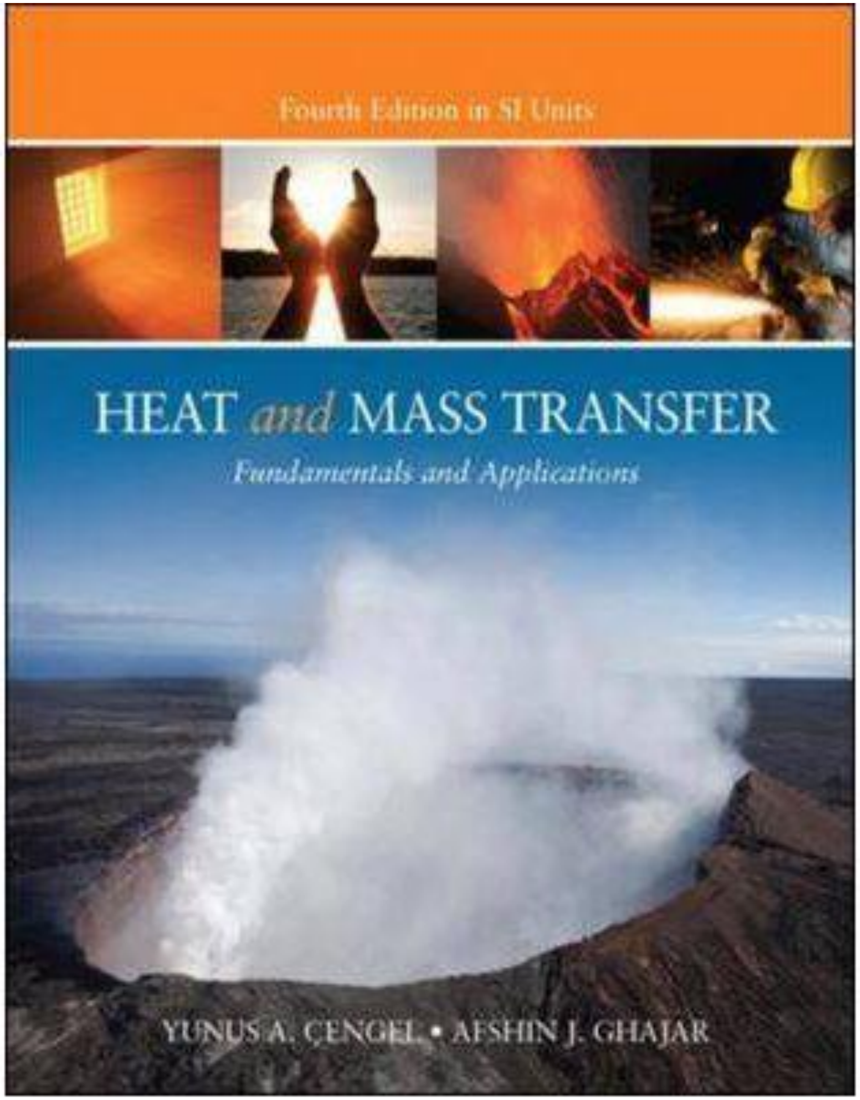
MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br



Heat and Mass Transfer (SI Unit)

By (author) Yunus A. Cengel , By (author) Afshin J. Ghajar

- The rate of heat conduction through a medium in a specified direction (say, in the *x*-direction) is expressed by **Fourier's law of heat conduction** for one-dimensional heat conduction as:

$$\dot{Q}_{\text{cond}} = -kA\frac{dT}{dx} \qquad \text{(W)}$$

Heat is conducted in the direction of decreasing temperature, and thus the temperature gradient is negative when heat is conducted in the positive *x* -direction.

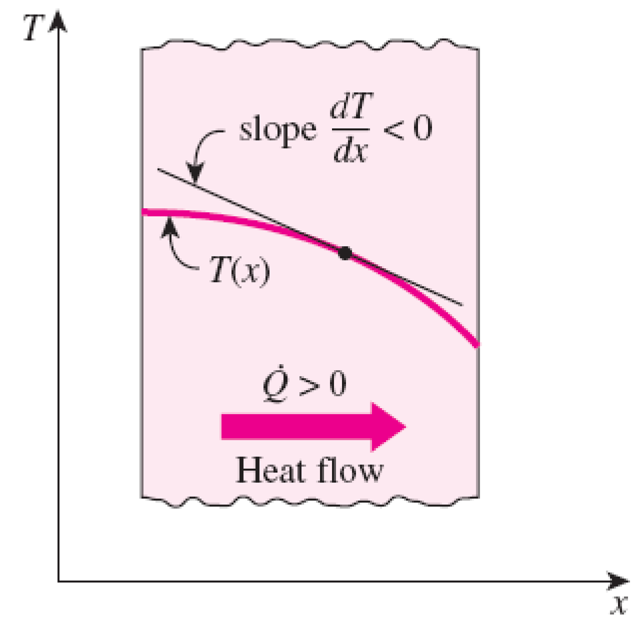


FIGURE 2–7

The temperature gradient dT/dx is simply the slope of the temperature curve on a T-x diagram.

