

Modelo de Lucas / Equity Premium Puzzle

Mauro Rodrigues (USP)

2020

Introdução

- Entender preços de ações
- Equity premium: retorno de ações tende a ser mais alto do que de títulos públicos
- Agentes são avessos ao risco
 - ▶ Retorno de ações é mais volátil e positivamente correlacionado com o estado da economia
 - ▶ Títulos públicos = ativo livre de risco
- Quantitativamente, qual o grau de aversão ao risco necessário para gerar a diferença de retorno entre ações e títulos públicos?

Modelo de Lucas

- Economia de dotação
- Tempo discreto: $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$
- Contínuo de agentes idênticos, distribuídos no intervalo $[0, 1]$
- Cada agente possui uma árvore
- No início de cada período t , cada árvore produz dividendos (“frutos”) y_t (não estocável)

$$y_t \in \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\} \equiv Y$$

- y_t segue processo de Markov, com distribuição $f(y_{t+1}|y_t)$
 - ▶ Elementos de uma matriz de transição P
- y_0 dado

Ativos

Dois tipos de ativos:

- Ativo sem risco: b
 - ▶ Paga 1 unidade de consumo no período seguinte, independente do estado da natureza
 - ▶ b_{t+1} : ativos adquiridos em t , e que vencerão em $t + 1$
 - ▶ q_t : preço do ativo adquirido em t
- ações (“shares”) da árvore: s
 - ▶ Prometem pagar uma sequência de dividendos, que dependem da realização da dotação agregada
 - ▶ Agente com s_t ações recebe $s_t y_t$ na forma de dividendos no período t
 - ▶ p_t : preço da ação em t

Agente representativo

- Preferências:

$$U = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]$$

- Restrição orçamentária em t :

$$c_t + p_t(s_{t+1} - s_t) + q_t b_{t+1} \leq b_t + s_t y_t$$

- $s_0 = 1$, $b_0 = 0$, y_0 são dados
 - ▶ Variáveis de estado

Agente representativo

- Lado direito da restrição orçamentária: fontes de recursos do agente em t
 - ▶ b_t = Títulos adquiridos em $t - 1$, e que vencem em t
 - ▶ $s_t y_t$ = Dividendos das ações recebidos em t
- Lado esquerdo da restrição orçamentária: usos desses recursos em t
 - ▶ c_t = consumo
 - ▶ $p_t(s_{t+1} - s_t)$ = aquisição de novas ações em t (com sinal negativo se ações são vendidas)
 - ▶ $q_t b_{t+1}$ = aquisição de títulos que vencerão em $t + 1$
- Em equilíbrio, como os agentes são idênticos:

$$s_t = 1$$

$$b_t = 0$$

$$c_t = y_t$$

Equação de Bellman

- Variáveis de estado:
 - ▶ Estado individual: s, b
 - ▶ Estado agregado: y
- Funções preço: $p(y), q(y)$
- Problema do agente representativo:

$$V(s, b, y) = \max_{c, s', b'} u(c) + \beta \mathbb{E}[V(s', b', y')|y]$$
$$\text{s.a:} \quad c + p(y) \cdot (s' - s) + q(y) \cdot b' \leq b + sy$$

- ▶ y' segue um processo de Markov com distribuição $f(y'|y)$

Equação de Bellman

$$V(s, b, y) = \max_{s', b'} \left\{ u(b + sy - p(y) \cdot (s' - s) - q(y) \cdot b') + \beta \sum_{y' \in Y} [V(s', b', y') \cdot f(y'|y)] \right\}$$

CPO's:

$$[s']: \quad u_c p(y) = \beta \sum_{y' \in Y} [V_1(s', b', y') \cdot f(y'|y)]$$

$$[b']: \quad u_c q(y) = \beta \sum_{y' \in Y} [V_2(s', b', y') \cdot f(y'|y)]$$

Equação de Bellman

Envelope:

$$V_1(s, b, y) = u_c \cdot [p(y) + y]$$

$$V_2(s, b, y) = u_c$$

Adiantando um período:

$$V_1(s', b', y') = u_{c'} \cdot [p(y') + y']$$

$$V_2(s', b', y') = u_{c'}$$

Agente Representativo

Temos, então:

$$u_c p(y) = \beta \sum_{y' \in Y} [u_{c'} \cdot (p(y') + y') \cdot f(y'|y)]$$

$$p(y) = \beta \frac{\mathbb{E}[u_{c'} \cdot (p(y') + y') | y]}{u_c}$$

$$p_t = \mathbb{E}_t \left[\frac{\beta u_{c,t+1}}{u_{c,t}} \cdot (p_{t+1} + y_{t+1}) \right]$$

e:

$$u_c q(y) q_t = \beta \sum_{y' \in Y} [u_{c'} \cdot f(y'|y)]$$

$$q(y) = \beta \frac{\mathbb{E}[u_{c'} | y]}{u_c}$$

$$q_t = \mathbb{E}_t \left[\frac{\beta u_{c,t+1}}{u_{c,t}} \right]$$

Equilíbrio Competitivo Recursivo

- 1 Uma função valor $V(s, b, y)$
- 2 Regras de decisão para agente representativo: $c(s, b, y)$, $s'(s, b, y)$, $b'(s, b, y)$
- 3 Funções preços: $q(y)$, $p(y)$

Tais que:

- Dado (3), (2) resolve o problema do agente representativo
- Mercados em equilíbrio:

$$b'(s, b, y) = 0$$

$$s'(s, b, y) = 1$$

$$b = 0$$

$$s = 1$$

$$c = y$$

Preço da Ação

$$p_t = \frac{\beta \mathbb{E}_t [u_{c,t+1} \cdot (p_{t+1} + y_{t+1})]}{u_{c,t}} \Rightarrow$$
$$u_{c,t} p_t = \beta \mathbb{E}_t [u_{c,t+1} \cdot p_{t+1}] + \beta \mathbb{E}_t [u_{c,t+1} \cdot y_{t+1}] \quad (1)$$

- Adiantando um período:

$$u_{c,t+1} p_{t+1} = \beta \mathbb{E}_{t+1} [u_{c,t+2} \cdot p_{t+2}] + \beta \mathbb{E}_{t+1} [u_{c,t+2} \cdot y_{t+2}]$$

- Aplicando $\mathbb{E}_t(\cdot)$ dos dois lados:

$$\mathbb{E}_t [u_{c,t+1} \cdot p_{t+1}] = \beta \mathbb{E}_t \{ \mathbb{E}_{t+1} [u_{c,t+2} \cdot p_{t+2}] \} + \beta \mathbb{E}_t \{ \mathbb{E}_{t+1} [u_{c,t+2} \cdot y_{t+2}] \}$$

Preço da Ação

- Da lei das expectativas iteradas:

$$\mathbb{E}_t \{ \mathbb{E}_{t+1} [X_{t+2}] \} = \mathbb{E}_t [X_{t+2}]$$

- Logo:

$$\mathbb{E}_t [u_{c,t+1} \cdot p_{t+1}] = \beta \mathbb{E}_t [u_{c,t+2} \cdot p_{t+2}] + \beta \mathbb{E}_t [u_{c,t+2} \cdot y_{t+2}]$$

- Substituindo na eq. (1):

$$\begin{aligned} u_{c,t} p_t &= \beta \{ \mathbb{E}_t [u_{c,t+2} \cdot p_{t+2}] + \beta \mathbb{E}_t [u_{c,t+2} \cdot y_{t+2}] \} + \beta \mathbb{E}_t [u_{c,t+1} \cdot y_{t+1}] \\ &= \beta^2 \mathbb{E}_t [u_{c,t+2} \cdot p_{t+2}] + \beta^2 \mathbb{E}_t [u_{c,t+2} \cdot y_{t+2}] + \beta \mathbb{E}_t [u_{c,t+1} \cdot y_{t+1}] \end{aligned}$$

- Repetindo o procedimento infinitas vezes:

$$p_t u_{c,t} = \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \mathbb{E}_t [u_{c,t+j} \cdot y_{t+j}] + \lim_{j \rightarrow \infty} \beta^j \mathbb{E}_t [u_{c,t+j} \cdot p_{t+j}]$$

Preço da Ação

- Em equilíbrio:

$$\underbrace{p_t u'(y_t)}_{(A)} = \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j \mathbb{E}_t [u'(y_{t+j}) \cdot y_{t+j}]}_{(B)} + \underbrace{\lim_{j \rightarrow \infty} \beta^j \mathbb{E}_t [u'(y_{t+j}) \cdot p_{t+j}]}_{(C)}$$

