PME3100 Mecânica I

Dinâmica do Sólido

Supõe-se um referencial fixo.

A definição de sólido ou corpo rígido foi vista na Cinemática.

1. Sistema de pontos materiais – Resultante e Momento em relação a um polo

Seja um conjunto de pontos materiais P_i de massas $m_i (i = 1,2, \cdots, N)$.

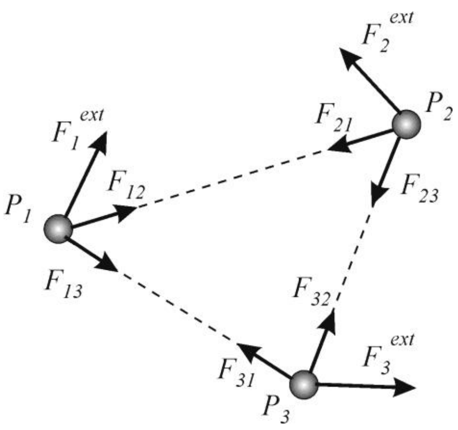
A resultante das forças que agem no ponto P_i pode ser escrita como:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

com:

$\vec{F}_i^{ext}$ = resultante das forças , externas ao conjunto, que agem em P_i

$\vec{F}_{ij}$ = ação (interna) do ponto P_j sobre P_i



Pelo Princípio da Ação e Reação, podemos escrever:

$\vec{F}_{ij} = \lambda_{ij}(P_j - P_i)$

$\vec{F}_{ji} = \lambda_{ij}(P_i - P_j) = -\lambda_{ij}(P_j - P_i)$, onde λ_{ij} é um escalar

A resultante total do sistema de forças $(\vec{F}_i, P_i)$ é:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \vec{R}^{ext} + \vec{R}^{int}$$

sendo:

$\vec{R}^{ext}$ = resultante das forças externas

$\vec{R}^{int}$ = resultante das forças internas

Temos:

$$\vec{R}^{int} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \sum_i \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}(P_j - P_i) = \vec{0}$$

pois a cada vetor $\vec{F}_{ij}$ corresponde um $\vec{F}_{ji}$ igual e contrário.

Portanto:

$$\boldsymbol{\vec{R} = \vec{R}^{ext}}$$

ou seja, *a resultante de todas as forças que agem nos pontos de um sistema é igual à resultante das forças externas ao sistema considerado*, isto é, a resultante das forças internas é nula.

Calculemos ao momento total das forças $\vec{F}_i$ em relação a um polo O:

$$\vec{M}_O = \sum_i (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = \sum_i (P_i - O) \wedge \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \sum_{j \neq i} (P_i - O) \wedge \vec{F}_{ij}$$

A dupla somatória é nula, pois, pelo princípio da ação e reação, sempre que aparecer o termo $(P_i - O) \wedge \vec{F}_{ij}$, vai aparecer também o termo $(P_j - O) \wedge \vec{F}_{ji}$, e teremos:

$$(P_i - O) \wedge \vec{F}_{ij} + (P_j - O) \wedge \vec{F}_{ji} = (P_i - O) \wedge \vec{F}_{ij} + (P_j - O) \wedge (-\vec{F}_{ij}) =$$

$$= [(P_i - O) - (P_j - O)] \wedge \vec{F}_{ij} = (P_i - P_j) \wedge \lambda_{ij}(P_j - P_i) = \vec{0}$$

Logo:

$$\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O}} = \sum_i (\boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{O}) \wedge \vec{\boldsymbol{F}}_i^{ext} = \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O}}^{ext}$$

Ou seja, *o momento total das forças que agem nos pontos de um sistema é igual ao momento das forças externas ao sistema considerado*, isto é, o momento das forças internas é nulo.

Podemos resumir esses resultados dizendo que *o sistema de forças internas a um conjunto de pontos materiais é equivalente a zero*.

2. Teorema da Resultante (TR)

O centro de massa *G* de um sistema de pontos materiais P_i de massas $m_i (i = 1,2, \cdots, N)$ é definido por:

$$m(G - O) = \sum_i m_i (P_i - O)$$

onde *O* é uma origem fixa arbitrária e m e a massa total do sistema.

Derivando duas vezes em relação ao tempo:

$$m\vec{a}_G = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{m\vec{a}_G} = \vec{\boldsymbol{R}}^{\boldsymbol{ext}}$$

Esta é a expressão do **Teorema da Resultante**: *"O centro de massa de um sistema se move como se nele fosse concentrada a massa total do sistema e nele agisse uma força cujo vetor representativo é a resultante das forças externas ao sistema."*.