- The heat flux vector at a point *P* on the surface of the figure must be perpendicular to the surface, and it must point in the direction of decreasing temperature
- If *n* is the normal of the isothermal surface at point *P*, the rate of heat conduction at that point can be expressed by Fourier's law as

$$\dot{Q}_n = -kA\frac{\partial T}{\partial n} \qquad \text{(W)}$$

$$\vec{\dot{Q}}_n = \dot{Q}_x \vec{i} + \dot{Q}_y \vec{j} + \dot{Q}_z \vec{k}$$

$$\dot{Q}_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x}, \qquad \dot{Q}_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y},$$

$$\dot{Q}_z = -kA_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

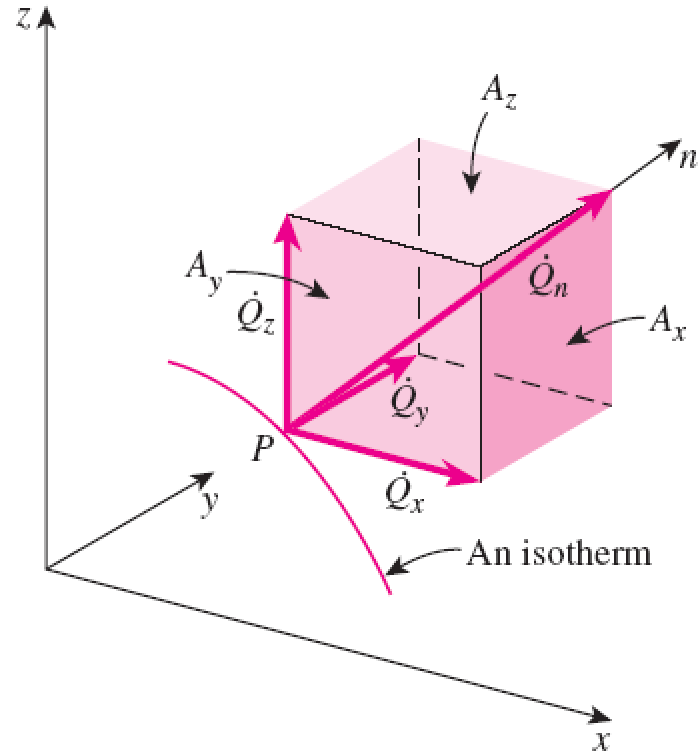


FIGURE 2–8
The heat transfer vector is always normal to an isothermal surface and can be resolved into its components like any other vector.

GENERAL HEAT CONDUCTION EQUATION

Rectangular Coordinates

$$\begin{pmatrix}\text{Rate of heat} \\ \text{conduction at} \\ x, y, \text{and } z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Rate of heat} \\ \text{conduction} \\ \text{at } x + \Delta x, \\ y + \Delta y, \text{and } z + \Delta z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Rate of heat} \\ \text{generation} \\ \text{inside the} \\ \text{element}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Rate of change} \\ \text{of the energy} \\ \text{content of} \\ \text{the element}\end{pmatrix}$$

or

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{E}_{\text{gen, element}} = \frac{\Delta E_{\text{element}}}{\Delta t} \qquad (2\text{–}36)$$

Noting that the volume of the element is $V_{\text{element}} = \Delta x \Delta y \Delta z$, the change in the energy content of the element and the rate of heat generation within the element can be expressed as

$$\Delta E_{\text{element}} = E_{t+\Delta t} - E_t = mc(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z (T_{t+\Delta t} - T_t)$$

$$\dot{E}_{\text{gen, element}} = \dot{e}_{\text{gen}} V_{\text{element}} = \dot{e}_{\text{gen}} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Substituting into Eq. 2–36, we get

$$\dot{Q}_x + \dot{Q}_y + \dot{Q}_z - \dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_{z+\Delta z} + \dot{e}_{\text{gen}} \Delta x \Delta y \Delta z = \rho c \Delta x \Delta y \Delta z \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t}$$

Dividing by $\Delta x \Delta y \Delta z$ gives

$$-\frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_y}{\Delta y} - \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\dot{Q}_{z+\Delta z} - \dot{Q}_z}{\Delta z} + \dot{e}_{\text{gen}} =$$

$$\rho c \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \qquad (2\text{–}37)$$

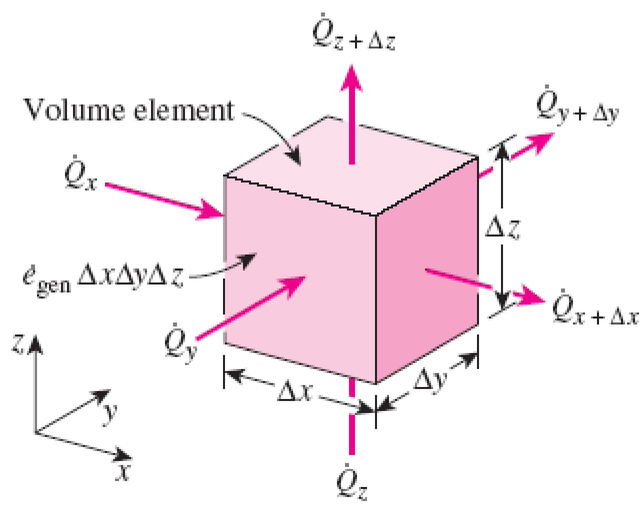


FIGURE 2–20

Three-dimensional heat conduction through a rectangular volume element.

