Exercícios de Cálculo.

Funções vetoriais a valor real

1. Seja $f(x,y) = 3x + 2y$. Calcule

   a) $f(1,-1)$

   b) $\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$

   c) $f(a,x)$

   d) $\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$

2. Seja $f(x,y) = \frac{x-y}{x+2y}$.

   a) Determine o domínio.

   b) Calcule $f(2u+v, u-v)$.

3. Represente gráficamente o domínio da função $z = f(x,y)$ dada por

   a) $x + y - 1 + z^2 = 0$, $z \geq 0$

   b) $f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

   c) $z = \sqrt{y-x^2} + \sqrt{2x-y}$

   d) $z = \ln(2x^2 + y^2 - 1)$

   e) $z^2 + 4 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$

   f) $z = \sqrt{|x| - |y|}$

   g) $4x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$

   h) $z = \frac{x-y}{\sin x - \sin y}$

4. Desenhe as curvas de nível e determine a imagen:

   a) $f(x,y) = x - 2y$

   b) $z = \frac{y}{x-2}$

   c) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

   d) $z = \frac{x}{y-1}$

   e) $z = xy$

   f) $f(x,y) = x^2 - y^2$

   g) $z = 4x^2 + y^2$

   h) $z = 3x^2 - 4xy + y^2$

   i) $z = \frac{x^2}{x^2+y^2}$

   j) $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$

5. Calcule, caso exista.

   a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin \frac{1}{x^2+y2}$
   b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{\sqrt{x^4+y^4}}$
   f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$
   g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{y-x^3}}$
   h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-y^2}$

6. Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y2}$.

7. Seja $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$

   a) Considere a reta $\gamma(t) = (at, bt)$, com $a^2 + b^2 > 0$; mostre que, quaisquer que sejam a e b,
   $$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 0.$$
   Tente visualizar este resultado a través das curvas de nívvel de f.
   b) Calcule $\lim_{t\to 0} f(\delta(t))$, em que $\delta(t) = (t^2, t)$. (Antes de calcular o limite, tente prever o resultado olhando para as curvas de nível de f.)
   c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$ existe? Porquê?

8. Determine o conjunto dos pontos de continuidade. Justifique a resposta.

   (a) $f(x,y) = 3x^2y^2 - 5xy + 6$
   (b) $f(x,y) = \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2}$
   (c) $f(x,y) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}$
   (d) $f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
   (e) $f(x.y) = \begin{cases} \frac{x-3y}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (f) $f(x.y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (g) $f(x.y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{r^2-1}\right)} & \text{se} \quad r < 1 \text{ em que } r = \|(x,y)\| \\ 0 & \text{se} \quad r \geq 1 \end{cases}$

9. $f(x.y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique.