Capítulo 3

Decorando o espaço-tempo de Minkowski

Depois de definirmos as estruturas que fazem de $\mathbb{M}$ o espaço-tempo de Minkowski e de explorar algumas consequências físicas que decorrem diretamente dessas estruturas, vamos introduzir em $\mathbb{M}$ alguns acessórios que, embora não sejam essenciais, serão extremamente convenientes para toda a análise que se seguirá. Tão convenientes que, depois de termos trabalhado no nível mais fundamental do espaço-tempo nos capítulos anteriores, a partir de agora nos manteremos quase exclusivamente numa "camada" mais superficial com a qual o espaço-tempo será coberto.

3.1 Sistemas de coordenadas

Até agora, sempre que desejávamos especificar um evento $p \in \mathbb{M}$, de modo a poder utilizá-lo em manipulações matemáticas, tínhamos que fazê-lo por meio da escolha de um evento de referência $o \in \mathbb{M}$ e de um 4-vetor $s^a = \psi(o, p) \in \mathbb{V}$. Para especificarmos concretamente s^a, por sua vez, necessitávamos fixar uma base de $\mathbb{V}$ para, então, termos suas componentes reais s^μ com as quais podíamos fazer contas. No fim, o efeito líquido desse procedimento é o de prover uma associação $\varphi_s : \mathbb{M} \to \mathbb{R}^4$, $p \overset{\varphi_s}{\mapsto} s^\mu$, com algumas características particulares advindas da estrutura afim de $\mathbb{M}$ (vide **Fig. 3.1**). A ideia, agora, é generalizar esse procedimento de associar quádruplas reais $x^\mu \in \mathbb{R}^4$ a eventos $p \in \mathbb{M}$, sem a necessidade desses passos intermediários (em particular, sem fazer uso explícito da estrutura afim de $\mathbb{M}$), mas preservando algumas mínimas propriedades desejáveis. Uma associação dessas, $\varphi_x : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$

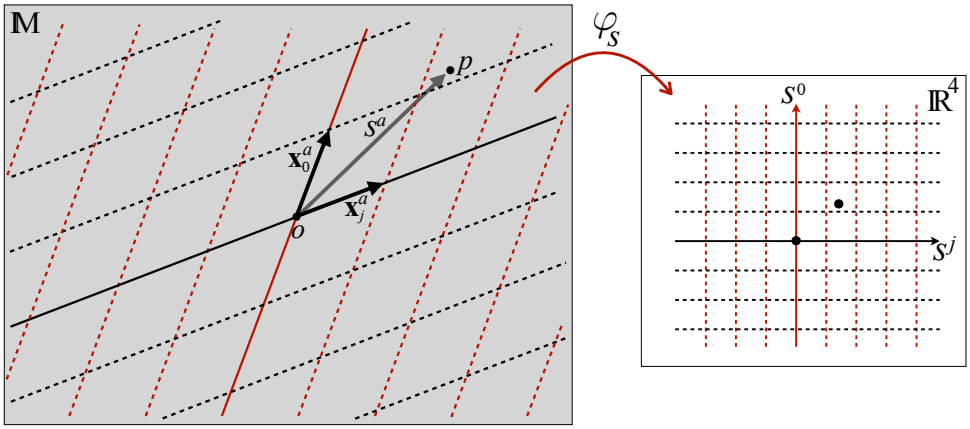

Figura 3.1: Associação $\varphi_s : \mathbb{M} \to \mathbb{R}^4$ induzida pela estrutura afim de $\mathbb{M}$, escolhidos um evento o e uma base $\{\mathbf{x}_\mu^a\}$ de referência.

— onde $\mathcal{A}$ é uma região (*aberta*[1]) de $\mathbb{M}$ e $\mathcal{B}$ é uma região (*aberta*) de $\mathbb{R}^4$ —, é chamada de *sistema de coordenadas* e deve satisfazer as seguintes propriedades básicas[2]:

(i) φ_x é bijetora;

(ii) φ_x é contínua[3];

(iii) φ_x^{-1} é contínua.

Denotaremos apenas por $x^\mu \in \mathbb{R}^4$ o resultado da atuação de φ_x em $p \in \mathbb{M}$: $x^\mu := \varphi_x(p)$ (com pequenas variações para designar sistemas de coordenadas diferentes, como $\widetilde{x}^\mu$, x'^μ, x''^μ, ...) — vide **Fig. 3.2**. Como uma imposição adicional, nos restringiremos, por conveniência, a sistemas de coordenadas φ_x que são *compatíveis* com a estrutura afim de $\mathbb{M}$, que significa que o mapeamento $\varphi_x \circ \varphi_s^{-1}$ é uma função bijetora de $\varphi_s(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{R}^4$ em $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^4$, de classe C^∞, assim como sua inversa $\varphi_s \circ \varphi_x^{-1} : \mathcal{B} \to \varphi_s(\mathcal{A})$[4] (vide **Fig. 3.3**). Se o(a) leitor(a) estiver confuso(a) quanto ao significado de todas essas observações técnicas, tenha em mente