Noting that the heat transfer areas of the element for heat conduction in the x, y, and z directions are $A_x = \Delta y \Delta z$, $A_y = \Delta x \Delta z$, and $A_z = \Delta x \Delta y$, respectively, and taking the limit as Δx, Δy, Δz and $\Delta t \rightarrow 0$ yields

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{e}_{\text{gen}} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \textbf{(2–38)}$$

since, from the definition of the derivative and Fourier's law of heat conduction,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta y \Delta z}\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{1}{\Delta y \Delta z}\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\Delta y \Delta z \frac{\partial T}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta z} \frac{\dot{Q}_{y+\Delta y} - \dot{Q}_y}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta x \Delta z}\frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{1}{\Delta x \Delta z}\frac{\partial}{\partial y}\left(-k\Delta x \Delta z \frac{\partial T}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \frac{\dot{Q}_{z+\Delta z} - \dot{Q}_z}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta x \Delta y}\frac{\partial Q_z}{\partial z} = \frac{1}{\Delta x \Delta y}\frac{\partial}{\partial z}\left(-k\Delta x \Delta y \frac{\partial T}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

Eq. 2–38 is the general heat conduction equation in rectangular coordinates. In the case of constant thermal conductivity, it reduces to

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{\text{gen}}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \textbf{(2–39)}$$

where the property $\alpha = k/\rho c$ is again the *thermal diffusivity* of the material. Eq. 2–39 is known as the **Fourier-Biot equation**, and it reduces to these forms under specified conditions:

(1) *Steady-state:*
(called the **Poisson equation**)

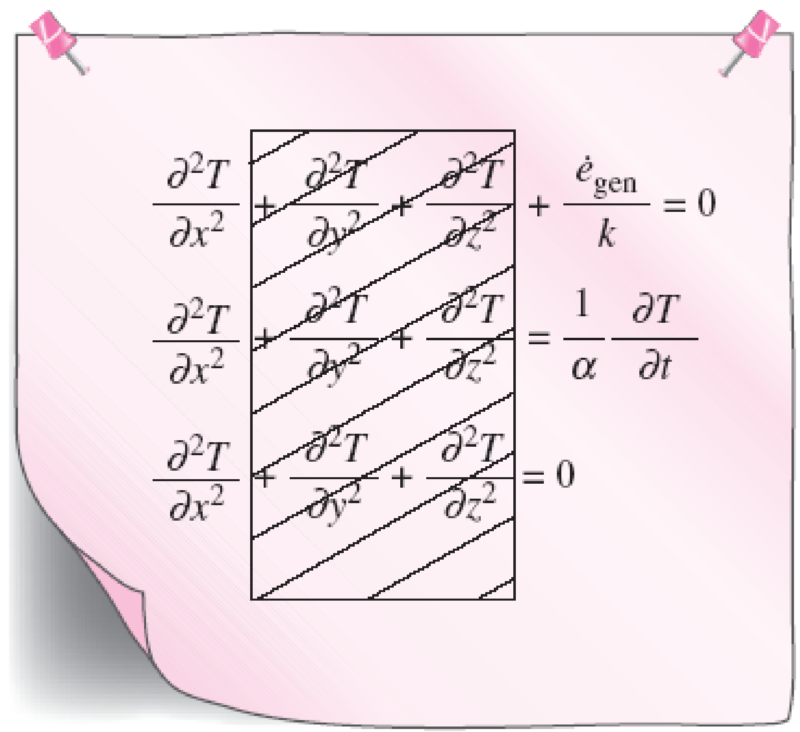
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{e}_{\text{gen}}}{k} = 0$$

(2) *Transient, no heat generation:*
(called the **diffusion equation**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

(3) *Steady-state, no heat generation:*
(called the **Laplace equation**)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$



The three-dimensional heat conduction equations reduce to the one-dimensional ones when the temperature varies in one dimension only.

