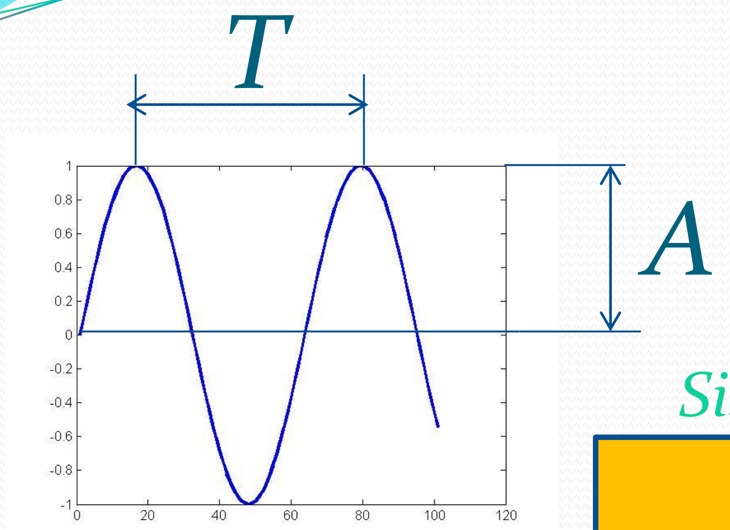
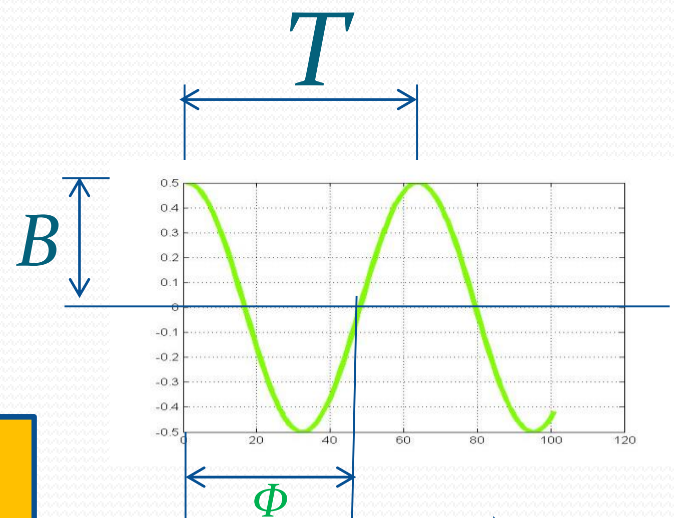
Resposta em frequência

- Introdução
- Sistemas lineares
- Função de Transferência senoidal
- Resposta em frequência
- Gráficos de Bode
- Fatores básicos e suas aproximações assintóticas
    - Constantes
    - Derivativos e integrativos
    - 1ª Ordem
    - 2ª Ordem
    - Composição de fatores

Introdução: Fundamentos





Sistema Estável

g(t)

$x(t) = A\,sen\,\omega t$

$y(t) = B\,sen(\omega t + \Phi)$

FT

G(s)

$$X(s) = A\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

Y(s)

Introdução: Fundamentos

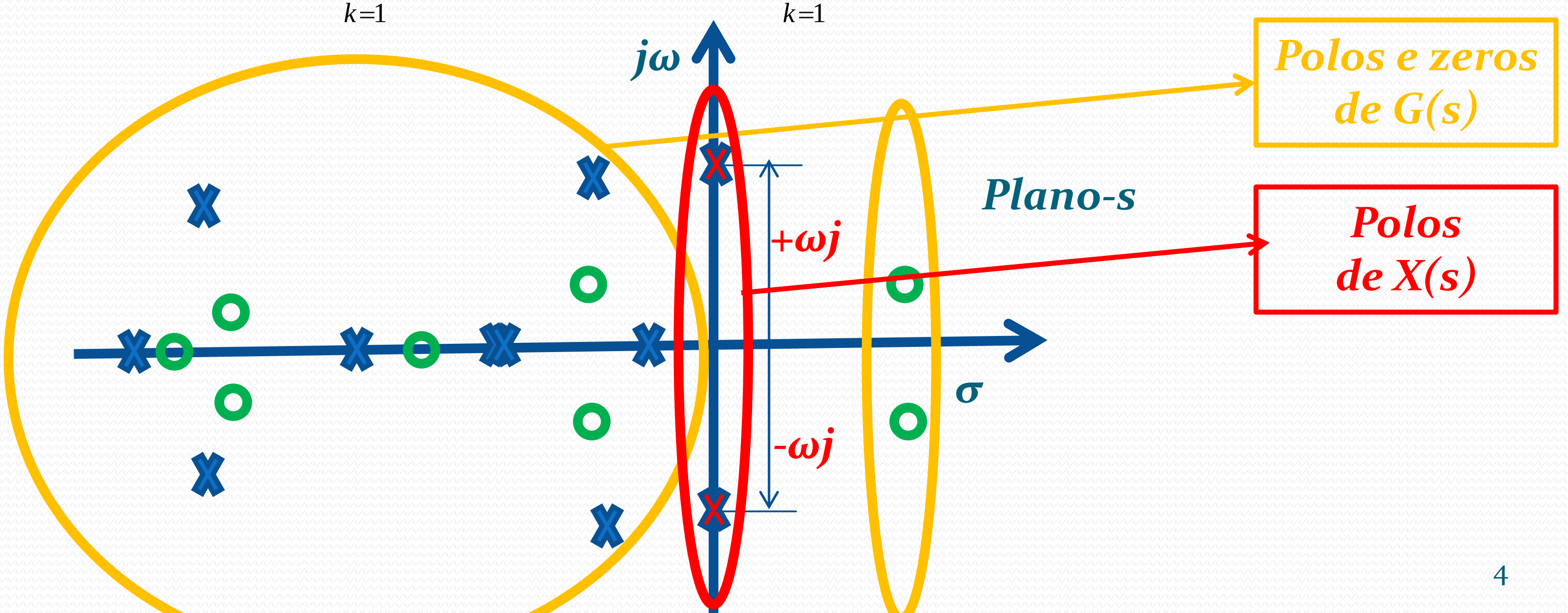
- *Resposta em frequência* significa a resposta de um sistema dinâmico sujeito a uma *entrada harmônica* em *Regime Permanente (RP)*.
- Se o *sistema é linear*, uma entrada senoidal, por exemplo, determinará uma saída também senoidal de *mesma frequência do sinal de entrada,* geralmente com amplitude diferente e com uma certa defasagem.
- Em geral, a amplitude de saída e a defasagem são função da frequência.
- Fazendo uma varredura numa faixa de frequência podemos construir os gráficos de resposta em frequência relacionando a frequência com a amplitude de resposta e a defasagem da resposta.

