

2.3.2 De volta ao grupo de Poincaré e sua atuação em \mathbb{M}

Retomando de onde havíamos parado, antes de nos concentrarmos no grupo de Lorentz $O(3, 1)$, tínhamos notado existir uma bijeção entre o

grupo de Poincaré \mathcal{P} e o conjunto $O(3, 1) \times \mathbb{V}$, via Eqs. (2.25) e (2.27). Lembremos que, da maneira como definimos, elementos de \mathcal{P} atuam no espaço-tempo \mathbb{M} , enquanto que elementos de $O(3, 1) \times \mathbb{V}$ atuam em \mathbb{V} . Em particular, elementos $(\mathbf{1}, c^a)$ do subconjunto $\{\mathbf{1}\} \times \mathbb{V} \subset O(3, 1) \times \mathbb{V}$ — com $\mathbf{1}$ representando a identidade de $O(3, 1)$ —, que atuam em \mathbb{V} como $\iota_o^*(v^a) = v^a + c^a$, representam mapeamentos $\iota \in \mathcal{P}$ que simplesmente *transladam* todos os eventos de \mathbb{M} pelo mesmo segmento orientado: $p \mapsto \iota(p)$, $c^a = \psi(p, \iota(p))$ — ou seja, $\iota = S_{c^a}$; vide **Exercício** em que S_{u^a} é definido, antes do início da Subseção 2.3.1. Por isso, esses elementos de \mathcal{P} são chamados de translações espaço-temporais. Já elementos $(\lambda_\iota, \mathbf{0})$ do subconjunto $O(3, 1) \times \{\mathbf{0}\} \subset O(3, 1) \times \mathbb{V}$ (identificado naturalmente com o grupo de Lorentz $O(3, 1)$), que atuam em \mathbb{V} de acordo com a Eq. (2.28), estão associados a mapeamentos $\iota \in \mathcal{P}$ que mantêm invariante o evento de referência $o \in \mathbb{M}$ e mapeiam os outros eventos de modo a manter o intervalo invariante em relação a o .

Como \mathcal{P} possui estrutura de grupo, podemos usar a bijeção entre \mathcal{P} e $O(3, 1) \times \mathbb{V}$ para induzir uma regra de produto neste último, da seguinte maneira:

- **Exercício:** Seja $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow O(3, 1) \times \mathbb{V}$ a bijeção mencionada acima, $\iota \mapsto \varphi(\iota) = (\lambda, c^a)$, decorrente das Eqs. (2.25) e (2.27) — que depende da escolha de $o \in \mathbb{M}$ e $\{e_\mu^a\}$. Definindo, em $O(3, 1) \times \mathbb{V}$, o produto

$$(\lambda_1, c_1^a) \cdot (\lambda_2, c_2^a) := (\lambda_1 \lambda_2, \lambda_1(c_2^a) + c_1^a)$$

— lembrando que a atuação de $\lambda \in O(3, 1)$ em elementos de \mathbb{V} é dada pela Eq. (2.28) —, pede-se:

- Mostre que $O(3, 1) \times \mathbb{V}$ munido dessa operação binária é um grupo — denotado por $O(3, 1) \times \mathbb{V}^{13}$ —, deixando clara a forma da identidade desse grupo e do elemento $(\lambda, c^a)^{-1}$ (o elemento inverso de (λ, c^a));
- Mostre que o subconjunto $O(3, 1) \times \{\mathbf{0}\}$ (identificado naturalmente com o grupo de Lorentz $O(3, 1)$) é um *subgrupo* de $O(3, 1) \times \mathbb{V}$;
- Mostre que o subconjunto $\{\mathbf{1}\} \times \mathbb{V}$ (identificado naturalmente com o grupo das translações espaço-temporais) é um subgrupo *normal* de $O(3, 1) \times \mathbb{V}$; ou seja, além de mostrar que

¹³Como já visto numa nota de rodapé anterior, $A \times B$ denota o produto semi-direto entre o grupo A e o grupo B , de acordo com uma regra específica de produto segundo a qual A é um subgrupo e B é um subgrupo *normal* de $A \times B$ — vide item (c) deste exercício.

$\{\mathbf{1}\} \times \mathbb{V}$ é subgrupo de $O(3, 1) \ltimes \mathbb{V}$, mostre a condição de *estabilidade* de $\{\mathbf{1}\} \times \mathbb{V}$:

$$(\lambda, c_1^a) \cdot (\mathbf{1}, c_2^a) \cdot (\lambda, c_1^a)^{-1} \in \{\mathbf{1}\} \times \mathbb{V}$$

para quaisquer $\lambda \in O(3, 1)$, $c_1^a, c_2^a \in \mathbb{V}$;

(d) Mostre que, para quaisquer $\iota_1, \iota_2 \in \mathcal{P}$, tem-se

$$\varphi(\iota_i \circ \iota_j) = \varphi(\iota_i) \cdot \varphi(\iota_j).$$

(Ou seja, $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow O(3, 1) \ltimes \mathbb{V}$ é um *homomorfismo* e, por também ser bijetor, um isomorfismo entre grupos.)

Os resultados do exercício acima mostram que os grupos \mathcal{P} e $O(3, 1) \ltimes \mathbb{V}$ são isomorfos, $\mathcal{P} \cong O(3, 1) \ltimes \mathbb{V}$, o que, na prática, significa que podemos pensar neles como sendo o mesmo grupo — embora, concretamente, os tenhamos definido atuando em espaços distintos (\mathbb{M} e \mathbb{V} , respectivamente).

Para nos certificarmos de que compreendemos a maneira como cada elemento de $O(3, 1) \ltimes \mathbb{V}$ induz uma isometria $\iota \in \mathcal{P}$, vamos representar a ação dessas isometrias em \mathbb{M} . Para isso, precisamos escolher um evento de referência (qualquer) $o \in \mathbb{M}$ e uma tetrada (qualquer) $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$ em o . Feitas essas escolhas, comecemos representando a atuação das isometrias discretas associadas aos elementos \mathbf{T} , \mathbf{P} e $\mathbf{PT} = -\mathbf{1}$:

$$s^a = s^\mu \mathbf{e}_\mu^a \begin{cases} \xrightarrow{\mathbf{T}} s_{\mathbf{T}}^a = s^\mu T_\mu^\alpha \mathbf{e}_\alpha^a = -s^0 \mathbf{e}_0^a + s^j \mathbf{e}_j^a \\ \xrightarrow{\mathbf{P}} s_{\mathbf{P}}^a = s^\mu P_\mu^\alpha \mathbf{e}_\alpha^a = s^0 \mathbf{e}_0^a - s^j \mathbf{e}_j^a \\ \xrightarrow{-\mathbf{1}} s_{-\mathbf{1}}^a = -s^\mu \mathbf{e}_\mu^a \end{cases} . \quad (2.43)$$

Em palavras, \mathbf{T} simplesmente induz uma inversão do sinal da componente temporal do 4-vetor $\vec{\overline{op}}$, enquanto \mathbf{P} induz a inversão dos sinais apenas das componentes espaciais desse mesmo 4-vetor (em relação à tetrada $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$ e evento $o \in \mathbb{M}$ escolhidos); \mathbf{PT} , ao fazer ambos, inverte completamente a orientação de $\vec{\overline{op}}$ (vide **Fig. 2.17**). Por essas razões, \mathbf{T} e \mathbf{P} são denominados de reversão temporal e reversão espacial, respectivamente. (\mathbf{P} também é chamado de transformação de paridade.)