Boundary Conditions

- Specified Temperature Boundary Condition
- Specified Heat Flux Boundary Condition
- Convection Boundary Condition
- Radiation Boundary Condition
- Interface Boundary Conditions
- Generalized Boundary Conditions

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução (Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

Julho 2011

5 Equação de Laplace Bidimensional **420**
5.1 Equação de Laplace num Retângulo . . . 420
5.1.1 Apenas $k(y)$ não Nula . . . 421
5.1.2 Apenas $h(y)$ não Nula . . . 428
5.1.3 Caso Geral . . . 434
Exercícios . . . 437
5.2 Equação de Laplace numa Faixa Semi-infinita . . . 440
Exercícios . . . 448
5.3 Equação de Laplace em Regiões Circulares . . . 449
Exercícios . . . 457
5.4 Respostas dos Exercícios . . . 467

Equação de Laplace Bidimensional

5.1 Equação de Laplace num Retângulo

Pode-se mostrar que o potencial elétrico, $u(x, y)$, numa região em que há ausência de cargas elétricas satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

chamada **equação de Laplace**. Também as soluções estacionárias da equação do calor em uma placa,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

assim como as soluções estacionárias da equação de uma membrana elástica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

satisfazem a equação de Laplace.

O problema de encontrar a solução da equação de Laplace numa região sendo conhecidos os seus valores na fronteira da região é chamado **problema de Dirichlet**.

Vamos considerar, agora, o seguinte problema de Dirichlet em um retângulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ u(x,b) = g(x),\ 0 < x < a \\ u(0,y) = h(y),\ u(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

A solução deste problema é a soma das soluções dos problemas com apenas uma das funções $f(x), g(x), h(y)$ e $k(y)$ não nulas (verifique!).

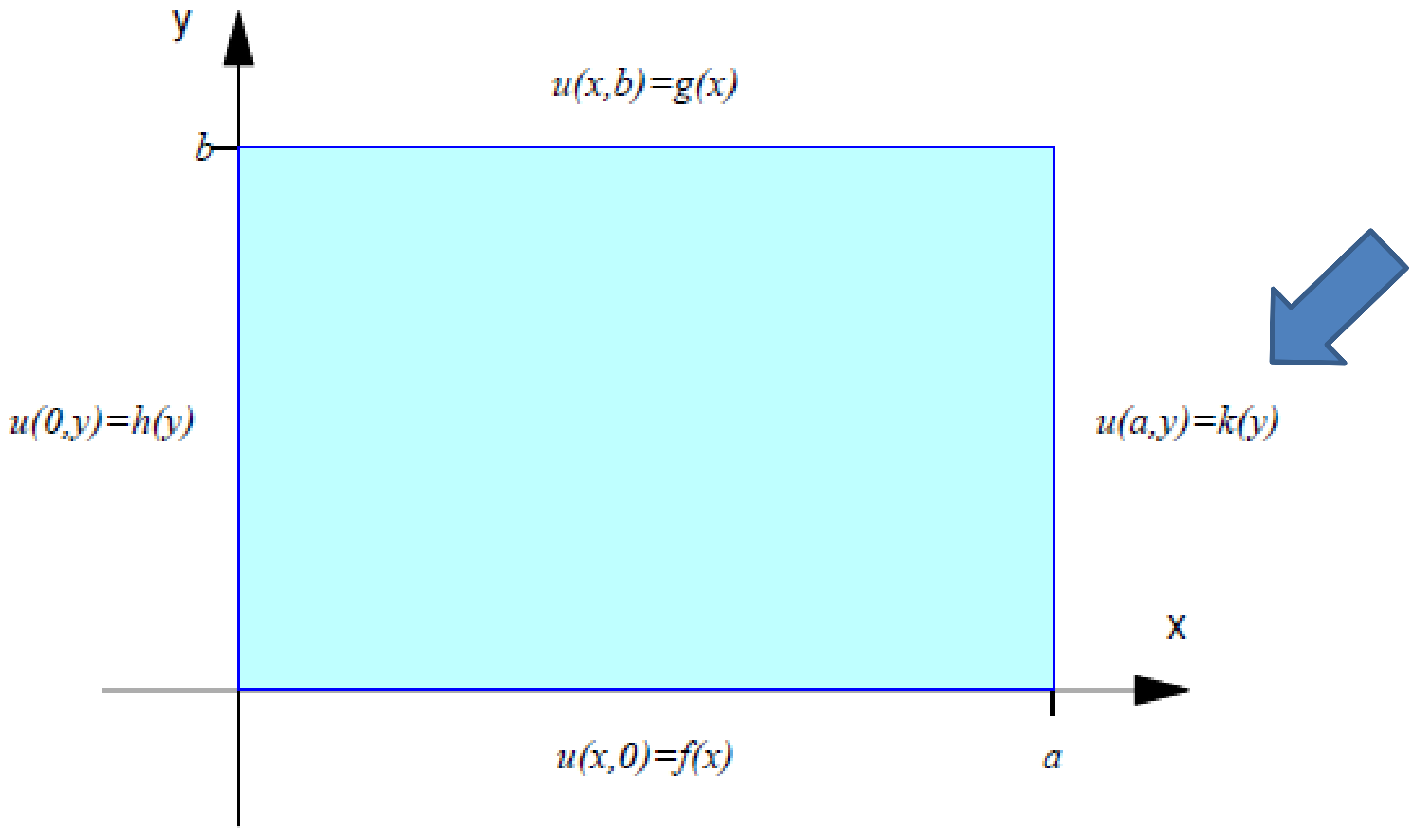


Figura 5.1 – Retângulo onde é resolvido o problema de Dirichlet

5.1.1 Apenas $k(y)$ não Nula

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ u(0,y) = 0,\ u(a,y) = k(y),\ 0 < y < b \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y).$$

Dividindo-se por $X(x)Y(y)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0 & (5.1) \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad Y(0) = 0,\ Y(b) = 0 & (5.2) \end{cases}$$

As condições $Y(0) = Y(b) = 0$ decorrem do fato de que

$0 = u(x,0) = X(x)Y(0)$ e $0 = u(x,b) = X(x)Y(b)$.

