

# **MAE 327**

# **Planejamento e Pesquisa II**

IME/USP – 2º Semestre/2020

# Planejamento de Experimentos – Modelos ANOVA

- **Estrutura de Tratamentos** (Fatores FIXOS sob Estudo):

- Um único Fator em J níveis
- Fatorial Cruzado, Fatorial  $2^K$  (sem réplicas, com K elevado)
- Fatorial Hierárquico

- **Estrutura das Unidades Experimentais:**

- Delineamento Completamente Aleatorizado (DCA)
- **Delineamento Aleatorizado em Blocos Completos (DABC)**

*Fatores de efeitos  
Fixos, Dados  
balanceados, matrix  
de planejamento X  
com colunas  
ortogonais!*

- Delineamentos Desbalanceados (SQSequencial)
- Modelos de Análise de Covariância (ANCOVA)
- Modelos mais Gerais: diferentes ajustes via Modelos de Regressão

*Fatores (Bloco e  
Trat) de efeitos  
Fixos*

- Delineamentos Aleatorizados em Blocos Completos Generalizados
- Del. Aleatorizados em Blocos Incompletos Balanceados:  
Quadrado Latino, QL com Réplicas, Q Grego-Latino, Q Hiper-Grego-Latino,  
Cross-Over, DABIB não restrito, Del Quadrado de Youden, DABIB restritos

# Delineamentos Fatoriais

**Fatorial Hierárquico (efeito de embutimento, *nested*):** Fator A e Fator B hierárquico em A

$$y_{ijk} = \mu + \tau_j + \beta_{k(j)} + e_{ijk}; \quad e_{ijk} \sim N(0; \sigma^2), \quad \sum_{j=1}^J \tau_j = \sum_{k=1}^K \beta_{k(j)} = 0$$

**Identidade útil para construção das SQ e das estimativas (caso balanceado):**

$$y_{ijk} = \bar{y} + (\bar{y}_{j.} - \bar{y}) + (\bar{y}_{.k} - \bar{y}) + (\bar{y}_{jk} - \bar{y}_{j.} - \bar{y}_{.k} + \bar{y}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{jk})$$

$$y_{ijk} = \bar{y} + \underbrace{(\bar{y}_{j.} - \bar{y})}_{\hat{\tau}_j} + \underbrace{(\bar{y}_{jk} - \bar{y}_{j.})}_{\hat{\beta}_{k(j)}} + \underbrace{(y_{ijk} - \bar{y}_{jk})}_{\hat{e}_{jk}}$$

O efeito hierárquico apesar de estar bem definido caracteriza um **confundimento** entre os efeitos principal do fator B e a interação com A, pois não é possível estimar separadamente estes efeitos neste tipo de planejamento.

# Delineamentos Fatoriais em 2 Níveis: $2^K$

$2^3 = 8$  Tratamentos

$2^4 = 16$  Tratamentos,  $K=3, 4, 5, \dots$

$$y_{ijklm} = \mu + \beta_{1j} + \beta_{2k} + \beta_{3l} + \beta_{4m} + \\ \beta_{12jk} + \beta_{13jl} + \beta_{14jm} + \beta_{23kl} + \beta_{24km} + \beta_{34lm} + \\ \beta_{123jkl} + \beta_{124jkm} + \beta_{234klm} + \\ \beta_{1234jklm} + e_{ijklm}$$

