FORMA ESCALONADA DE UMA MATRIZ

IMPORTANTE

(1) As formas escalonadas por linhas de uma matriz A não são únicas, ou seja, diferentes sequências de operações elementares com linhas podem chegar a formas escalonadas diferentes.

(2) Embora as formas escalonadas não sejam únicas, TODAS elas têm o mesmo número de linhas não nulas e os pivôs sempre ocorrem na mesma posição das formas escalonadas por linhas.
Essas posições são denominadas POSIÇÕES DE PIVÔ da matriz A.
Uma coluna de A que contém um pivô é chamada de COLUNA DE PIVÔ de A.

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3 \leftrightarrow L3-3L1]{L2 \leftrightarrow L2-L1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L3 \leftrightarrow L3+L2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 \leftrightarrow L1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L3 \leftrightarrow L3-3L1]{L2 \leftrightarrow L2-L1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[L3 \leftrightarrow L3-4L2]{(-1)L2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{L3}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se estivermos resolvendo um sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \text{---} \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Escalonando a matriz do sistema

$A = (a_{ij})$ obtemos uma matriz $B = (b_{ij})$ com

$r \leq m$ linhas não nulas.

Sejam $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r \leq n$ as colunas com pivô na matriz B.

Então $b_{ik_i} = 1$ e $b_{ij} = 0 \;\; \forall j < k_i$ para $i = 1, \dots, r$.

$b_{ij} = 0 \;\; \forall i > r$ e $\forall j$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} & & k_1 & k_2 & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ r \\ \\ \\ \end{array}
\begin{bmatrix}
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & b_{1k_r} & \dots & b_{1n} \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & b_{2k_r} & \dots & b_{2n} \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & b_{r\,k_r+1} & b_{rn} \\
0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

O sistema equivalente é

$$x_{k_1} \;\; \dots \;\; + \sum (\quad) = 0$$

$$x_{k_2} \;\; \dots \;\; + \sum (\quad) = 0$$

$$\dots \qquad x_{k_r} + \sum (\quad) = 0$$

Note que as variáveis livres do sistema equivalente

são as correspondentes a colunas sem pivô. Temos então $n - r$ variáveis livres

e $x_{k_1}, \dots, x_{k_r}$ são variáveis dependentes

Sempre mais fácil entender a partir de um exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix} = A$$

matriz do sistema homogêneo.

Sua forma escalonada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema equivalente é

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_6 + x_7 &= 0 \\ x_6 + \tfrac{1}{3}x_7 &= 0 \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} x_6 &= -\tfrac{1}{3}x_7 \\ x_3 &= -2x_4 - 3x_6 - x_7 = -2x_4 + x_7 - x_7 \\ x_1 &= -3x_2 + 2x_3 - 2x_5 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5 \end{aligned}$$

Variáveis livres: x_2, x_4, x_5, x_7

$x_2 = t_1$, $x_4 = t_2$, $x_5 = t_3$

$x_7 = t_4$

As soluções do sistema são

$$\Big(\underbrace{-3t_1-4t_2-2t_3}_{x_1},\ \underbrace{t_1}_{x_2},\ \underbrace{-2t_2}_{x_3},\ \underbrace{t_2}_{x_4},\ \underbrace{t_3}_{x_5},\ \underbrace{-\tfrac{1}{3}t_4}_{x_6},\ \underbrace{t_4}_{x_7}\Big)$$

$$= t_1\underbrace{(-3,1,0,0,0,0,0)}_{v_1} + t_2\underbrace{(-4,0,-2,1,0,0,0)}_{v_2}$$

$$+\, t_3\underbrace{(-2,0,0,0,1,0,0)}_{v_3} + t_4\underbrace{(0,0,0,0,0,-\tfrac{1}{3},1)}_{v_4}$$

$W = \left[(-3,1,0,0,0,0,0),\ (-4,0,-2,1,0,0,0),\ (-2,0,0,0,1,0,0),\ (0,0,0,0,0,-\tfrac{1}{3},1)\right]$

↳ subespaço de $\mathbb{R}^7$ das soluções do sistema

dim W = nº de incógnitas − nº de pivôs = nº de variáveis livres

As soluções v_1, v_2, v_3, v_4 são vetores LI de $\mathbb{R}^7$.
Repare que se uma solução tem 1 em uma certa posição, então todas as outras têm 0. Assim é fácil ver que
se $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$

Observe que cada solução do sistema do exemplo tem 1 na posição da variável livre e todas as outras têm 0 nessa posição.

Isso vai acontecer em geral.

É por isso que se

$$W = \{\text{soluções de um sistema linear homogêneo}\},$$

$$\dim W = \text{número de incógnitas} - \text{nº de pivôs}.$$
$$= \text{número de variáveis livres}.$$

Entender agora porquê a forma escalonada de uma matriz diz qual é e quais são as colunas LI da matriz e também o número de linhas LI.

Entenda primeiro através do exemplo anterior

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Escalonada
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & & v_3 & & & v_6 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

É claro que as colunas com pivô são LI. E é claro que as que não têm pivô são CL dessas.

Se escalonássemos a matriz
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_3 & v_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & 15 \\ 2 & 0 & 18 \end{bmatrix} \end{array}$$
chegaríamos a
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
que tem 3 colunas e 3 pivôs

As linhas não nulas da matriz escalonada são LI, exatamente porque cada um delas tem um pivô em uma posição.

Veja o caso do nosso exemplo:

$$L_1 = (1, 3, -2, 0, 2, 0, 0)$$
$$L_2 = (0, 0, 1, 2, 0, 3, 1)$$
$$L_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 3).$$

Se fizermos $x_1 L_1 + x_2 L_2 + x_3 L_3 = 0$ então

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Agora, quando estamos escalonando uma matriz através de operações elementares nas linhas da matriz, estamos fazendo combinações lineares das linhas. Quando chegamos a uma linha nula é porque uma delas já é CL das outras.

Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$A = (a_{ij})$$

Sejam $C_1, \dots, C_n$ as colunas de A pensadas como vetores de $\mathbb{R}^m$, isto é

$$C_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

$$\text{col}(A) = [C_1, C_2, \dots, C_n] \subset \mathbb{R}^m$$

Sejam $L_1, \dots, L_m$ as linhas de A pensadas como vetores de $\mathbb{R}^n$

$$L_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{\text{lin}(A) = [L_1, L_2, \dots, L_m]}.$$

Vale que $\boxed{\dim \text{lin}(A) = \dim \text{col}(A)}.$

Para isso basta usar que na forma escalonada de A vale que $\dim \text{lin}(A) =$ nº de linhas não nulas $=$ nº de pivôs $= \dim \text{col}(A)$