Como qualquer elemento de $O(3, 1) \ltimes \mathbb{V}$ pode ser expresso como um produto $(\lambda, c^a) \cdot (\lambda_{\mathbf{x}}, \mathbf{0})$, com $\lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ e $\lambda_{\mathbf{x}}$ representando as simetrias discretas discutidas acima, podemos, agora, nos concentrar apenas na atuação das isometrias contínuas associadas a $(\lambda, c^a) \in \mathcal{L}_+^\uparrow \ltimes \mathbb{V}$. Essas isometrias são caracterizadas por 10 parâmetros reais contínuos, que

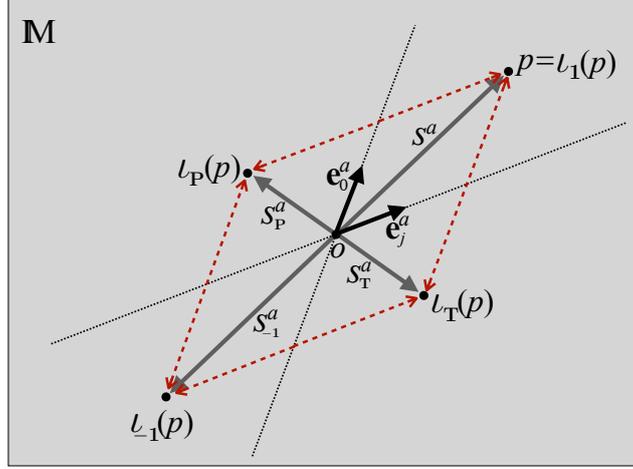


Figura 2.17: Isometrias discretas $\iota_{\mathbf{X}}$ associadas aos elementos $\mathbf{X} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{T}, \mathbf{P}, \mathbf{PT} = -\mathbf{1}\}$, para uma dada escolha de $o \in \mathbb{M}$ e tetrada $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$. Note que as imagens de cada evento p pelas isometrias $\iota_{\mathbf{X}}$ dependem sensivelmente da escolha de o e $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$.

denotaremos por $\{\sigma_A\}_{A=1,\dots,10}$ — 6 parâmetros para caracterizar a matriz Λ associada a λ e 4 parâmetros para caracterizar o 4-vetor c^a . Atuando num evento p qualquer, caracterizado por $s^a(p) := \psi(o, p)$, o elemento (λ, c^a) o mapeia no evento $p(\sigma_A)$ caracterizado por $s^a(p; \sigma_A) := \psi(o, p(\sigma_A))$ dado por

$$s^a(p; \sigma_A) = \lambda(s^a(p)) + c^a = (\Lambda^\mu_\nu s^\nu(p) + c^\mu) \mathbf{e}_\mu^a. \quad (2.44)$$

Como as componentes c^μ de c^a , na tetrada escolhida, são arbitrárias, elas podem ser adotadas como sendo os 4 parâmetros que caracterizam as translações espaço-temporais. Já os 6 parâmetros que caracterizam Λ podem ser escolhidos como sendo os ângulos (ϕ, χ, θ) e as componentes V^j da 3-velocidade que aparecem na Eq. (2.42). Ordenemos esses parâmetros de modo que $(\sigma_A)_{A=1,\dots,10} := (c^\mu, V^j, \phi, \chi, \theta)$. Vamos, então, tentar visualizar a atuação dessas isometrias em \mathbb{M} .

A atuação de translações espaço-temporais e rotações espaciais, associadas aos 7 parâmetros c^μ , ϕ , χ e θ já são bastante familiares em física newtoniana, pois também representam simetrias naquele contexto. Além disso, já vimos que dados 3 parâmetros V^j quaisquer, podemos visualizar a atuação da isometria correspondente, primeiro efetuando uma rotação que faça o mapeamento $(V^1, V^2, V^3) \mapsto (V, 0, 0)$ — com $V = \sqrt{(V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2}$ —, em seguida aplicando um *boost* na direção de \mathbf{e}_1^a e, por último, “desfazendo” a rotação inicial — vide item (b) do último **Exercício** da Subseção anterior. Então, mais

uma vez considerando que rotações já são bastante familiares, apenas precisamos investigar a atuação da isometria associada à matriz de *boost* $\Lambda_{B_1}(V)$ dada pela Eq. (2.39). Da Eq. (2.44), temos:

$$s^a(p; V) = [\Lambda_{B_1}(V)]^\mu_\nu s^\nu(p) \mathbf{e}_\mu^a.$$

Note que fixado um evento p qualquer e *variando-se* o valor de V no intervalo $-c < V < c$ — $V < 0$ é equivalente a $V > 0$ com a orientação de \mathbf{e}_1^a invertida —, $p(V) = \psi_o^{-1}(s^a(p; V))$ descreve (a imagem de) uma curva no espaço-tempo — chamada *órbita de p* por essas isometrias em questão. Essas órbitas fornecem uma visualização concreta da atuação dessas isometrias em \mathbb{M} . (Note que cada evento de \mathbb{M} pertence a uma, e apenas uma, órbita — entenda o porquê.) A **Fig. 2.18** representa as órbitas associadas aos *boosts* em relação a $o \in \mathbb{M}$, na direção de \mathbf{e}_1^a (suprimindo as direções \mathbf{e}_2^a e \mathbf{e}_3^a).

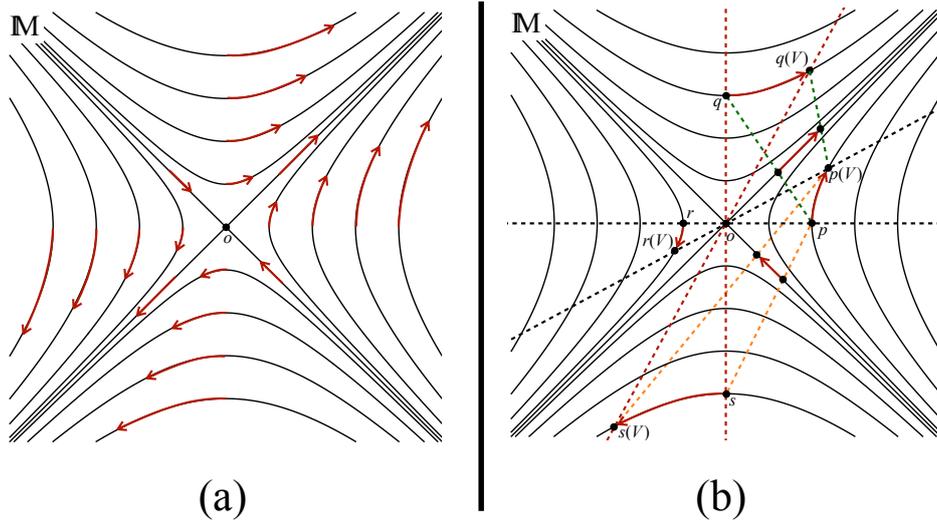


Figura 2.18: (a) Órbitas associadas aos *boosts* em relação a $o \in \mathbb{M}$. (b) Representação da ação do *boost* associado a $\Lambda_{B_1}(V)$ (para um V fixo) sobre alguns eventos e segmentos de retas (linhas tracejadas) em \mathbb{M} . Linhas tracejadas com a mesma cor são relacionadas por $\Lambda_{B_1}(V)$. Note que segmentos de retas são mapeados em segmentos de retas.

- ⑩ Seja $\iota_\vartheta : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ (com $\vartheta \in \mathbb{R}$) o *boost* associado a $\Lambda_{B_1}(c \tanh \vartheta)$ em relação a um evento $o \in \mathbb{M}$ e para uma dada escolha de $\{\mathbf{e}_\mu^a\}$.
- Mostre que $\iota_{\vartheta_1} \circ \iota_{\vartheta_2} = \iota_{\vartheta_1 + \vartheta_2}$;
 - Mostre que, como representado na **Fig. 2.18**, a órbita $p(\vartheta) := \iota_\vartheta(p)$ é uma hipérbole, uma semi-reta ou um ponto, dependendo da localização de p em relação a o ;
 - Seja $\psi_o(p) = s^a = s^\mu \mathbf{e}_\mu^a$. Mostre que se $|s^0| < |s^1|$, então $p(\vartheta)$ é uma linha-de-mundo uniformemente acelerada. Além disso, calcule o valor da aceleração própria em função de s^μ e a relação entre ϑ e o tempo-próprio ao longo dessa linha-de-mundo.