[1]Não é o propósito deste curso entrar em detalhes técnicos de *topologia*, mas, apenas para registro, note que a estrutura afim de $\mathbb{M}$ traz consigo a noção de *conjuntos abertos* em $\mathbb{M}$, importados da noção de conjuntos abertos em $\mathbb{V}$, que, por sua vez — como espaço vetorial real —, os adquire a partir de $\mathbb{R}^4$. Assim, $\mathbb{M}$ é naturalmente um *espaço topológico*, onde faz sentido definir-se continuidade, por exemplo.

[2]Ou seja, φ_x é um *homeomorfismo* entre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Note que, em particular, $\mathbb{M}$ é *homeomorfo* a $\mathbb{R}^4$ — já que φ_s, descrita anteriormente e representada na Fig. 3.1, é um homeomorfismo entre $\mathbb{M}$ e $\mathbb{R}^4$.

[3]Lembrando que uma função é contínua se a imagem inversa de conjuntos abertos são conjuntos abertos.

[4]Ou seja, $\varphi_x \circ \varphi_s^{-1}$ é um *difeomorfismo* suave entre $\varphi_s(\mathcal{A})$ e $\mathcal{B}$.

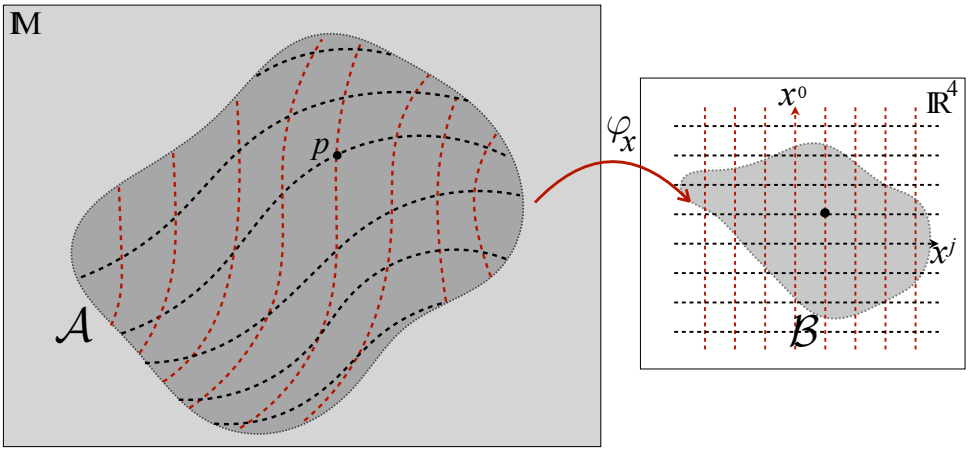

Figura 3.2: Sistema de coordenadas genérico $\varphi_x : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

apenas que estamos garantindo que os eventos $p \in \mathcal{A} \subseteq \mathbb{M}$ sejam univocamente determinados pelas suas coordenadas $x^\mu = \varphi_x(p)$ e que as componentes de $s^a := \psi(o, p)$ (qualquer que seja a escolha de base e de $o \in \mathbb{M}$) sejam funções infinitamente diferenciáveis das coordenadas x^μ de p. Isso também garante, como consequência, que se quisermos mudar o sistema de coordenadas, de φ_x para $\varphi_{x'}$, por exemplo, a função de *mudança de coordenadas*, $\varphi_{x'} \circ \varphi_x^{-1}$, será uma função suave — ou seja, as novas coordenadas $x'^\mu(x^\alpha)$ serão funções infinitamente diferenciáveis das coordenadas anteriores x^α.

É evidente que o próprio mapeamento φ_s acima é um exemplo particular de sistema de coordenadas. Sistemas de coordenadas construídos dessa maneira (escolhendo-se um evento e uma base tetrada de referência e fazendo-se uso explícito da estrutura afim de $\mathbb{M}$, como detalhado no início desta seção) têm algumas propriedades especiais. Uma delas é a maneira de se expressar o intervalo invariante $\mathcal{I}(p, q)$ em termos das coordenadas dos eventos p e q. Sendo $\Delta s^a := \psi(p, q) = \psi(o, q) - \psi(o, p) = s^a(q) - s^a(p) = [s^\mu(q) - s^\mu(p)]\mathbf{e}^a_\mu =: \Delta s^\mu \mathbf{e}^a_\mu$, temos:

$$\mathcal{I}(p, q) = g_{ab}\, \Delta s^a \Delta s^b = \eta_{\mu\nu}\, \Delta s^\mu \Delta s^\nu; \tag{3.1}$$

ou seja, o intervalo invariante entre dois eventos quaisquer é uma função (algébrica quadrática) *apenas* da diferença de suas coordenadas. Para sistemas de coordenadas arbitrários, essa relação não é válida em geral, como veremos mais adiante.