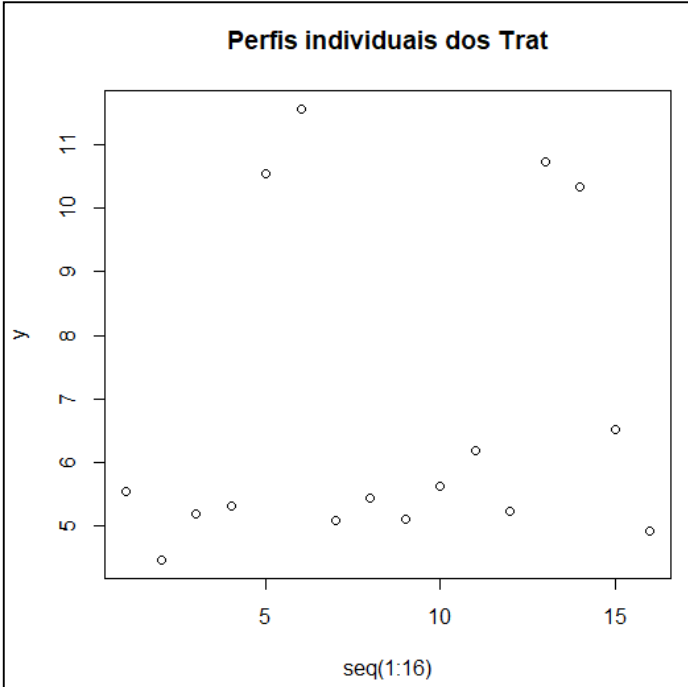
$$e_{ijklm} \sim N(0; \sigma^2) \quad \sum_j \beta_{1j} = \sum_k \beta_{2k} = \sum_l \beta_{3l} = \sum_m \beta_{4m} = \sum_j \beta_{12jk} = \dots = \sum_m \beta_{1234jklm} = 0$$

Uma estratégia para **reduzir o tamanho do delineamento** é não ter réplicas e definir o Resíduo com efeitos de interação de mais alta ordem, os quais são esperados contribuir pouco para a variabilidades da resposta ao Tratamento!



# Fatorial 2<sup>4</sup> (sem réplicas)

Perfis individuais dos Trat



**Como reduzir ainda mais esse experimento?**

**Tabela ANOVA**

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Xt	15	91.628	6.1086		
<b>Residuals</b>	<b>0</b>	<b>0.000</b>			

**Tabela ANOVA**

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
X	14	91.350	6.5250	23.45	0.1606
<b>Residuals</b>	<b>1</b>	<b>0.278</b>	<b>0.2783</b>		

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	6.74063	0.13188	51.114	0.0125
Xx1	-0.12438	0.13188	-0.943	0.5186
Xx2	-1.25062	0.13188	-9.483	0.0669
Xx3	1.40312	0.13188	10.640	0.0597
Xx4	0.09562	0.13188	0.725	0.6006
Xx12	-0.13063	0.13188	-0.991	0.5030
Xx13	0.04813	0.13188	0.365	0.7772
Xx14	-0.17937	0.13188	-1.360	0.4036
Xx23	-1.39562	0.13188	-10.583	0.0600
Xx24	0.13437	0.13188	1.019	0.4940
Xx34	-0.10937	0.13188	-0.829	0.5592
<b>Xx123</b>	<b>-0.10063</b>	<b>0.13188</b>	<b>-0.763</b>	<b>0.5851</b>
<b>Xx124</b>	<b>-0.20062</b>	<b>0.13188</b>	<b>-1.521</b>	<b>0.3702</b>
<b>Xx134</b>	<b>-0.24438</b>	<b>0.13188</b>	<b>-1.853</b>	<b>0.3150</b>
<b>Xx234</b>	<b>0.11187</b>	<b>0.13188</b>	<b>0.848</b>	<b>0.5521</b>

# Fatorial 2<sup>4</sup> (sem réplicas)

## Tabela de ANOVA - Modelo Reduzido

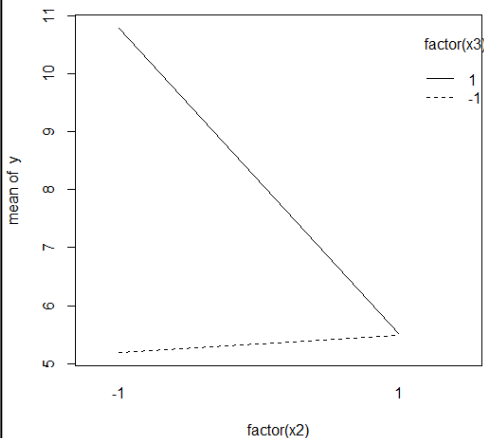
	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
X[, -c(11, 12, 13, 14)]	10	89.388	8.9388	19.953	0.002044
<b>Residuals</b>	<b>5</b>	<b>2.240</b>	<b>0.4480</b>		

