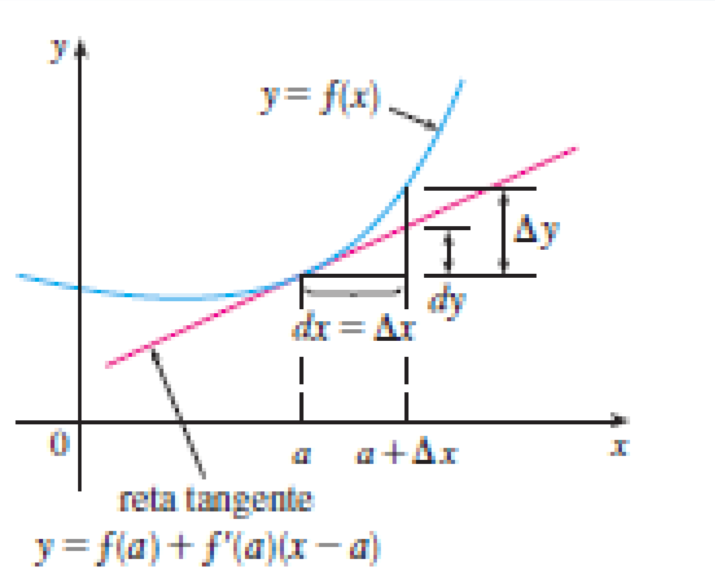



Figura 2- Relações entre o incremento *e a diferencial*

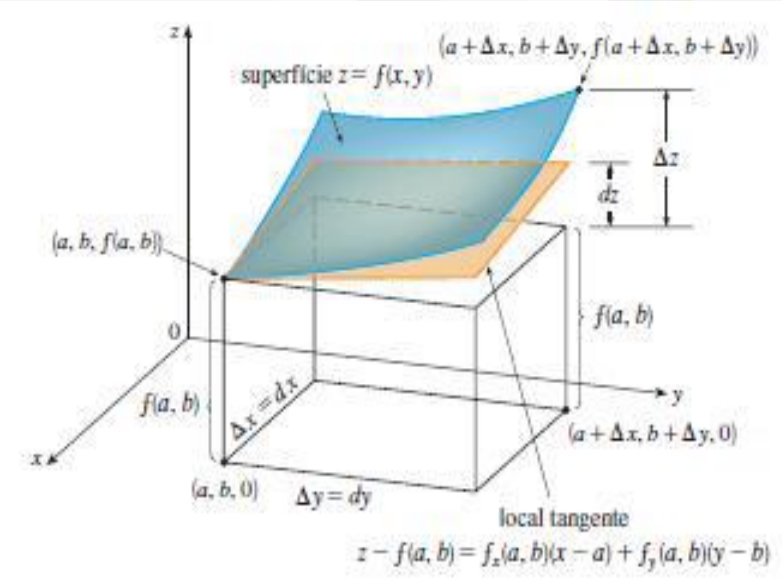



Figura 3- Interpretação geométrica da diferencial e o incremento

# LINEARIZAÇÃO E APROXIMAÇÃO LINEAR

Para uma função de duas variáveis, $z = f(x, y)$, definimos as **diferenciais** $dx$ e $dy$ como variáveis independentes; ou seja, podem ter qualquer valor. Então a **diferencial** $dz$ também chamada de **diferencial total**, é definida por

$$\boxed{dz = f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy}$$