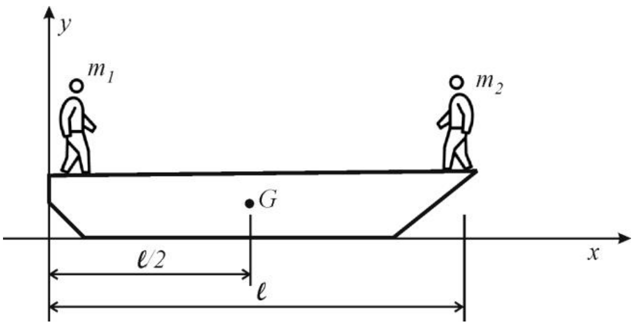
Como $m\vec{a}_G$ é também a variação da quantidade de movimento total do sistema $(\sum_i m_i \vec{v}_i)$, a expressão anterior também significa que: "*a variação da quantidade de movimento de um sistema é igual à resultante das forças externas*".

Além disso, como a primeira derivada da expressão inicial nos dá:

$$m\vec{v}_G = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

podemos afirmar que "*se a resultante das forças externas a um sistema é nula, seu centro de massa está em equilíbrio, ou em movimento retilíneo uniforme*", o que corresponde à lei da inércia ou, também, é conhecido como o *teorema da conservação da quantidade de movimento* de um sistema.

Exemplo 2.1: Duas pessoas, de massas m_1 e m_2, estão em pé na proa e na popa de um barco de massa *M*, a uma distância $\boldsymbol{\ell}$ entre si. Desprezando a resistência da água, determine o sentido e o deslocamento do barco se as duas pessoas trocam de lugar. O centro de massa do barco é o ponto *G* da figura.

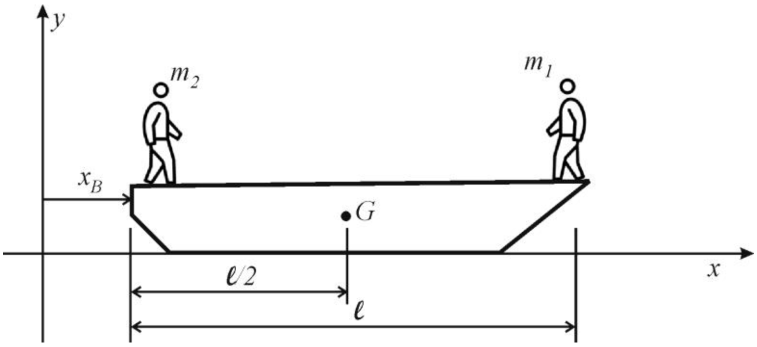


Resolução:

O centro de massa do conjunto, antes da troca de lugar, está na posição:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + M x_G}{M + m_1 + m_2} = \frac{0 + m_2 l + M l/2}{M + m_1 + m_2}$$

Como não há forças externas ao conjunto na direção horizontal, pelo Teorema da Resultante, o centro de massa permanece estacionário. Assim, após a troca:

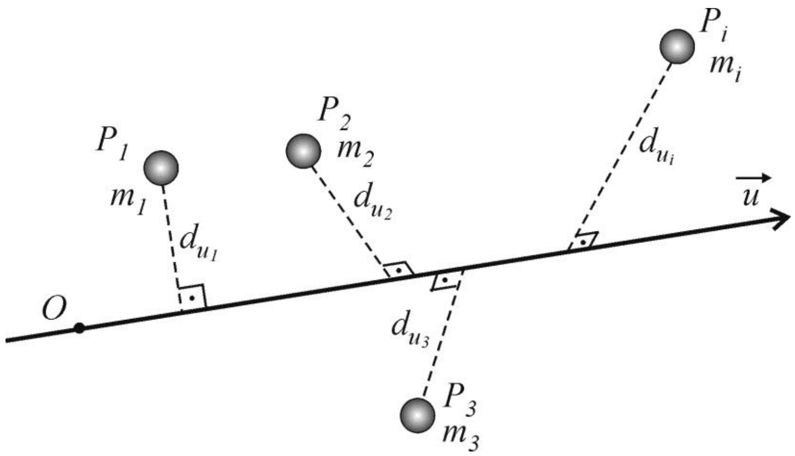


$$x_{CM} = \frac{m_2 x_B + m_1(l + x_B) + M(l/2 + x_B)}{M + m_1 + m_2} = \frac{m_2 l + M\, l/2}{M + m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x_B = \frac{m_2 - m_1}{M + m_1 + m_2} l} \ : \begin{cases} \textbf{se } \boldsymbol{m_2 > m_1}\textbf{: o barco vai para a direita} \\ \textbf{se } \boldsymbol{m_2 < m_1}\textbf{: o barco vai para a esquerda} \\ \textbf{se } \boldsymbol{m_2 = m_1}\textbf{: o barco não se move} \end{cases}$$

3. Momentos e Produtos de Inércia

Seja um conjunto de N pontos materiais P_i, de massas m_i $(i = 1, 2, \cdots, N)$, e um eixo orientado definido pelo ponto O e o versor $\vec{u}$.