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	6.74063	0.16733	40.283	1.78e-07
X[, -c(11, 12, 13, 14)]x1	-0.12438	0.16733	-0.743	0.490741
X[, -c(11, 12, 13, 14)]x2	-1.25062	0.16733	-7.474	0.000677
X[, -c(11, 12, 13, 14)]x3	1.40312	0.16733	8.385	0.000395
X[, -c(11, 12, 13, 14)]x4	0.09562	0.16733	0.571	0.592413
X[, -c(11, 12, 13, 14)]x12	-0.13063	0.16733	-0.781	0.470346
X[, -c(11, 12, 13, 14)]x13	0.04813	0.16733	0.288	0.785192
X[, -c(11, 12, 13, 14)]x14	-0.17937	0.16733	-1.072	0.332727
<b>X[, -c(11, 12, 13, 14)]x23</b>	<b>-1.39562</b>	<b>0.16733</b>	<b>-8.340</b>	<b>0.000405</b>
X[, -c(11, 12, 13, 14)]x24	0.13438	0.16733	0.803	0.458409
X[, -c(11, 12, 13, 14)]x34	-0.10937	0.16733	-0.654	0.542208



Gráfico de interação - x23



$$\left( \mu_{-11}^{23} - \mu_{-1-1}^{23} \right) > \left( \mu_{11}^{23} - \mu_{1-1}^{23} \right)$$

**Como reduzir ainda mais esse experimento?**

# Fatoriais em 2 Níveis

## Fatoriais $2^k$ (k: número de fatores)

k	Número de Tratamentos	64 graus de liberdade: intercepto (1), efeitos principais (6), efeitos de interação de primeira ordem (15), de segunda ordem (20), de terceira ordem (15), de quarta ordem (6), de quinta ordem (1)
2	4	
4	16	
6	64	$\Rightarrow 42/63=2/3$ dos g.l. para efeitos de alta ordem, em geral, que contribuem pouco para a variabilidade da resposta e que são de pouco interesse
8	256	
10	1024	

**Delineamentos Fatoriais Fracionais** podem ser usados para reduzir o tamanho de um experimento (reduzir o número de ensaios experimentais)  $\Rightarrow$  o racional dessa estratégia é **confundir** efeitos principais e interações de mais baixa ordem com interações de mais alta ordem.

Confundimento, em geral, NÃO é uma boa prática, mas em alguns casos pode atender à estrutura hierárquica de tratamentos ( $\hat{\beta}_{B(A)} = \hat{\beta}_B + \hat{\beta}_{A*B}$ ), ou ainda a restrições impostas no planejamento, como a redução do número de tratamentos bem como do número de unidades amostrais.



# Frações do Fatorial $2^K$

## Fatorial Fracional $2^{K-f}$

**Fatorial  $2^4$**  :  $n=16$

**Fatorial Fracional  $2^{4-1}$** :  $n=16 \rightarrow n=16/2=8$  unidades experimentais

**Fatorial Fracional  $2^{4-2}$** :  $n=16 \rightarrow n=16/4=4$  unidades experimentais

**Fatorial  $2^9$**  :  $n=412$  (sem replicas)

**Fatorial Fracional  $2^{9-2}$** :  $n=412 \rightarrow n=412/4=128$  unidades experimentais

**Fatorial Fracional  $2^{9-3}$** :  $n=412 \rightarrow n=412/8=64$  unidades experimentais

**Fatorial Fracional  $2^{9-4}$** :  $n=412 \rightarrow n=412/16=32$  unidades experimentais

**Fatorial Fracional  $2^{9-5}$** :  $n=412 \rightarrow n=412/32=16$  unidades experimentais

Fatoriais fracionais permitem planejar experimentos mais reduzidos (“mais econômicos”) relativamente ao número de tratamentos e ao número de unidades amostrais.



