Lista 10 - Exercício 6

Determine os planos que sejam tangentes ao gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ e que contenham a interseção dos planos $x + y + z = 3$ e $z = 0$.

Considere $(x_0, y_0, f(x_0, y_0) = (x_0, y_0, x_0^2 + y_0^2)$ o ponto de tangência correspondente aos planos procurados.

Então temos :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \ \rightarrow \ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 2x_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \ \rightarrow \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 2y_0$$

e portanto, o plano procurado deve ter equação

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - z + x_0^2 + y_0^2 = 0 \qquad \text{(plano } \pi\text{)}$$

Seja r a reta interseção dos planos $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ z = 0 \end{cases}$

Então $z = 0$ e $x + y = 3$, e obtemos as seguintes equações paramétricas para a reta r:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 0 \end{cases}$$

Concluimos que v = (1, -1, 0) é um vetor diretor da reta r e (0, 3 0) é um ponto de r.

Como a reta r está contida no plano π, vale que

$$\begin{cases} (2x_0, 2y_0, -1).(1, -1, 0) = 0 \text{ (o vetor normal ao plano é perpendicular ao vetor diretor da reta)} \\ 2x_0(0 - x_0) + 2y_0(3 - y_0) - 0 + x_0^2 + y_0^2 = 0 \text{ (o ponto (0, 3, 0) está no plano)} \end{cases}$$

Daí resulta que

$$2x_0 - 2y_0 = 0 \ \rightarrow \ x_0 = y_0 \qquad (*)$$

Substituindo (*) na equação do plano, obtemos

$6y_0 - 2y_0^2 = 0 \ \rightarrow \ y_0 = 0$ ou $y_0 = 3$

Portanto, $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ou $(x_0, y_0) = (3, 3)$.

Substituindo tais pontos na equação do plano π, obtemos:

para o ponto (0,0): $z = 0$

para o ponto (3,3): $6(x - 3) + 6(y - 3) - z + 18 = 0$.