

1. Vamos escrever a matriz ampliada do sistema e utilizar o método de Jordan-Gauss para encontrar sua forma escalonada reduzida.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array} \right] \sim \begin{array}{l} L_2 + L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array} \right] \\
 & \sim \begin{array}{l} L_1 + L_2 \\ L_3 - 10L_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{array} \right] \sim \begin{array}{l} -1L_2 \\ -\frac{1}{52}L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\
 & \sim \begin{array}{l} L_1 - 7L_3 \\ L_2 + 5L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Logo nosso sistema inicial é equivalente ao sistema

$$\begin{array}{rcl}
 x & = & 3 \\
 y & = & 1 \\
 z & = & 2
 \end{array}$$

cuja solução é $(3, 1, 2)$.

2.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x = 2 \\ (a^2 - 4)z = a - 2. \end{cases}$$

Note que $a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4$

$$\Leftrightarrow a = \pm 2.$$

• Se $a \neq 2$ e $a \neq -2$, podemos isolar z na última equação obtendo $z = \frac{a-2}{a^2-4} = \frac{1}{a+2}$.

Como temos que $x = 2$, segue da primeira equação que

$$2 + y + \frac{1}{a+2} = 4$$

$$\Rightarrow y = 2 - \frac{1}{a+2} = \frac{2a+3}{a+2}$$

Ou seja, o sistema é possível e determina
do com solução $\left(2, \frac{1}{a+2}, \frac{2a+3}{a+2} \right)$

• Se $a = 2$

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Logo, podemos escrever z como função de y , pois

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ \Rightarrow 2 + y + z &= 4 \\ \Rightarrow z &= 2 - y \end{aligned}$$

É a solução do sistema é

$$(2, y, 2 - y) \text{ em que } y \in \mathbb{R}.$$

Portanto o sistema é possível e indeterminado.

• Se $a = -2$

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x = 2 \\ 0 = -4 \end{cases}$$

Pela última equação, segue que o sistema é impossível.

3.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\frac{1}{2}L_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \begin{array}{l} L_2 - 3L_1 \\ L_3 - 4L_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$-2L_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \begin{array}{l} L_1 - \frac{3}{2}L_2 \\ L_3 + 2L_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -4 & 1 \end{array} \right]$$

$$-L_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & -1 \end{array} \right] \sim \begin{array}{l} L_1 - 2L_3 \\ L_2 + L_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & -1 \end{array} \right]$$

Matrix inversa

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

4.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = (-1)^3 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^4 5 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^6 3 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot (-12 - 8 + 4 + 2 - 24 + 8) +$$

$$5 \cdot (-12 + 4 + 4 + 2 - 24 - 4) +$$

$$3 \cdot (24 - 2 + 6 - 4 - 6 + 12)$$

$$= -2(-30) + 5(-30) + 3(30)$$

$$= 60 - 150 + 90 = 0.$$

5.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Como $\det A = 2 \neq 0$, pela Regra de Cramer temos:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{12}{2} = 6$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-6}{2} = -3.$$