# Fatorial $2^4 \Rightarrow$ Fatorial Fracional $2^{4-1}$

Tratamentos omitidos: 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15

Trat	Y	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_{12}$	$X_{13}$	$X_{14}$	$X_{23}$	$X_{24}$	$X_{34}$	$X_{123}$	$X_{124}$	$X_{234}$	$X_{1234}$
1	5.55	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1
4	5.32	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
5	10.54	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
8	5.45	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1
9	5.12	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
12	5.24	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1
13	10.73	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
16	4.93	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

**Colunas da matriz X iguais:**

$$X_1 = X_2 \quad X_3 = X_{123} \quad X_4 = X_{124} \quad X_{13} = X_{23}$$

$$X_{14} = X_{24} \quad X_{234} = X_{134} \quad X_{1234} = X_{34} \quad X_{12} = X_0$$

$\Rightarrow$  **Efeitos estão confundidos:**  $X_1 = X_2 \Rightarrow \beta_1 X_1 = \beta_2 X_2 \Rightarrow (\beta_1 + \beta_2) X_1$

Efeitos principais (de T1 e T2) confundidos? Não é de interesse! O ideal é que efeitos de mais alta ordem estejam confundidos com efeitos de mais baixa ordem!

# Fatorial Fracional $2^{4-1}$

Tratamentos 2,3,5,8,9,12,14,15 omitidos

Trat	Y	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_{12}$	$X_{13}$	$X_{14}$	$X_{23}$	$X_{24}$	$X_{34}$	$X_{123}$	$X_{124}$	$X_{234}$	$X_{1234}$
1	5.55	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1
4	5.32	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
6	11.56	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1
7	5.08	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1
10	5.63	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1
11	6.18	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
13	10.73	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
16	4.93	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

F.V.	G.l.
$X_0 = X_{1234}$	1
$X_1 = X_{234}$	1
$X_2 = X_{134}$	1
$X_3 = X_{124}$	1
$X_4 = X_{123}$	1
$X_{12} = X_{34}$	1
$X_{13} = X_{24}$	1
$X_{14} = X_{23}$	1
<b>Total</b>	<b>8</b>

Esta fração do factorial 24 atende ao confundimento de efeitos de baixa ordem (ex. Ef. Principais) com os de alta ordem (interações de segunda e terceira ordem)

Não há grau de liberdade para o resíduo, então efeitos “não significantes” devem compor o resíduo.

# Fatorial Fracional 2<sup>4</sup>-1

Tratamentos 2,3,5,8,9,12,14,15 omitidos

## Tabela Anova

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Xfmeio	7	50.022	7.146		
Residuals	0	0.000			

## Estimativas dos Efeitos

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	6.8725	NA	NA	NA
Xfmeiox1	-0.0125	NA	NA	NA
Xfmeiox2	-1.4950	NA	NA	NA
Xfmeiox3	1.2025	NA	NA	NA
Xfmeiox4	-0.0050	NA	NA	NA
Xfmeiox12	-0.2400	NA	NA	NA
Xfmeiox13	0.1825	NA	NA	NA
Xfmeiox14	-1.5750	NA	NA	NA
Xfmeiox23	NA	NA	NA	NA
Xfmeiox24	NA	NA	NA	NA
Xfmeiox34	NA	NA	NA	NA
Xfmeiox123	NA	NA	NA	NA
Xfmeiox124	NA	NA	NA	NA
Xfmeiox134	NA	NA	NA	NA
Xfmeiox234	NA	NA	NA	NA
Xfmeiox1234	NA	NA	NA	NA