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

Seja $G(s)$ *estável* e *racional* :

$$G(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s+p_k)} \rightarrow \textit{estável} \Rightarrow n \textit{ polos com parte real negativa}$$

$$\therefore Y(s) = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s+p_k)}\frac{A\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{k=1}^{n}(s+p_k)}\frac{A\omega}{(s+\omega j)(s-\omega j)} \quad (a)$$



Separando (a) em frações parciais:

$$Y(s)=\frac{a}{s+j\omega}+\frac{b}{s-j\omega}+\frac{r_1}{s+p_1}+\frac{r_2}{s+p_2}+\cdots\frac{r_n}{s+p_n}$$

Aplicando a transformada inversa:

$$y(t)=ae^{-j\omega t}+be^{j\omega t}+r_1e^{-p_1t}+\cdots\cdots\cdots+r_ne^{-p_nt}$$

$$t\to\infty$$

$$y(t)=ae^{-j\omega t}+be^{j\omega t}$$

Função de transferência senoidal

Cálculo de a e b por frações parciais:

$$a=G(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}(s+j\omega)\bigg|_{s=-j\omega}=G(-j\omega)\frac{A\omega}{(-j\omega-j\omega)}=-\frac{AG(-j\omega)}{2j}$$

$$b=G(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}(s-j\omega)\bigg|_{s=+j\omega}=\frac{AG(j\omega)}{2j}$$

$$y(t)=\frac{AG(j\omega)}{2j}\left(e^{j\omega t}\right)-\frac{AG(-j\omega)}{2j}\left(e^{-j\omega t}\right)$$

e como $G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{(j\Phi)}$

$G(-\omega j)=|G(\omega j)|e^{-j\phi}$

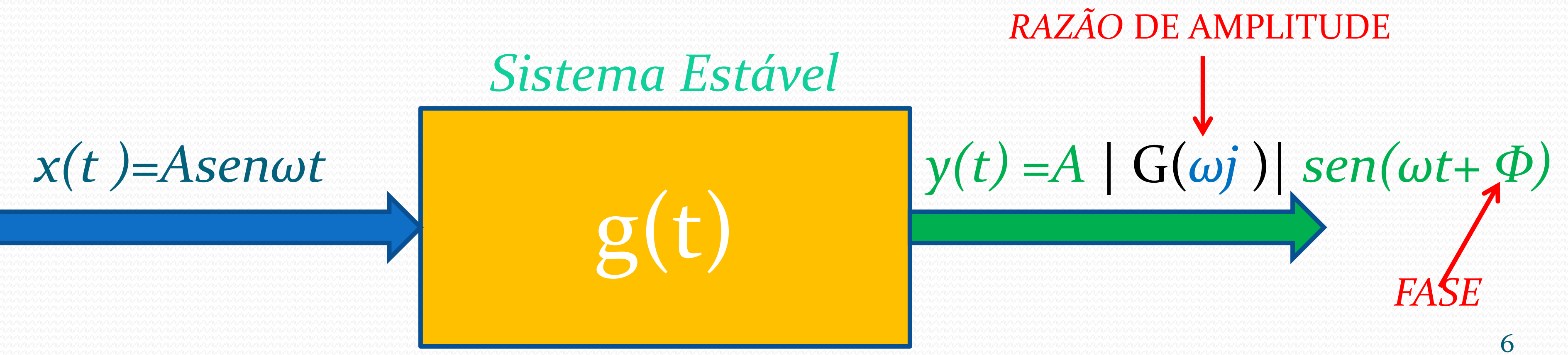
$$y(t)=A|G(j\omega)|\left(\frac{e^{j(\Phi+\omega t)}-e^{-j(\Phi+\omega t)t}}{2j}\right)=A|G(j\omega)|sen(\omega t+\Phi)$$

- A função de transferência senoidal de qualquer sistema é obtida substituindo-se a variável *s* por *ωj* na função de transferência:

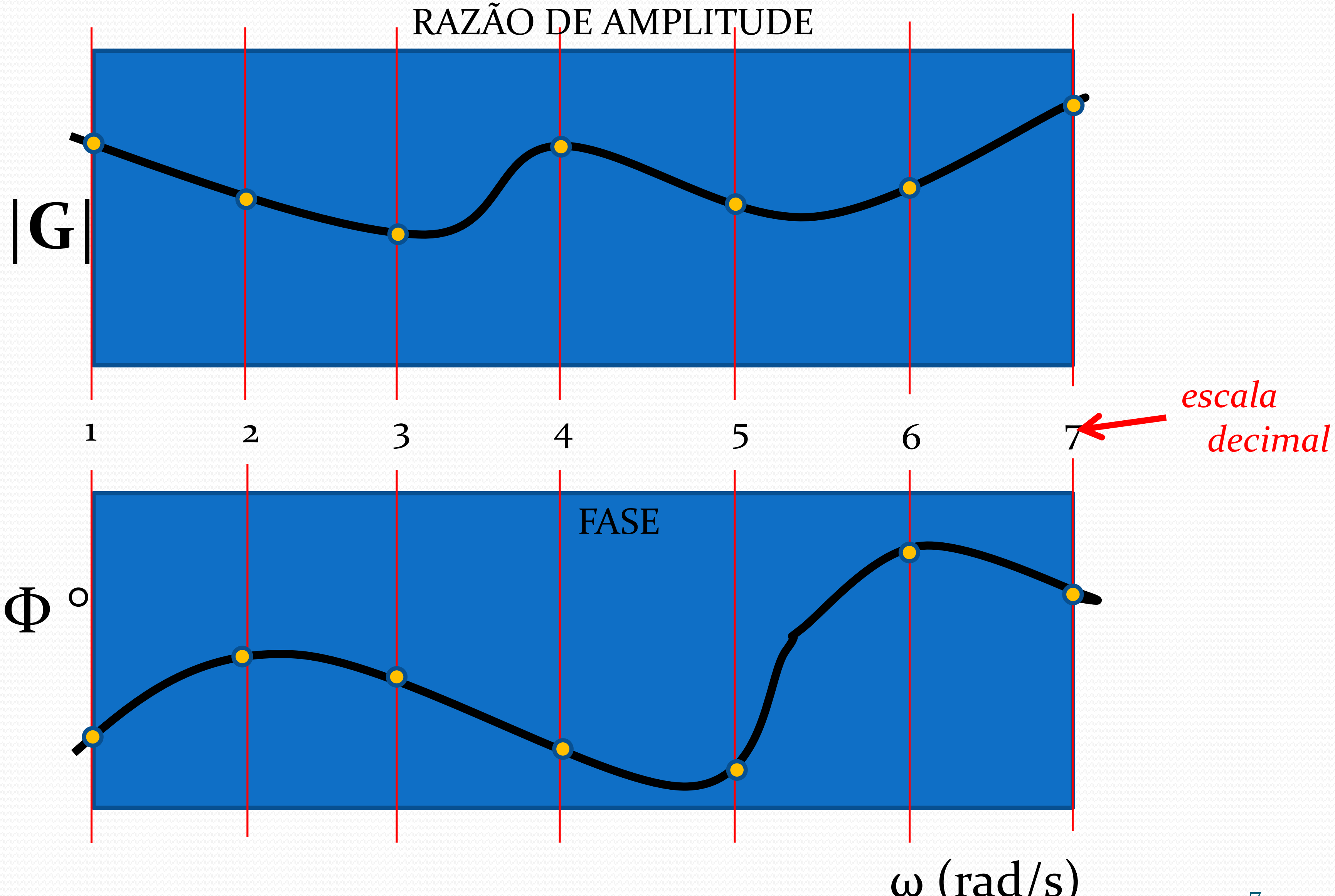
$$G(\omega j) = |G(\omega j)|e^{j\phi(\omega)} = Re\,G(\omega j) + j\,Im(G(\omega j))$$

O que significa avaliar G(s) apenas sobre o eixo das ordenadas no plano complexo-s.

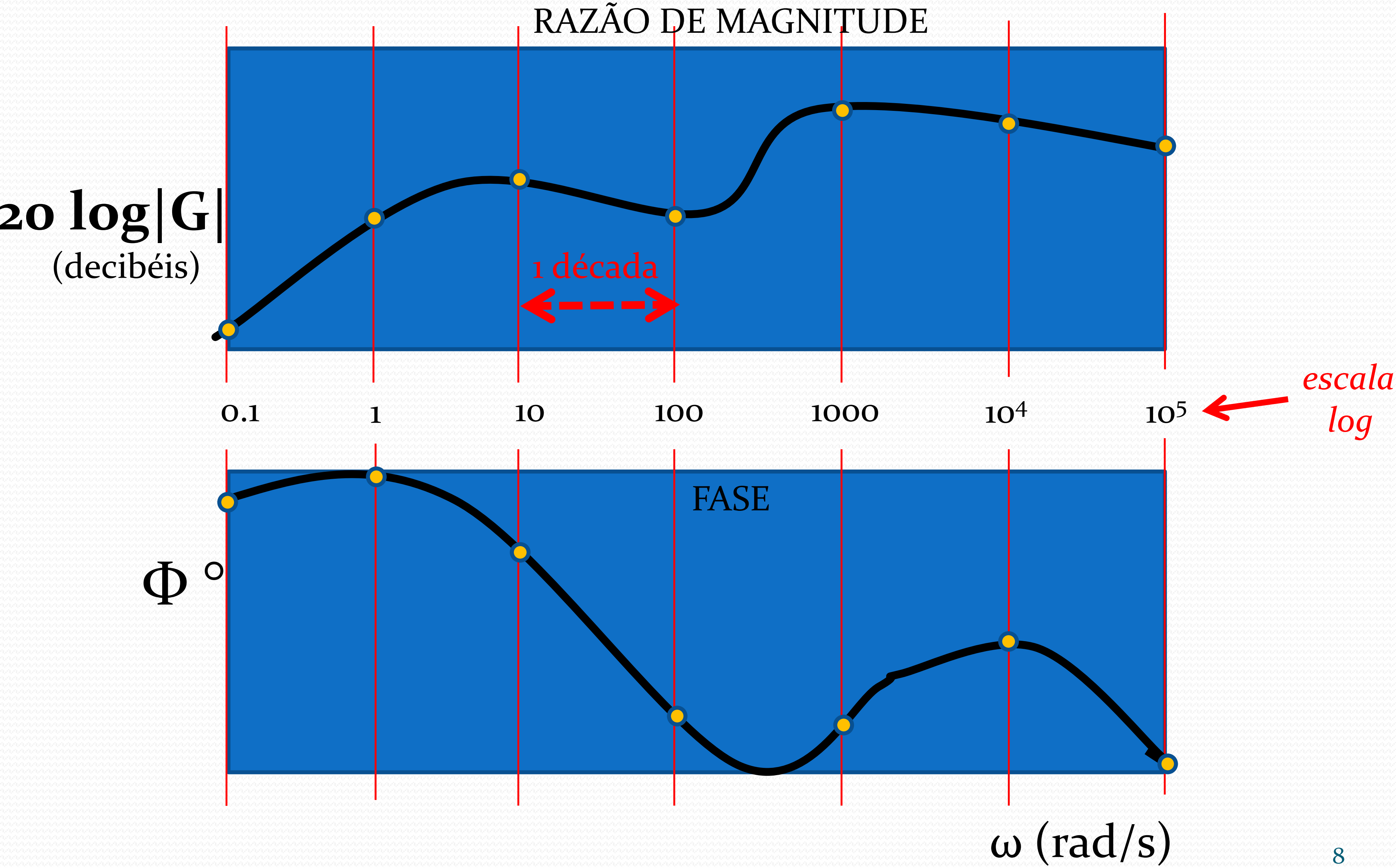
$$\left.\begin{array}{l} |G(j\omega)| = \sqrt{[\mathrm{Re}(G(j\omega))]^2 + [\mathrm{Im}(G(j\omega))]^2} \\ \Phi(\omega) = \tan^{-1}\dfrac{[\mathrm{Im}(G(j\omega))]}{[\mathrm{Re}(G(j\omega))]} \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{funções}\text{ da frequência}$$