A condição $X(0) = 0$, decorre do fato de que

$0 = u(0,y) = X(0)Y(y)$.

Além disso

$$u(a,y) = X(a)Y(y) = k(y)$$

Essa condição será usada para definir os termos da série depois da forma da solução ser encontrada.

Iniciando com a equação diferencial em y, que tem as condições em ambos os contornos conhecidos e homogêneos.

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \qquad Y(0) = Y(b) = 0$$

A equação característica: $r^2 + \lambda = 0$

Logo, $r = \pm\sqrt{|\lambda|}i$

Sendo assim $Y(y) = C_1 \cos\sqrt{|\lambda|}y + C_2 \sin\sqrt{|\lambda|}y$

$$Y(0) = C_1 = 0$$

$$Y(b) = C_2 \sin\sqrt{|\lambda|}b = 0 \Rightarrow \sqrt{|\lambda|}b = n\pi \quad , n = 1,2,\ldots$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2} \Rightarrow Y_n = \sin\frac{n\pi y}{b}$$

Analisando agora a equação em X:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad X(0) = 0$$

A equação característica nesse caso é: $r^2 - \lambda = 0$

Logo, $r = \pm\sqrt{\lambda}$ mas como $\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{b^2}$ temos $r = \pm\dfrac{n\pi}{b}$

Portanto a solução tem a forma: $X(x) = C_1 e^{\frac{n\pi}{b}x} + C_2\, e^{-\frac{n\pi}{b}x}$

Substituindo a condição de contorno:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -C_1$$

Assim: $X(x) = C_1\left(e^{\frac{n\pi}{b}x} - e^{-\frac{n\pi}{b}x}\right)$

Reconhecemos a função hiperbólica: $X_n = \sinh\dfrac{n\pi}{b}x$

Vamos supor que a solução do problema de Dirichlet seja uma série da forma

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\operatorname{senh}\frac{n\pi x}{b}. \tag{5.3}$$

Para satisfazer a condição inicial $u(a,y)=k(y)$, precisamos ter

$$k(y)=u(a,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $k(y)$. Assim, pelo Corolário 2.5 na página 184, se a função $k:[0,b]\to\mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada $k'(y)$ também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b}=\frac{2}{b}\int_0^b k(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}dy,\ n=1,2,3\ldots \tag{5.4}$$

Os coeficientes da série de senos de k(y) definem os coeficientes da solução

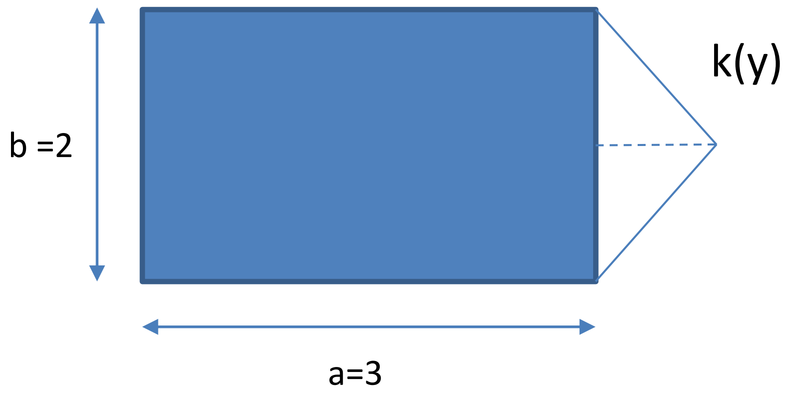
$$b_n=c_n\sinh\frac{n\pi a}{b}$$

Exemplo 5.1. Vamos considerar o problema de Dirichlet num retângulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = 0,\ u(3,y) = k(y),\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$k(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \le y \le 1 \\ 2 - y, & \text{se } 1 \le y \le 2 \end{cases}$$



A solução é então

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2}\operatorname{senh}\frac{n\pi x}{2}$$

em que $c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $k(y)$, ou seja, usando a tabela na página 202, multiplicando por 2 os valores obtemos:

$$\begin{aligned} c_n \operatorname{senh}\frac{3n\pi}{2} = &= \int_0^2 k(y)\operatorname{sen}(\frac{n\pi y}{2})dy \\ &= 2\left(b_n(f^{(1)}_{0,1/2}) + 2b_n(f^{(0)}_{1/2,1}) - b_n(f^{(1)}_{1/2,1})\right) \\ &= \frac{8\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2},\ n=1,2,3\ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{8\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2\operatorname{senh}\frac{3n\pi}{2}},\ n=1,2,3\ldots$$