# Fatorial Fracional $2^{4-1}$

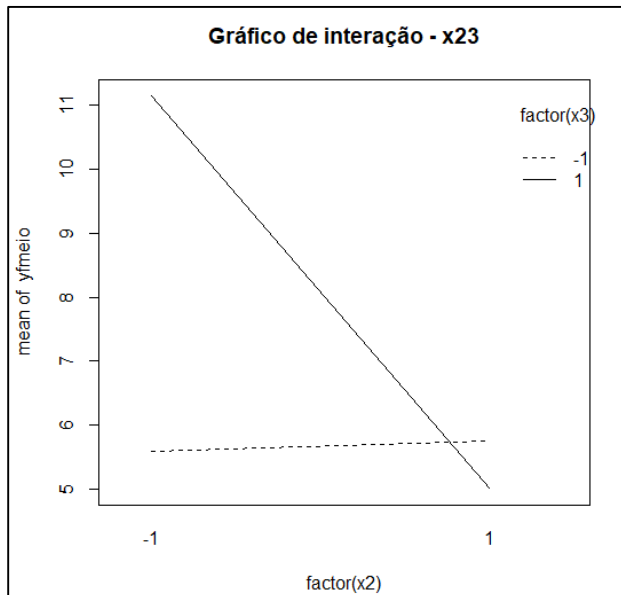
Tratamentos omitidos: 2,3,5,8,9,12,14,15

## Tabela de ANOVA

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
Xfmeio[, c(2, 3, 8)]	3	49.293	16.4311	90.194	0.000396	***
Residuals	4	0.729	0.1822			

## Estimativas dos Efeitos:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
(Intercept)	6.8725	0.1509	45.542	1.39e-06	***
Xfmeio[, c(2, 3, 8)]x2	-1.4950	0.1509	-9.907	0.000583	***
Xfmeio[, c(2, 3, 8)]x3	1.2025	0.1509	7.969	0.001344	**
Xfmeio[, c(2, 3, 8)]x23	-1.5750	0.1509	-10.437	0.000476	***



$$\left(\mu_{-11}^{23} - \mu_{-1-1}^{23}\right) > \left(\mu_{11}^{23} - \mu_{1-1}^{23}\right)$$

# Construção de Fatorial Fracional: $2^4 \Rightarrow 2^{4-1}$

Definir a relação definidora e proceder com a “aritmética dos termos fatoriais” para encontrar os confundimentos:

Relação Definidora:  $X_0 = X_{1234} \Rightarrow 0 = 1234$  Notação adotada.

Regras (aritmética):  $\begin{cases} X_j X_0 = X_j \\ X_j X_j = X_0 \end{cases}$

Multiplicar cada coluna de X (complete) nos dois lados da relação definidora

$$\begin{cases} X_1 X_0 = X_1 \\ X_1 X_{1234} = X_{234} \end{cases} \Rightarrow 1 = 234$$

$$\begin{cases} X_2 X_0 = X_2 \\ X_2 X_{1234} = X_{134} \end{cases} \Rightarrow 2 = 134$$



**Efeitos  
Confundidos:**

$X_0 = X_{1234}$	$0 = 1234$
$X_1 = X_{234}$	$1 = 234$
$X_2 = X_{134}$	$2 = 134$
$X_3 = X_{124}$	$3 = 124$
$X_4 = X_{123}$	$4 = 123$
$X_{12} = X_{34}$	$12 = 34$
$X_{13} = X_{24}$	$13 = 24$
$X_{14} = X_{23}$	$14 = 23$

$\Rightarrow$  Fatorial Fracional: escolher as linhas da matriz X (completa) para as quais a relação definidora ocorre

# Construção de Fatorial Fracional: $2^4 \Rightarrow 2^{4-1}$

**Relação Definidora:**  $X_0 = X_{1234} \Rightarrow 0 = 1234$

**Unidades Omitidas (linhas da matriz X): 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15**

**Unidades Analisadas: 1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16**

Alternativamente, na construção de um Fatorial Fracional, também podemos adotar:

**Relação Definidora:**  $X_0 = -X_{1234} \Rightarrow 0 = -1234$

**Unidades Omitidas (linhas da matriz X): 1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16**

**Unidades Analisadas: 2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15**

Os efeitos confundidos serão os mesmos somente com o sinal trocado!