Diagramas de Resposta em frequência



Diagramas de Bode



FT senoidal na forma de Bode:

Função de transferência com polos e zeros reais:

$$Seja:$$

$$G_1(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} \rightarrow FT \text{ senoidal} \rightarrow$$

$$\rightarrow G_1(j\omega) = \frac{K(j\omega+z_1)(j\omega+z_2)}{(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)(j\omega+p_3)}$$

$$\text{Forma de Bode}:$$

$$G_1(j\omega) = \frac{Kz_1\left(j\,\omega/z_1+1\right)z_2\left(j\,\omega/z_2+1\right)}{p_1\left(j\,\omega/p_1+1\right)p_2\left(j\,\omega/p_2+1\right)p_3\left(j\,\omega/p_3+1\right)}$$

FT senoidal na forma de Bode:

Função de transferência com polos e zeros reais:

$$G_1(j\omega)=\frac{Kz_1z_2\left(j\,\omega/_{z_1}+1\right)\left(j\,\omega/_{z_2}+1\right)}{p_1p_2p_3\left(j\,\omega/_{p_1}+1\right)\left(j\,\omega/_{p_2}+1\right)\left(j\,\omega/_{p_3}+1\right)}$$

$$Seja: K_B=\frac{Kz_1z_2}{p_1p_2p_3}\rightarrow cte\ \text{de Bode.}$$

$$G_1(j\omega)=\frac{K_B\left(j\,\omega/_{z_1}+1\right)\left(j\,\omega/_{z_2}+1\right)}{\left(j\,\omega/_{p_1}+1\right)\left(j\,\omega/_{p_2}+1\right)\left(j\,\omega/_{p_3}+1\right)}$$

FT senoidal na forma de Bode:

Função com par de polos (ou zeros) complexos conjugados:

→ $Polos:$

$$G_2(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1}$$

FT senoidal na Forma de Bode:

$$G_2(j\omega) = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j\right]}$$

→ $Zeros:$

$$G_3(j\omega) = \frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j\right]}{1}$$

FT senoidal na forma de Bode:

Função de transferência genérica:

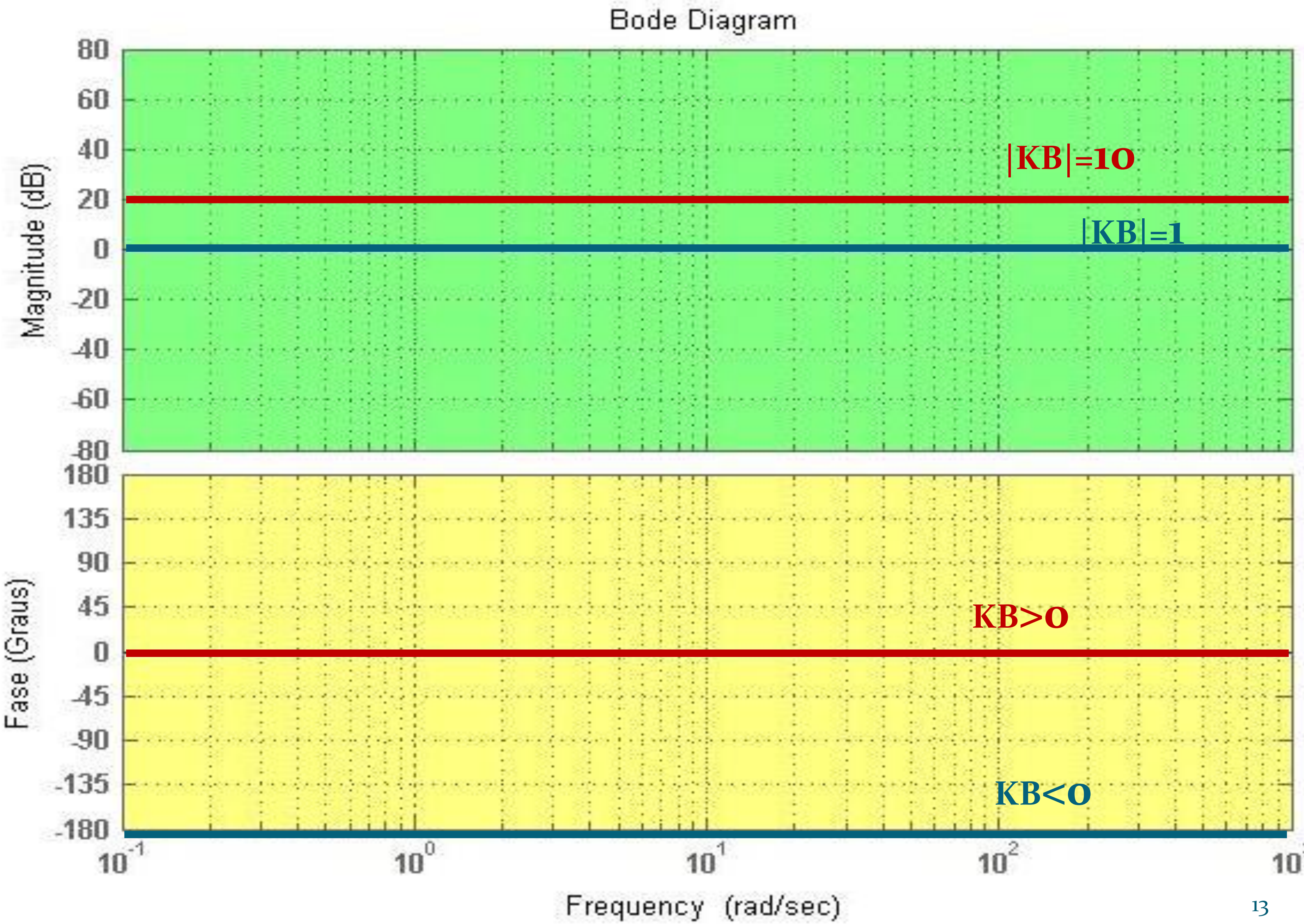
$$G(j\omega) = \frac{K_B \prod_{i=1}^{r}\left(1 + {}^{j\omega}\!/_{z_i}\right)}{(j\omega)^{\pm m} \prod_{p=1}^{q}\left(1 + {}^{j\omega}\!/_{p_p}\right) \prod_{k=1}^{n}\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n_k}}\right)^2 + 2\zeta \frac{\omega j}{\omega_{n_k}}\right]^{\pm 1}}$$

$$obs: m \in \mathcal{N}; \mathcal{N} = 0, 1, 2, 3...$$

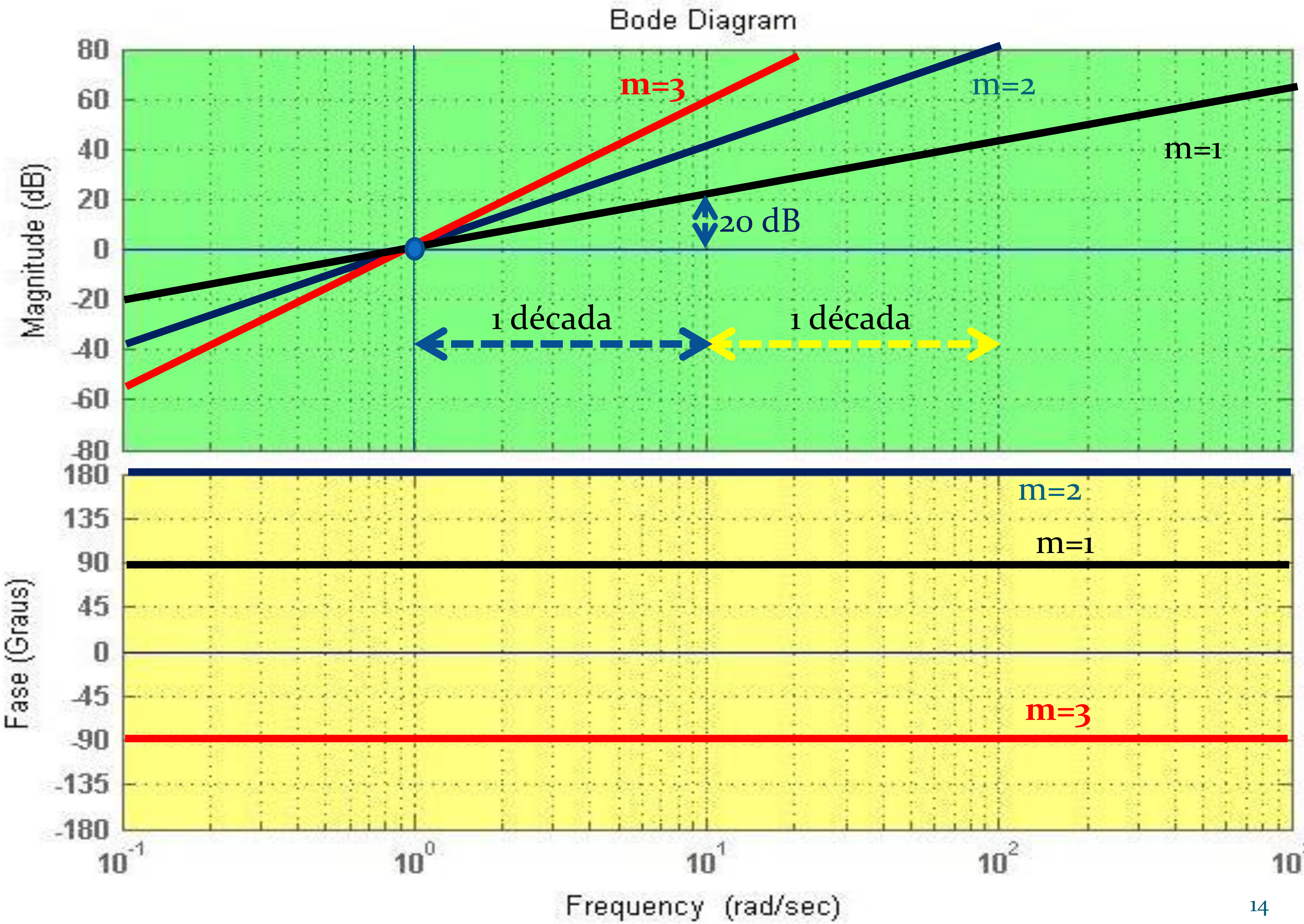
$$K_B \equiv ganho\ \text{de}\ Bode = K \frac{\prod_{i=1}^{r}|z_i|}{\prod_{p=1}^{q}|p_p|} \in \Re$$