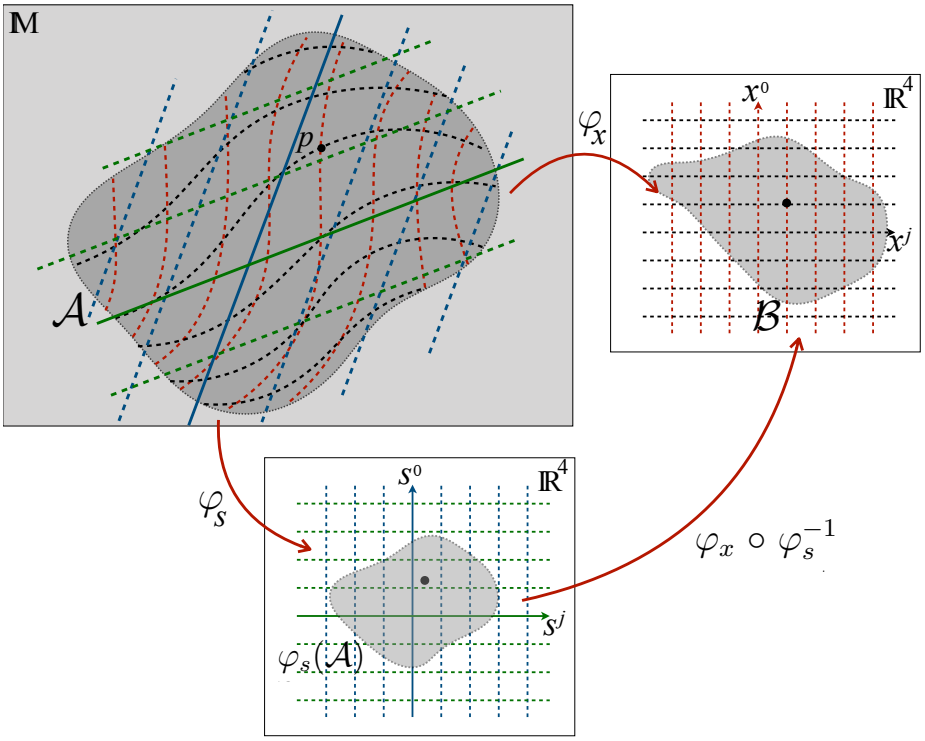

Figura 3.3: A condição de compatibilidade de φ_x com a estrutura afim de $\mathbb{M}$ impõe que $\varphi_x \circ \varphi_s^{-1}$ seja um difeomorfismo suave entre $\varphi_s(\mathcal{A})$ e $\mathcal{B}$ — ou seja, $\varphi_x \circ \varphi_s^{-1}$ é bijetora, de classe C^∞ e com inversa também de classe C^∞.

3.1.1 Bases coordenadas

Uma vez adotado um sistema de coordenadas $p \overset{\varphi_x}{\mapsto} x^\mu$, podemos, em *cada* evento p, induzir uma base de $\mathbb{V}$ da seguinte maneira. Seja $s^a := \psi(o, p)$ o 4-vetor que localiza p em relação a um evento *qualquer* $o \in \mathbb{M}$. Como podemos inverter φ_x e considerar que $p = p(x^\mu)$ (pelas propriedades de sistemas de coordenadas, dadas anteriormente), esse 4-vetor é uma função de x^μ: $s^a(x^\mu) := \psi(o, p(x^\mu))$. Portanto, calculando-se as *derivadas parciais* $\partial s^a / \partial x^\mu =: \partial_\mu s^a$, obtemos, em cada evento p, um conjunto de quatro 4-vetores (um para cada escolha de $\mu = 0, ..., 3$) que, cada um, fornece a direção ao longo da qual apenas *uma* das coordenadas x^μ varia — pois $\partial_\mu s^a$ é tangente à curva determinada por $s^a(x^\mu)$ variando-se apenas o parâmetro x^μ correspondente à variável de derivação (vide **Fig. 3.4**). Segue, da suavidade de $s^\alpha(x^\mu)$ e de sua inversa, que o conjunto $\{\partial_\mu s^a\}_{\mu=0,...3}$ é linearmente independente, para todo $p \in \mathcal{A}$. A esse conjunto de 4-vetores, que denotaremos simplesmente por $\{\partial^a_\mu\}$, dá-se o nome de *base coordenada* de $\mathbb{V}$ em $p \in \mathcal{A}$.

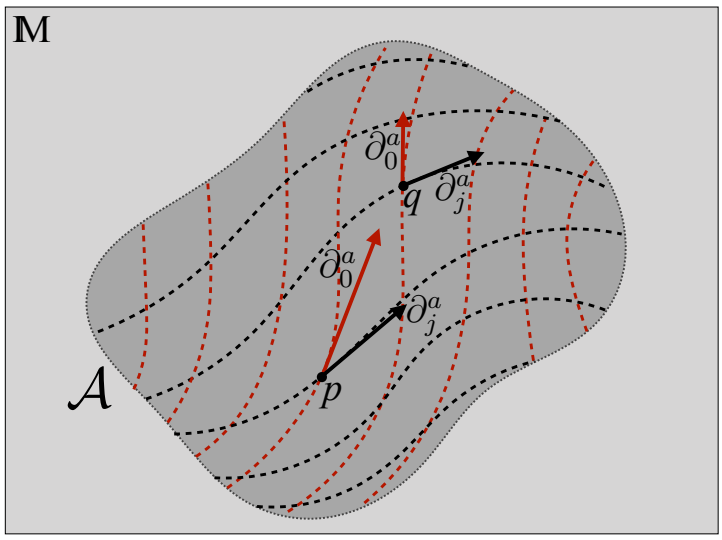

Figura 3.4: Representação das bases coordenadas em dois eventos, p e q. Note que cada elemento é tangente à curva na qual apenas uma das coordenadas varia (as *curvas coordenadas*).

A base coordenada *dual* a $\{\partial^a_\mu\}$ será denotada, sugestivamente, por $\{\mathbf{dx}^\mu_a\}$, pois, pela sua definição ($\mathbf{dx}^\mu_a \partial^a_\nu = \delta^\mu_\nu$), os covetores $\mathbf{dx}^\mu_a$ satisfazem $\mathbf{dx}^\mu_a \partial^b_\mu = \delta^b_a$, com δ^a_b sendo o operador identidade (tanto em $\mathbb{V}$, quanto em $\mathbb{V}^*$).

É importante estabelecermos como as bases coordenadas de $\mathbb{V}$ e $\mathbb{V}^*$ mudam quando mudamos o sistema de coordenadas. Essa mudança de bases é facilmente obtida a partir das próprias definições. Quanto à base de $\mathbb{V}$, tem-se:

$$\partial'^{\,a}_\mu := \frac{\partial s^a}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial s^a}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\partial^a_\alpha. \tag{3.2}$$

Em relação à base de $\mathbb{V}^*$, escrevendo $\mathbf{dx}'^\mu_a = J^\mu_\alpha\, \mathbf{dx}^\alpha_a$, onde os coeficientes J^μ_α devem ser determinados, temos:

$$\delta^\mu_\nu = \mathbf{dx}'^\mu_a\, \partial'^a_\nu = J^\mu_\alpha\, \mathbf{dx}^\alpha_a \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\, \partial^a_\beta = J^\mu_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu} \Rightarrow J^\mu_\alpha = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}$$

(ou seja, a matriz J — construída com as entradas J^μ_ν, com o índice de cima indexando as linhas e o de baixo as colunas — é a matriz jacobiana de mudança de coordenadas $x^\mu \mapsto x'^\mu(x^\alpha)$). Logo,

$$\mathbf{dx}'^\mu_a = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\mathbf{dx}^\alpha_a \tag{3.3}$$

(o que, de passagem, fornece mais uma justificativa para nossa sugestiva notação da base coordenada dual).

Com essas leis de transformação de bases, pode-se obter a lei de transformação das *componentes* de tensores:

- **Exercício:** Seja $T^{a_1\ldots a_m}_{b_1\ldots b_n}$ um tensor de posto (m,n) arbitrário definido em p. Sendo $T^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_n}$ e $T'^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_n}$ suas componentes nas bases coordenadas induzidas, em p, por sistemas de coordenadas x^μ e x'^μ, respectivamente, mostre que elas se relacionam por

$$T'^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\alpha_m}}\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta_n}}{\partial x'^{\nu_n}}T^{\alpha_1\ldots\alpha_m}_{\beta_1\ldots\beta_n}, \tag{3.4}$$

  onde é de extrema importância que todas as quantidades sejam calculadas no *mesmo evento* p — lembrando que, em geral, $x'^\mu(p) \neq x^\mu(p)$.

Note que a base coordenada associada ao sistema de coordenadas φ_s, definido com uso explícito da estrutura afim de $\mathbb{M}$, é simplesmente a base tetrada escolhida como referência, pois

$$\partial^a_\mu := \frac{\partial s^a}{\partial s^\mu} = \frac{\partial}{\partial s^\mu}(s^\nu \mathbf{e}^a_\nu) = \delta^\nu_\mu \mathbf{e}^a_\nu = \mathbf{e}^a_\mu;$$

ou seja, a base coordenada associada a φ_s é *uniforme* (e ortonormalizada) em todo o espaço-tempo.