O ***momento de inércia*** desse conjunto de pontos em relação ao eixo $O\vec{u}$ é definido por:

$$\boldsymbol{J_u = \sum_{i=1}^{N} m_i[(P_i - O) \wedge \vec{u}]^2}$$

ou equivalentemente:

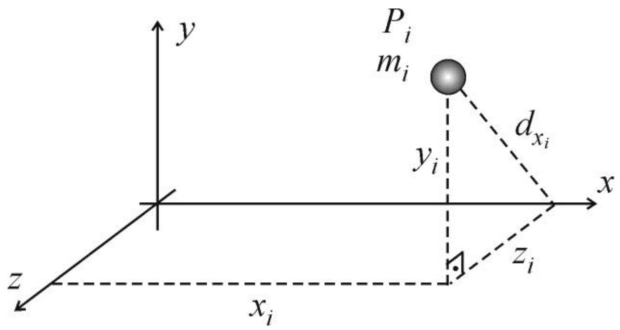
$$\boldsymbol{J_u = \sum_{i=1}^{N} m_i d_{ui}^2}$$

sendo d_{ui} a distância do ponto P_i ao eixo $O\vec{u}$.

Para corpos contínuos, sendo β a densidade de massa por unidade de volume do corpo:

$$J_u = \int_V \beta[(P - O) \wedge \vec{u}]^2 \, dV = \int_V \beta d_u^2 \, dV$$

Se considerarmos um sistema de eixos (O, x, y, z):



$$J_x = \sum_i m_i d_{xi}^2 = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

Analogamente:

$$J_y = \sum_i m_i d_{yi}^2 = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2)$$
$$J_z = \sum_i m_i d_{zi}^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Raios de giração:

$$r_x^2 = J_x/m$$
$$r_y^2 = J_y/m$$
$$r_z^2 = J_z/m$$

Note-se que o momento de inércia é sempre positivo, e só será nulo no caso trivial em que todos os pontos estejam sobre o eixo considerado.

Ainda considerando o sistema (O, x, y, z), os ***produtos de inércia*** são definidos por:

$$J_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i = J_{yx}$$
$$J_{yz} = \sum_i m_i y_i z_i = J_{zy}$$
$$J_{zx} = \sum_i m_i z_i x_i = J_{xz}$$

- Propriedade de simetria (não necessariamente geométrica, mas de massa)

a) plano de simetria

Se o sistema tem um plano de simetria, o produto de inércia em relação a um par de eixos ortogonais, dos quais um é ortogonal àquele plano, é nulo.

Ex.: plano *Oxy* de simetria: $\rightarrow \begin{cases} J_{xz} = 0 \\ J_{yz} = 0 \end{cases}$

b) eixo de simetria

Se o sistema tem um eixo de simetria, o produto de inércia em relação a um par de eixos ortogonais, dos quais um é esse eixo de simetria, é nulo.

Ex.: eixo *Ox* de simetria: $\rightarrow \begin{cases} J_{xz} = 0 \\ J_{xy} = 0 \end{cases}$

Além disso, pode-se demonstrar que existe um sistema triortogonal de eixos para os quais todos os produtos de inércia são nulos. Esses eixos são os chamados eixos principais de inércia do sistema de pontos, e têm origem no centro de massa desse sistema. Note-se que os eixos de simetria são sempre eixos principais.

- Propriedade de composição

Já que os momentos e produtos de inércia são definidos como somatórias, podemos dizer que esses valores para o conjunto são iguais às somas dos respectivos valores das partes:

$$J_u = \sum_i J_{ui}$$
$$J_{uv} = \sum_i J_{uvi}$$

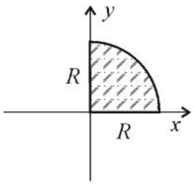
Analogamente, se desejarmos conhecer uma parte:

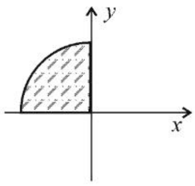
$$J_{uj} = J_u - \sum_{i \neq j} J_{ui}$$
$$J_{uvj} = J_{uv} - \sum_{i \neq j} J_{uvi}$$

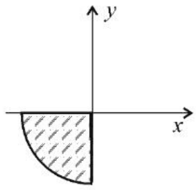
Uso de tabelas – figuras planas *(Giacaglia, pg.465)*

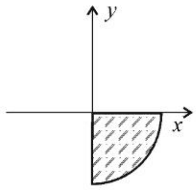
$\beta =$ massa por unidade de área

quarto de disco: $M = \beta \frac{\pi R^2}{4}$



..


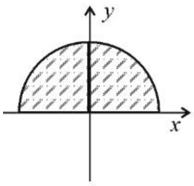
..


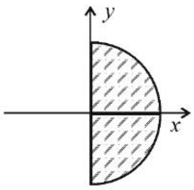
..


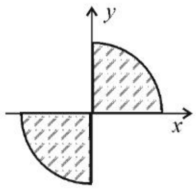
$J_x = \frac{MR^2}{4} = \frac{\beta\pi R^4}{16}$

$J_y =?$

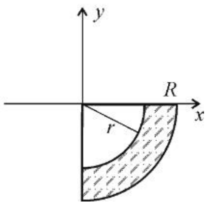
$J_{xy} = \frac{MR^2}{2\pi}$



..


..


.

.


$J_x = \frac{\beta\pi}{4}\left(\frac{R^4}{4} - \frac{r^4}{4}\right)$