Obs: em geral não se tem polos ou zeros complexos repetidos.

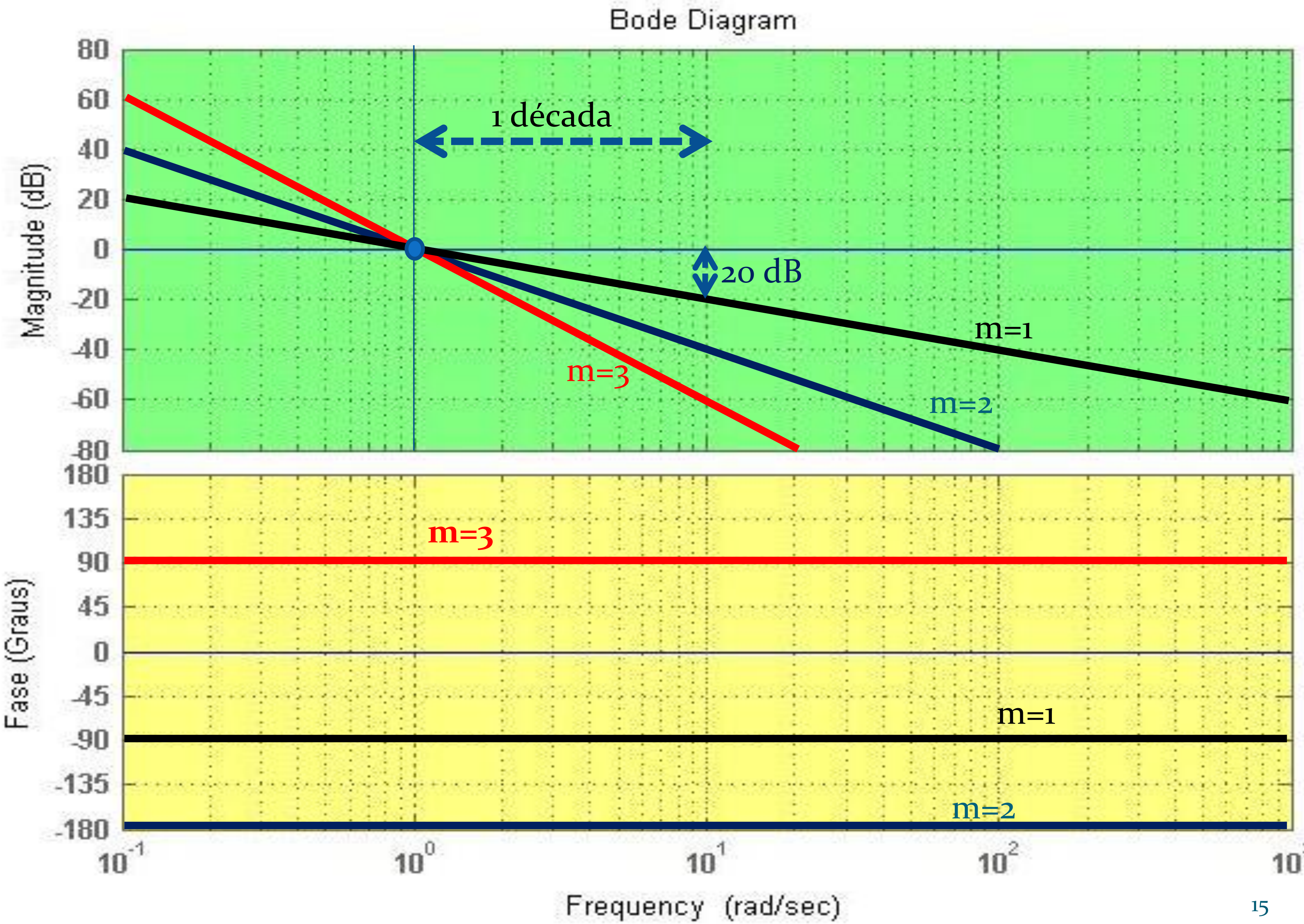
Assíntotas: fator constante (ganho): K_B



