Exercícios Das Aulas I - MAT0234 Medida e Integração

Prof. Jorge Adrian Beloqui

Exercício.

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mensurável e $\varepsilon > 0$. Então existe aberto U com:

(a) $A \subset U$.

(b) $\mu(U) \leq \mu(A) + \varepsilon$.

Exercício. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ com medida finita, $A \subset X$ Lebesgue mensurável e $\varepsilon > 0$. Então existe fechado F com:

(a) $F \subset A$.

(b) $\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon$.

Solução: Seja V aberto, $A^c \subset V$, com $\mu(V) \leq \mu(A^c) + \varepsilon$. Pela mensurabilidade temos $\mu(A^c) + \mu(A) = \mu(X)$ e $\mu(V^c) + \mu(V) = \mu(X)$. Seja $F = V^c$. Então substituindo na desigualdade, $\mu(X) - \mu(F) \leq \mu(X) - \mu(A) + \varepsilon$. Como $\mu(X)$ é finita, podemos cancelar dos dois lados e temos $-\mu(F) \leq -\mu(A) + \varepsilon$ ou $\mu(F) \geq \mu(A) - \varepsilon$ ou $\varepsilon + \mu(F) \geq \mu(A)$.
Comentário: o que fizemos? Observe que ao cobrir A por um aberto U, estamos ao mesmo tempo achando um fechado $F = U^c$, contido em A^c. Se as medidas de U e de A diferem no máximo em ε, então, A sendo mensurável, implica que as medidas de F e de A^c também diferem no máximo por ε.

Definição: Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que **X tem medida σ-finita** se existir $\{A_j\}$ sequência de conjuntos mensuráveis com $\mu(A_j) < \infty$; $\forall\, j \in \mathbb{N}$ e $X = \cup_1^\infty A_j$.
Exemplos: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$, variedades diferenciáveis, subconjuntos de espaços σ-finitos.

Exercício. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset X$ Lebesgue mensurável com $\mu(A) < +\infty$ e $\varepsilon > 0$. Então existe fechado F com:

(a) $F \subset A$.

(b) $\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon$.

Solução: trabalhemos em R^+. Considere $X = \cup([n, n+1))$. A seguir considere $A_n = A \cap [n, n+1)$ e aplique os exercícios anteriores.

Exercício. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Se X for σ-finito então $\mu(p) < \infty\, \forall\, p \in X$.

Exercício. Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida σ-finito onde $\mathcal{A}$ contém os Borelianos e μ é regular. Então:

(a) cada ponto $p \in X$ tem uma vizinhança U_x com $\mu(U_x) < \infty$.

(b) todo compacto K tem $\mu(K) < \infty$

Exercício. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua com suporte compacto, então $f \in L^p(X)$ para todo $1 \leq p < +\infty$.

Exercício. As funções contínuas com suporte compacto formam um espaço vetorial $\mathcal{C}_c(X)$.

Exercício. Se $A \in \mathcal{A}$ com $\mu(A) < +\infty$, pelo Lema de Lusin, tomemos $g \in \mathcal{C}_c(X)$ com $\mu(\{g \neq \chi_A\}) < \varepsilon^p$. Mostre que $\|g - \chi_A\|_p < \varepsilon$.

Exercício (da lista)**.** Seja $f \in L^p(X)$, então existe φ simples com $\|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon$. (considere $f = f^+ - f^-$)

Exercício. Exercício: mostre que as funções degrau são densas em $L^p(X)$