Entretanto coeficientes de índice par são nulos:

$$c_{2k}=0$$

$$c_{2k+1}=\frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2\operatorname{senh}\frac{3(2k+1)\pi}{2}}.$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n^2\operatorname{senh}\frac{3n\pi}{2}}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2}\operatorname{senh}\frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2\operatorname{senh}\frac{3(2n+1)\pi}{2}}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi y}{2}\operatorname{senh}\frac{(2n+1)\pi x}{2} \end{aligned}$$

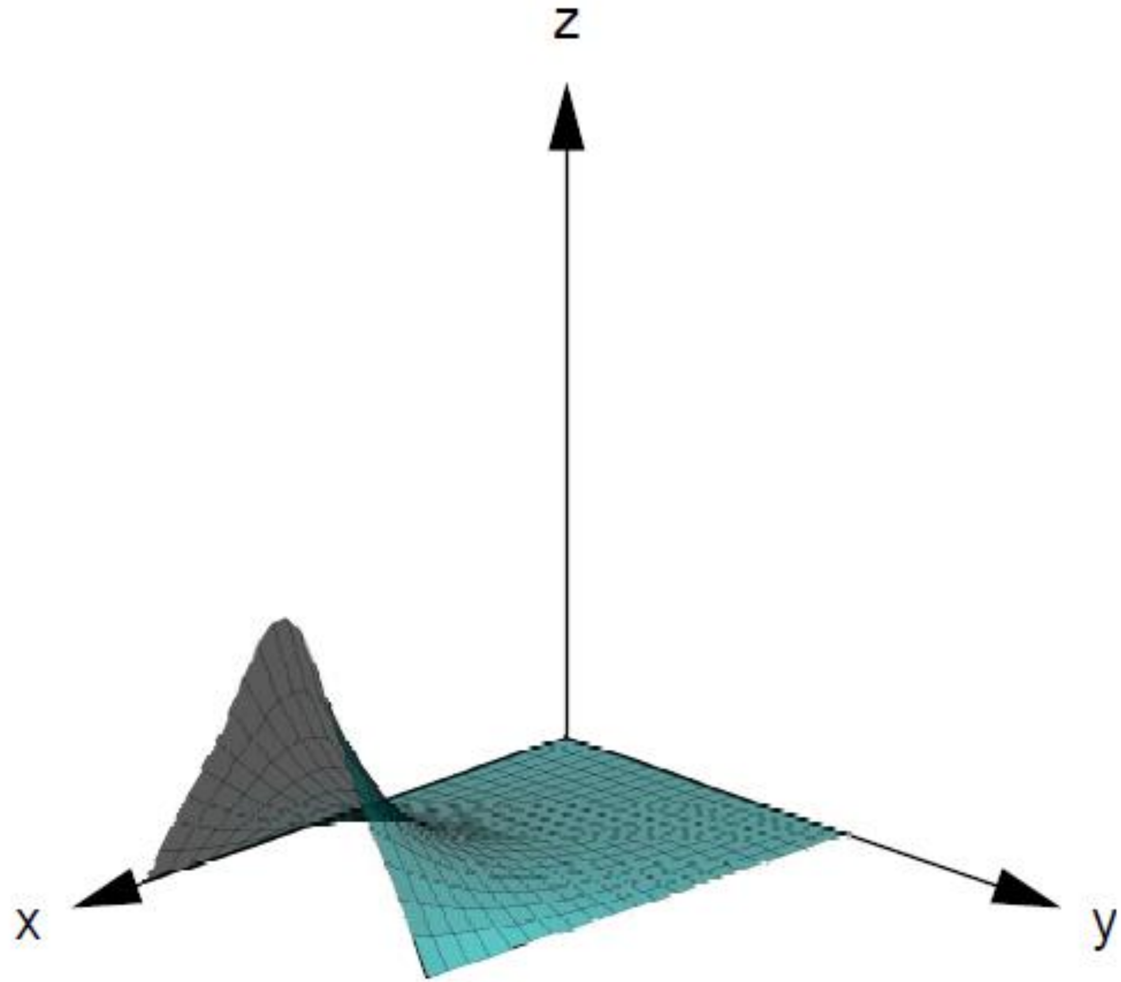


Figura 5.2 – Solução do problema de Dirichlet do Exemplo 5.1 tomando apenas 3 termos não nulos da série

5.1.2 Apenas $h(y)$ não Nula

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,b) = 0,\ 0 < x < a \\ u(0,y) = h(y),\ u(a,y) = 0,\ 0 < y < b \end{cases}$$

Vamos procurar uma solução na forma de um produto de uma função de x por uma função de y, ou seja,

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

Derivando e substituindo-se na equação obtemos

$$X''(x)Y(y) = -X(x)Y''(y).$$

Dividindo-se por $X(x)Y(y)$ obtemos

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

O primeiro membro depende apenas de x, enquanto o segundo depende apenas de y. Isto só é possível se eles forem iguais a uma constante

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Obtemos então duas equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad X(a) = 0 & (5.5) \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad Y(0) = 0,\ Y(b) = 0 & (5.6) \end{cases}$$

As condições $Y(0) = Y(b) = 0$ decorrem do fato de que
$0 = u(x,0) = X(x)Y(0)$ e $0 = u(x,b) = X(x)Y(b)$.