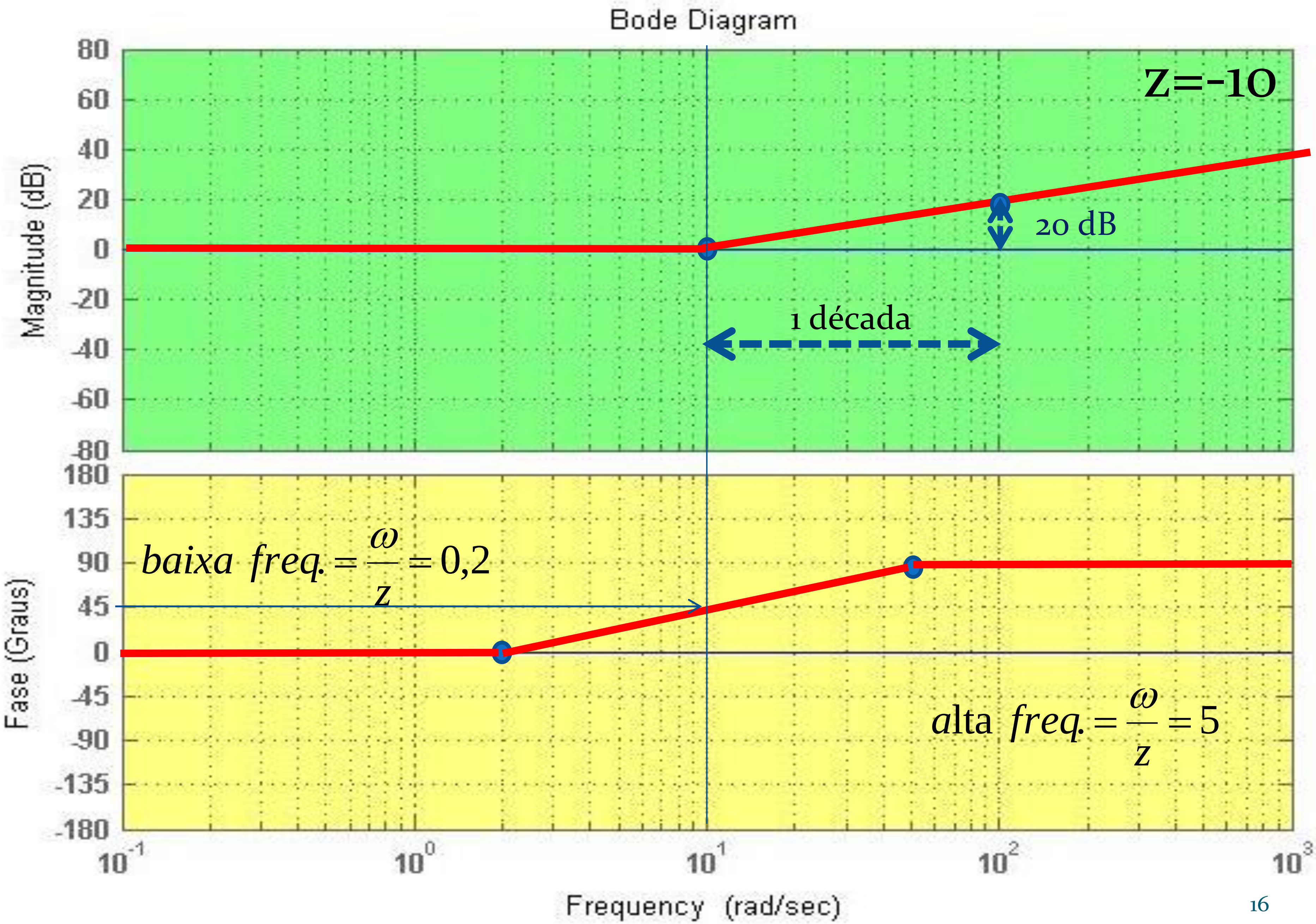
Fatores derivativos: $(j\omega)^{-m} \rightarrow s^m$ no numerador



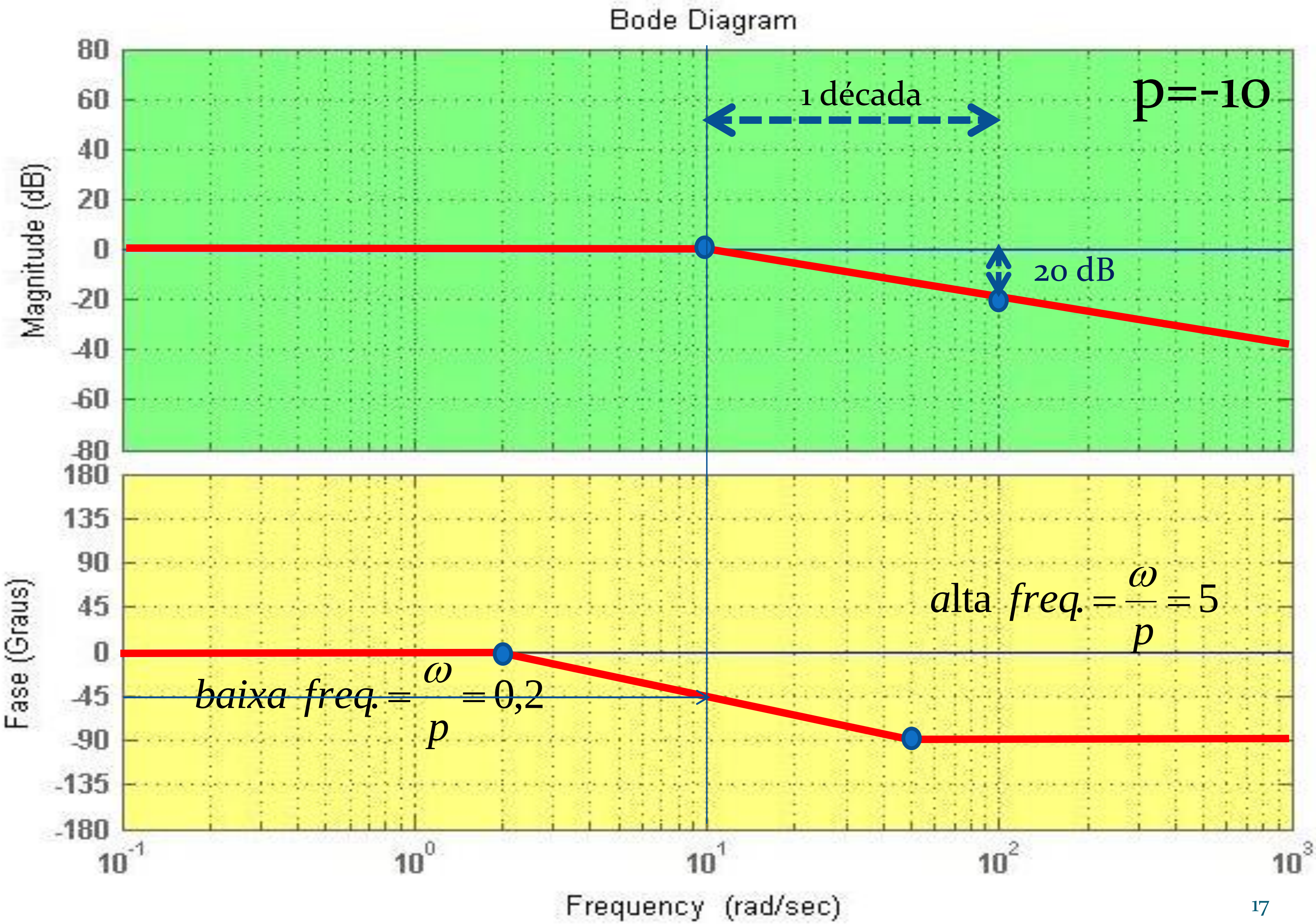
Fatores integrativos: $(j\omega)^{+m} \rightarrow s^m$ *no denominador*