- Em equilíbrio, agentes devem segurar sua dotação inicial (i.e., $s_t = 1$), para sempre
 - Isso implica que (C) deve ser igual a zero
- Na expressão acima:
 - (A) = ganho marginal de vender ações, em $s_t = 1$
 - (B) = utilidade marginal de segurar 1 ação para sempre

Preço da Ação

- Se (C) positivo, i.e., $(A) > (B)$, então agentes gostariam de vender ações
- Se (C) negativo, i.e., $(A) < (B)$, então agentes gostariam de comprar ações
 - ▶ Essas duas situações são inconsistentes com equilíbrio de mercado
- Logo:

$$p_t = \mathbb{E}_t \left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta^j u'(y_{t+j})}{u'(y_t)} \cdot y_{t+j} \right]$$

- Ou seja, preço da ação é o valor presente esperado dos dividendos futuros

Equity Premium Puzzle

- Mehra & Prescott (1985). “The equity premium: A puzzle.” *Journal of Monetary Economics*.
- Entender quantitativamente diferenças de retorno entre ações e títulos públicos
 - ▶ Mercados completos
 - ▶ Utilidade CRRA
- Referência da aula: Romer, 3rd edition, cap.7.

Preços de ativos

- Considere um ativo qualquer e

$$p_t^e = \mathbb{E}_t \left[\frac{\beta u'(c_{t+1}) d_{t+1}^e}{u'(c_t)} \right] \quad (2)$$

- No caso de ações:

$$d_{t+1}^e = p_{t+1} + y_{t+1}$$

- Retorno do ativo e:

$$r_{t+1}^e = \frac{d_{t+1}^e}{p_t^e} - 1$$

- Substituindo na eq. (2):

$$1 = \mathbb{E}_t \left[\frac{\beta u'(c_{t+1})(1 + r_{t+1}^e)}{u'(c_t)} \right] \quad (3)$$

Preço de ativos

- g_t : taxa de crescimento do consumo

$$g_{t+1} = \frac{c_{t+1}}{c_t} - 1$$

- Utilidade do indivíduo: CRRA

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \Rightarrow u'(c) = c^{-\gamma}$$

- Substituindo na eq. (3):

$$\begin{aligned} 1/\beta &= \mathbb{E}_t \left[\left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} (1 + r_{t+1}^e) \right] \Leftrightarrow \\ 1/\beta &= \mathbb{E}_t [(1 + g_{t+1})^{-\gamma} (1 + r_{t+1}^e)] \end{aligned}$$

- Supondo g e r iid ao longo do tempo (expectativa condicional = expectativa não condicional)

$$1/\beta = \mathbb{E} [(1 + g_{t+1})^{-\gamma} (1 + r_{t+1}^e)]$$

Expansão de Taylor

$$F(r, g) = (1 + g)^{-\gamma}(1 + r)$$

- Expansão de Taylor de 2ª ordem em torno de $r = g = 0$:

$$F(r, g) \approx F(0, 0) + \left. \frac{\partial F}{\partial r} \right|_{(0,0)} \cdot (r - 0) + \left. \frac{\partial F}{\partial g} \right|_{(0,0)} \cdot (g - 0) + \\ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right|_{(0,0)} \cdot (r - 0)^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial g^2} \right|_{(0,0)} \cdot (g - 0)^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial g} \right|_{(0,0)} \cdot (r - 0)(g - 0)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial r} \right|_{(0,0)} = (1 + g)^{-\gamma} \Rightarrow$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right|_{(0,0)} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial g} \right|_{(0,0)} = -\gamma(1 + g)^{-\gamma-1}$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial g} \right|_{(0,0)} = -\gamma(1 + r)(1 + g)^{-\gamma-1}$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial g^2} \right|_{(0,0)} = \gamma(\gamma + 1)(1 + r)(1 + g)^{-\gamma-2}$$

Expansão de Taylor

- Substituindo:

$$F(r, g) \approx 1 + r - \gamma g + \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)g^2 - \gamma rg$$