A condição $X(a) = 0$, decorre do fato de que
$0 = u(a,y) = X(a)Y(y)$.

Além disso

$$u(0,y) = X(0)Y(y) = h(y)$$

A equação (5.6) com as condições de fronteira foi resolvida no problema do calor em uma barra com condições homogêneas - equação (3.1) na página 278 - e tem solução não identicamente nula somente se

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

e a solução é da forma

$$Y(y) = c_1 \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo-se $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$ na primeira equação diferencial obtemos

$$X''(x) - \frac{n^2\pi^2}{b^2} X(x) = 0.$$

Esta equação tem solução geral

$$X(x) = \hat{c}_1 e^{-\frac{n\pi}{b}x} + \hat{c}_2 e^{\frac{n\pi}{b}x}.$$

Mas podemos escrever a solução geral na forma

$$X(x) = c_1 e^{\frac{n\pi}{b}a} e^{-\frac{n\pi}{b}x} + c_2 e^{-\frac{n\pi}{b}a} e^{\frac{n\pi}{b}x} = c_1 e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)} + c_2 e^{\frac{n\pi}{b}(x-a)}.$$

que com a condição $X(a) = 0$ tem solução (verifique!)

$$X(x) = c_2(e^{\frac{n\pi}{b}(x-a)} - e^{-\frac{n\pi}{b}(x-a)}) = \tilde{c}_2 \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(x-a)).$$

Logo o problema formado pela equação de Laplace e as condições de fronteira $u(x,0) = u(x,b) = 0$, para $0 < x < a$ e $u(a,y) = 0$, para $0 < y < b$, tem soluções fundamentais

$$u_n(x,y) = X(x)Y(y) = \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(x-a))$$

Vamos supor que a solução do problema de Dirichlet seja uma série da forma

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{b}(x-a)).$$

Para satisfazer a condição inicial $u(0,y) = h(y)$, precisamos ter

$$h(y) = u(0,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \right] \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

Esta é a série de Fourier de senos de $h(y)$. Assim, pelo Corolário 2.5 na página 184, se a função $h : [0, b] \to \mathbb{R}$ é contínua por partes tal que a sua derivada h' também seja contínua por partes, então os coeficientes da série são dados por

$$-c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Podemos evitar o sinal negativo se escrevemos

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{b}(a - x)\right) \tag{5.7}$$

e neste caso

$$c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b h(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy, \; n = 1, 2, 3 \ldots \tag{5.8}$$

Os coeficientes da série de senos de h(y) definem os coeficientes da solução

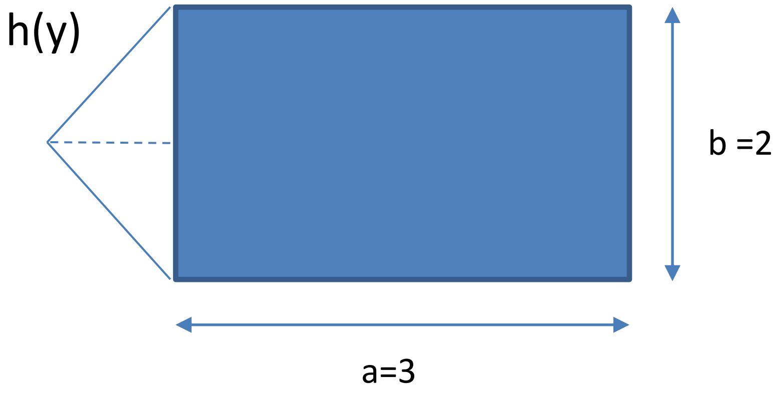
$$b_n = c_n \sinh \frac{n\pi a}{b}$$

Exemplo 5.2. Vamos considerar o problema de Dirichlet num retângulo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u(x,2) = 0,\ 0 < x < 3 \\ u(0,y) = h(y),\ u(3,y) = 0,\ 0 < y < 2 \end{cases}$$

com

$$h(y) = \begin{cases} y, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 2 - y, & \text{se } 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$



A solução é então

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh}(\frac{n\pi}{2}(3-x))$$

em que $c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2})$ são os coeficientes da série de senos de $h(y)$, que são os mesmos da função $k(y)$ do Exemplo 5.1 na página 427, ou seja,

$$\begin{aligned} c_n \operatorname{senh}(\frac{3n\pi}{2}) &= \int_0^2 h(y) \operatorname{sen}(\frac{n\pi y}{2}) dy \\ &= \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}, \; n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2 \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}}, \; n = 1, 2, 3 \ldots$$