# Fatorial Fracional 2<sup>4</sup>-1

Tratamentos omitidos: 1,4,6,7,10,11,13,16

## Tabela ANOVA:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Xfmeio2	7	41.328	5.904		
Residuals	0	0.000			

## Estimativa dos Efeitos:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	6.60875	NA	NA	NA
Xfmeio2x1	-0.23625	NA	NA	NA
Xfmeio2x2	-1.00625	NA	NA	NA
Xfmeio2x3	1.60375	NA	NA	NA
Xfmeio2x4	0.19625	NA	NA	NA
Xfmeio2x12	-0.02125	NA	NA	NA
Xfmeio2x13	-0.08625	NA	NA	NA
Xfmeio2x14	1.21625	NA	NA	NA
Xfmeio2x23	NA	NA	NA	NA
Xfmeio2x24	NA	NA	NA	NA
Xfmeio2x34	NA	NA	NA	NA
Xfmeio2x123	NA	NA	NA	NA
Xfmeio2x124	NA	NA	NA	NA
Xfmeio2x134	NA	NA	NA	NA
Xfmeio2x234	NA	NA	NA	NA
Xfmeio2x1234	NA	NA	NA	NA

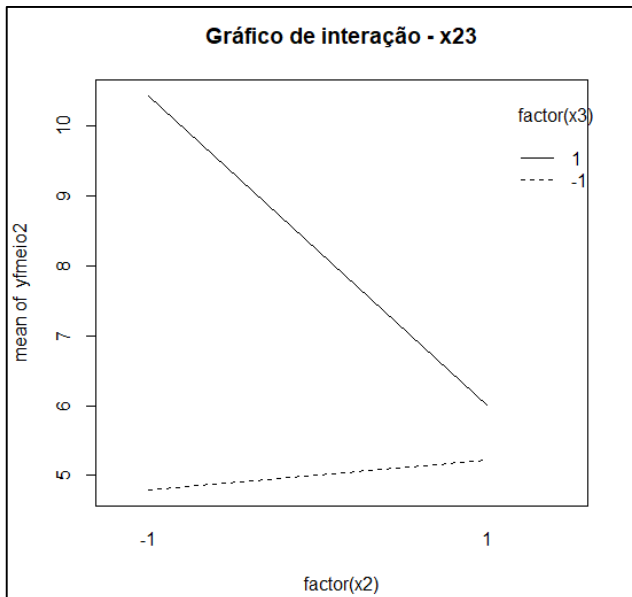
# Fatorial Fracional $2^{4-1}$ Tratamentos omitidos: 1,4,6,7,10,11,13,16

## Tabela de ANOVA:

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Xfmeio2[, c(2, 3, 8)]	3	40.511	13.5035	66.052	0.0007292 ***
Residuals	4	0.818	0.2044		

## Estimativa dos Efeitos:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
(Intercept)	6.6088	0.1599	41.341	2.05e-06 ***
Xfmeio2[, c(2, 3, 8)]x2	-1.0062	0.1599	-6.295	0.003255 **
Xfmeio2[, c(2, 3, 8)]x3	1.6037	0.1599	10.032	0.000555 ***
Xfmeio2[, c(2, 3, 8)]x23	-1.2163	0.1599	-7.608	0.001602 **



$$\left(\mu_{-11}^{23} - \mu_{-1-1}^{23}\right) > \left(\mu_{11}^{23} - \mu_{1-1}^{23}\right)$$

# Fatorial Fracional $2^{4-2}$

Fracionais mais Reduzidos:  $2^4 \Rightarrow 2^{4-1} \Rightarrow 2^{4-2}$

Relação Definidora:  $X_0 = X_{1234} \Rightarrow 0 = 1234$

Trat	Y	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_{12}$	$X_{13}$	$X_{14}$	$X_{23}$	$X_{24}$	$X_{34}$	$X_{123}$	$X_{124}$	$X_{234}$	$X_{1234}$
1	5.55	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1
4	5.32	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
6	11.56	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1
7	5.08	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1
10	5.63	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1
11	6.18	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
13	10.73	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
16	4.93	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Relação Definidora:  $X_0 = X_{12} \Rightarrow 0 = 12$ ;  $X_{0i} = X_{12i} = 1 \Rightarrow 1, 4, 13, 16$