- Logo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(1+g)^{-\gamma}(1+r)] &\approx 1 + \mathbb{E}(r) - \gamma\mathbb{E}(g) + \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)\mathbb{E}(g^2) - \gamma\mathbb{E}(rg) \\ &= 1 + \mathbb{E}(r) - \gamma\mathbb{E}(g) + \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1) \left[\text{var}(g) + \{\mathbb{E}(g)\}^2 \right] \\ &\quad - \gamma[\text{cov}(r, g) + \mathbb{E}(r)\mathbb{E}(g)]\end{aligned}$$

- Como $\mathbb{E}[(1+g)^{-\gamma}(1+r^e)] = 1/\beta$, temos:

$$\begin{aligned}1/\beta &\approx 1 + \mathbb{E}(r^e) - \gamma\mathbb{E}(g) + \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1) \left[\text{var}(g) + \{\mathbb{E}(g)\}^2 \right] \\ &\quad - \gamma[\text{cov}(r^e, g) + \mathbb{E}(r)\mathbb{E}(g)]\end{aligned}$$

Expansão de Taylor

- Com períodos de tempo curtos, $\mathbb{E}(r)\mathbb{E}(g)$ e $\{\mathbb{E}(g)\}^2$ são pequenos em relação aos demais. Logo:

$$\mathbb{E}(r^e) \approx 1/\beta - 1 + \gamma\mathbb{E}(g) - \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)\text{var}(g) + \gamma.\text{cov}(r^e, g)$$

- Para um outro ativo f qualquer:

$$\mathbb{E}(r^f) \approx 1/\beta - 1 + \gamma\mathbb{E}(g) - \frac{1}{2}\gamma(\gamma+1)\text{var}(g) + \gamma.\text{cov}(r^f, g)$$

- Diferença de retornos:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(r^e) - \mathbb{E}(r^f) &\approx \gamma [\text{cov}(r^e, g) - \text{cov}(r^f, g)] \\ &= \gamma.\text{cov}(r^e - r^f, g)\end{aligned}$$

Mehra & Prescott (1985)

- U.S. 1890 -1979
- Ações: S&P 500, incluindo dividendos
- Ativo livre de risco: títulos de curto prazo do tesouro americano
- g : taxa de crescimento do consumo per capita (não duráveis + serviços)
- e : ações
- f : ativo livre de risco

Equity Premium Puzzle

- Equity Premium: $\mathbb{E}(r^e) - r^f \approx 6\%$
- Excesso de retorno:

$$\sigma_{r^e - r^f} = 16.7\%$$

$$\text{corr}(r^e - r^f, g) = 0.40$$

$$\sigma_g = 3.6\%$$

$$\begin{aligned}\text{cov}(r^e - r^f, g) &= \text{corr}(r^e - r^f, g) \cdot \sigma_{r^e - r^f} \cdot \sigma_g \\ &= 0.40 \cdot 0.167 \cdot 0.036 \\ &= 0.0024\end{aligned}$$

- Temos, então:

$$6\% = \gamma \cdot 0.0024 \Rightarrow$$

$\gamma \approx 25$

Equity Premium Puzzle

- Esse valor implica uma taxa de aversão ao risco muito alta
- Exemplo: loteria que paga $\bar{c}$ com prob. $1/2$, e $0.8\bar{c}$ com prob. $1/2$.
 - ▶ Se $\gamma = 25$, quanto um indivíduo estaria disposto a abrir mão para evitar esse risco?
- Considerar loteria que paga $\lambda\bar{c}$, com certeza
 - ▶ Indivíduo indiferente entre as duas loterias
- λ é tal que:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{c}^{-24} - 1}{-24} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{(0.8\bar{c})^{-24} - 1}{-24} \right) = \frac{(\lambda\bar{c})^{-24} - 1}{-24}$$

$$\lambda = 0.82$$

Equity Premium Puzzle

- O valor $\gamma = 25$ consegue gerar uma diferença de retorno com magnitude como nos dados
- No entanto, produz taxas de retorno com magnitudes elevadas
 - ▶ Indivíduos muito intolerantes a variar consumo no tempo, demandam taxas elevadas
- Risk-free puzzle: taxa de juros livre de risco muito elevada, quando comparada aos dados

$$\mathbb{E}(r^f) \approx 1/\beta - 1 + \gamma \mathbb{E}(g) - \frac{1}{2} \gamma(\gamma + 1) \text{var}(g) + \gamma \cdot \text{cov}(r^f, g)$$