MAT0315 - Introdução à Análise - 2020

Gabarito dos exercícios 10, 12-b e 12-d da Lista 3

Exercício 10 Considere a sequência definida por $a_1 = \sqrt{2}$ e, para $n > 1$, $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$.

(a) Escreva os 5 primeiros termos da sequência.

Solução. Temos:

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \ \approx 1{,}41 \\ a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \ \approx 1{,}85 \\ a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \ \approx 1{,}96 \\ a_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \ \approx 1{,}99 \\ a_5 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \ \approx 1{,}998 \end{cases}$$

□

(b) Prove que a sequência é crescente e limitada.

Solução. Primeiro provaremos, por indução em n, que $(a_n)_n$ é limitada superiormente por 2 e inferiormente por 0, isto é, vamos provar que $0 \leq a_n \leq 2$ para todo n.

- **Caso base (n=1)**:

  De fato, sabemos que $a_1 = \sqrt{2}$ e, portanto, $0 < a_1 < 2$.

- **Passo indutivo**:

  Seja $k > 1$ e suponha que $0 < a_{k-1} < 2$ (Hipótese de Indução - HI).

  Temos:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & a_{k-1} & < & 2 & & \Rightarrow \\ 2+0 & < & 2+a_{k-1} & < & 4 & & \Rightarrow \\ \sqrt{2} & < & \sqrt{2+a_{k-1}} & < & 2 & (*) & \Rightarrow \\ 0 & < & a_k & < & 2 & & \end{array}$$

  (*) aqui as desigualdades são preservadas porque a função “raiz quadrada” é crescente. Isso prova que $0 < a_{k-1} < 2 \Rightarrow 0 < a_k < 2$, para cada $k > 1$.

Assim, pelo Princípio de Indução, podemos concluir que $0 \leq a_n \leq 2$ para todo n.

Para provar que a sequência é crescente, isto é, $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n, vamos novamente usar indução.

- **Caso base (n=1)**:
  De fato, $a_1 = \sqrt{2} = \sqrt{2+0} \leq \sqrt{2+\sqrt{2}} = a_2$, já que $\sqrt{2} > 0$ e a função raiz quadrada é crescente.
- **Passo indutivo**:
  Seja $k > 1$ e suponha que $a_{k-1} < a_k$ (Hipótese de Indução - HI).
  Temos:
  $$\begin{array}{ccccc} a_{k-1} & < & a_k & & \Rightarrow \\ 2+a_{k-1} & < & 2+a_k & & \Rightarrow \\ \sqrt{2+a_{k-1}} & < & \sqrt{2+a_k} & (*) & \Rightarrow \\ a_k & < & a_{k+1} & & \end{array}$$
  (*) Novamente estamos usando o fato da função "raiz quadrada" ser crescente.
  Isso prova o passo de indução.

Assim, pelo Princípio de Indução, podemos concluir que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n.

□

(c) Qual teorema garante que a sequência é convergente?

Solução. A sequência $(a_n)_n$ é limitada e crescente, logo, monótona. Pelo Teorema 5 dado em aula, toda sequência monótona limitada é convergente. Logo, $(a_n)_n$ é convergente, isto é, existe um número real L tal que $\lim a_n = L$.

□

(d) Determine o limite de $(a_n)_n$, justificando.

Solução. Sabemos que $(a_n)_n$ converge, mas não sabemos qual o valor do limite. Seja $L = \lim a_n$. De $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$ para todo $n > 1$, fazendo n crescer iremos obter

$$\lim a_n = \lim \sqrt{2+a_{n-1}} \iff L = \sqrt{2+\lim a_{n-1}}$$

Mas é fácil provar que $\lim a_{n-1} = L$. Portanto:

$$L = \sqrt{2+L} \iff L^2 = 2+L \Rightarrow (L+1)(L-2) = 0 \Rightarrow L = -1 \text{ ou } L = 2$$

Como $a_n \geq 0$ para todo n, então $L = \lim a_n \geq 0$ (a justificativa desse fato é análoga ao Exercício 13). Daí, L não pode ser -1. Então, temos que $\lim a_n = L = 2$.

□

Exercício 12 Calcule os limites:

(b) $\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+3}$

Solução. Temos que: $\lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+3} = \lim \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3}$ (*).

Sabemos que:

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e, \text{ e que } \lim \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \lim \frac{1}{n} = 1$$

Também, sabemos que $f(x) = x^3$ é contínua, então

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3} = \left(\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{3} = 1^3 = 1$$

Como os dois fatores em (*) convergem, temos (pelo Teorema 1 dado em aula) que:

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3} = \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3} = e \cdot 1 = e$$

□

(d) $\lim \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n}$

Solução. Temos que:

$$\lim \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n} = \lim \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim \left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right]$$

Vemos que $(a_n)_n$ com $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ é uma subsequência da sequência que define o número e. Logo:

$$\lim \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$$

Por outro lado, temos que:

$$\lim \left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \lim 1 + \lim \frac{1}{n+1} = 1$$

Como $f(x) = x^{-1}$ é contínua, então:

$$\lim \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = \left[\lim \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right]^{-1} = 1^{-1} = 1$$

Daí, temos que:

$$\lim \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n} = \lim \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \lim \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e \cdot 1 = e$$

□