Trat	Y	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_{12}$	$X_{13}$	$X_{14}$	$X_{23}$	$X_{24}$	$X_{34}$	$X_{123}$	$X_{124}$	$X_{234}$	$X_{1234}$
1	5.55	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1
4	5.32	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
13	10.73	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
16	4.93	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1



# Fatorial Fracional $2^{4-2}$

Fracionais mais Reduzidos:  $2^4 \Rightarrow 2^{4-1} \Rightarrow 2^{4-2}$

Relação Definidora:  $X_0 = X_{1234} \Rightarrow 0 = 1234$



Relação Definidora:  $X_0 = X_{12} \Rightarrow 0 = 12$

Trat	Y	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_{12}$	$X_{13}$	$X_{14}$	$X_{23}$	$X_{24}$	$X_{34}$	$X_{123}$	$X_{124}$	$X_{234}$	$X_{1234}$
1	5.55	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1
4	5.32	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
13	10.73	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
16	4.93	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1



**Efeitos  
Confundidos:**

$$\begin{aligned}
 0 &= 1234 = 12 = 34 \\
 1 &= 234 = 2 = 134 \\
 3 &= 124 = 123 = 4 \\
 13 &= 24 = 23 = 14
 \end{aligned}$$

Contudo, este **não é um delineamento desejado**, pois efeitos principais estão confundidos com outros efeitos principais!

Fator	Fração	U.E.	Relação definidora
3	$2_{III}^{3-1}$	4	0 = 123
4	$2_{IV}^{4-1}$	8	0 = 1234
5	$2_V^{5-1}$	16	0 = 12345
	$2_{III}^{5-2}$	8	0 = 124 = 135
6	$2_{VI}^{6-1}$	32	0 = 123456
	$2_{IV}^{6-2}$	16	0 = 1235 = 2346
	$2_{III}^{6-3}$	8	0 = 124 = 135 = 236
7	$2_{VII}^{7-1}$	64	0 = 1234567
	$2_{IV}^{7-2}$	32	0 = 12346 = 12457
	$2_{IV}^{7-3}$	16	0 = 1235 = 2346 = 1347
	$2_{III}^{7-4}$	8	0 = 124 = 135 = 236 = 1237
8	$2_V^{8-2}$	64	0 = 12347 = 12568
	$2_{IV}^{8-3}$	32	0 = 1236 = 1247 = 23458
	$2_{IV}^{8-4}$	16	0 = 2345 = 1346 = 1237 = 1248
9	$2_{VI}^{9-2}$	128	0 = 134678 = 235679
	$2_{IV}^{9-3}$	64	0 = 12347 = 13568 = 34569
	$2_{IV}^{9-4}$	32	0 = 23456 = 13457 = 12458 = 12359
	$2_{III}^{9-5}$	16	0 = 1235 = 2346 = 1347 = 1248 = 12349

## Fatorial Fracionais: $2_R^{K-f}$

**K:** número de fatores

**f:** fração

**R:** resolução

**III:** há efeitos principais confundidos com interações entre três fatores (segunda ordem)

**IV:** há efeitos principais confundidos com interações entre quatro fatores (terceira ordem) e interações de dois fatores confundidos com interações de dois fatores

**V:** há efeitos principais confundidos com interações entre cinco fatores (quarta ordem) e algumas interações de dois fatores estão confundidos com interações de três fatores

...

# Planejamento do Experimento

$$2^4 \Rightarrow 2^{4-1}$$

Estrutura dos  
Tratamentos??

Leite	Integral				Semidesnatado			
	Liquidificador		À Mão		Liquidificador		À Mão	
Mistura dos ingredientes								
Descanso	Sem	15min	Sem	15min	Sem	15min	Sem	15min
Temperatura	-	+	-	+	-	+	-	+
...								
Réplica 1								
Réplica 2								
Réplica 3								
Réplica 4								
Réplica 5								
...								

U.E.

Estrutura da Resposta ??