Ou ainda,

$$c_{2k} = 0$$

$$c_{2k+1} = \frac{8(-1)^k}{(2k+1)^2\pi^2 \operatorname{senh} \frac{3(2k+1)\pi}{2}}.$$

Portanto a solução é dada por

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}}{n^2 \operatorname{senh} \frac{3n\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{2} \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 \operatorname{senh} \frac{3(2n+1)\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi y}{2} \operatorname{senh} \frac{(2n+1)\pi(3-x)}{2} \end{aligned}$$

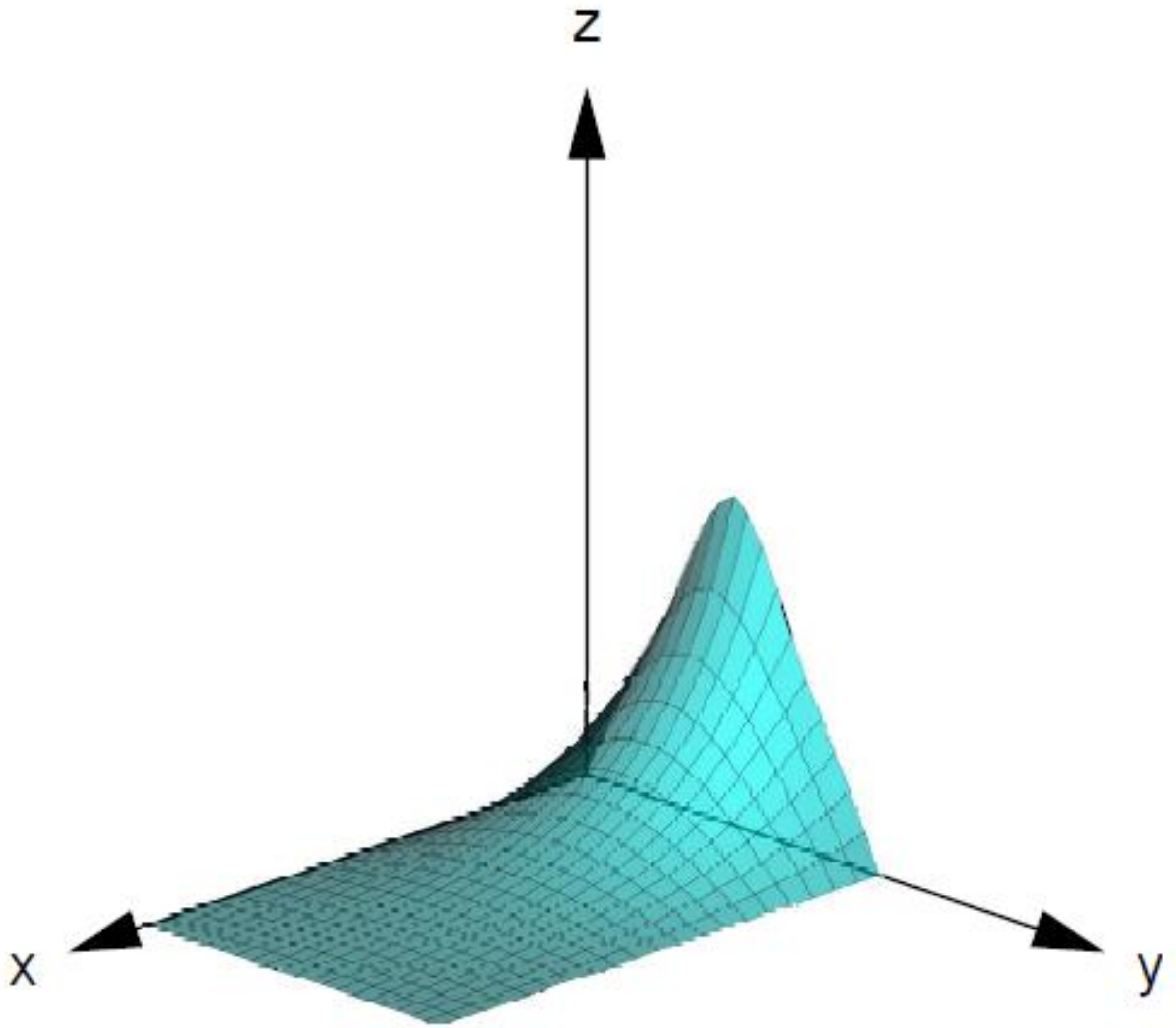


Figura 5.3 – Solução do problema de Dirichlet do Exemplo 5.2 tomando apenas 3 termos não nulos da série

MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2020

Roteiro do curso

- **Introdução**
- **Séries de Fourier**
- Método de Diferenças Finitas
- Equação do calor transiente (parabólica)
- **Equação de Poisson (elíptica)**
- Equação da onda (hiperbólica)