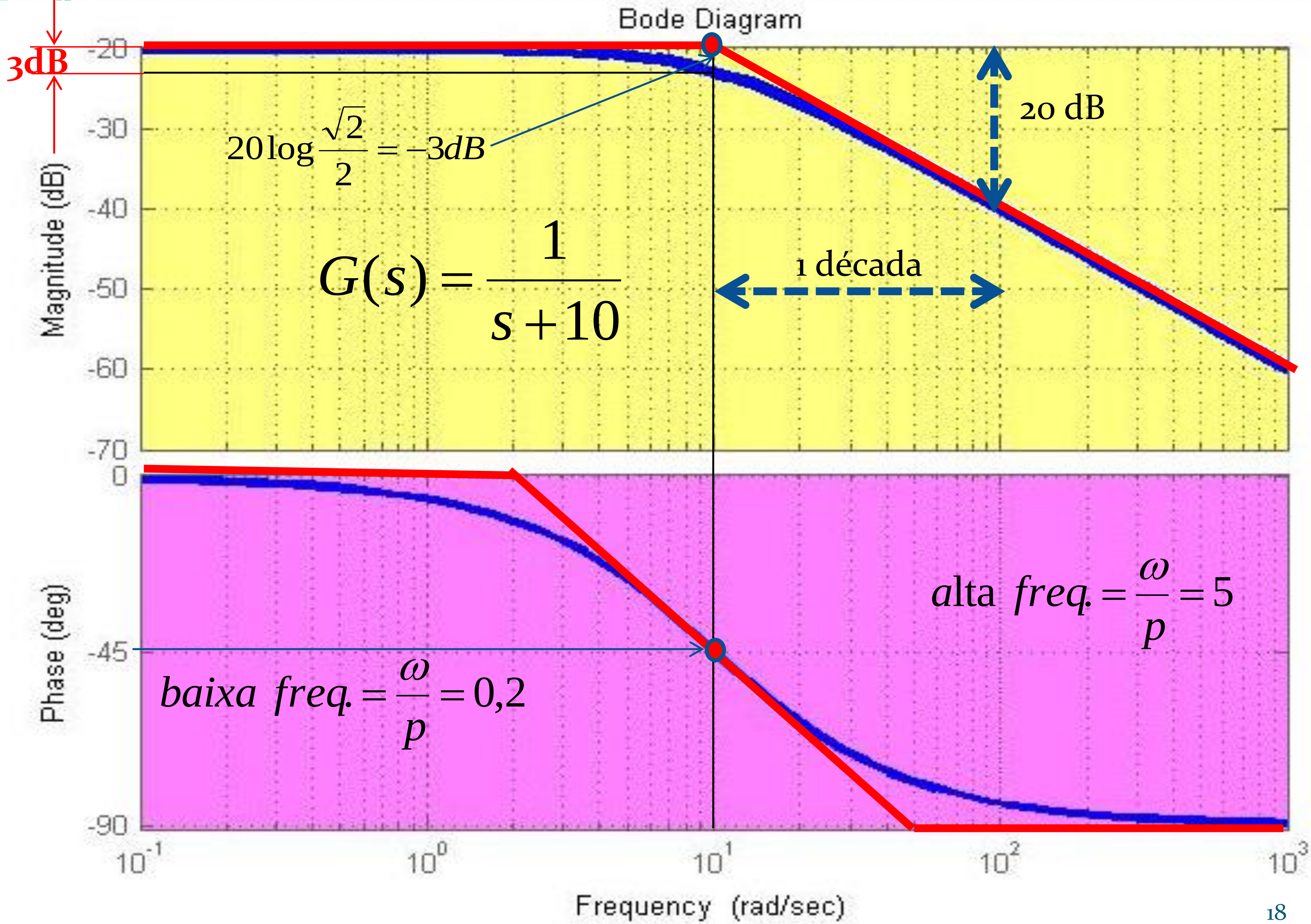
Fatores de 1ª Ordem: $(1+j\omega/z) \rightarrow$ no numerador



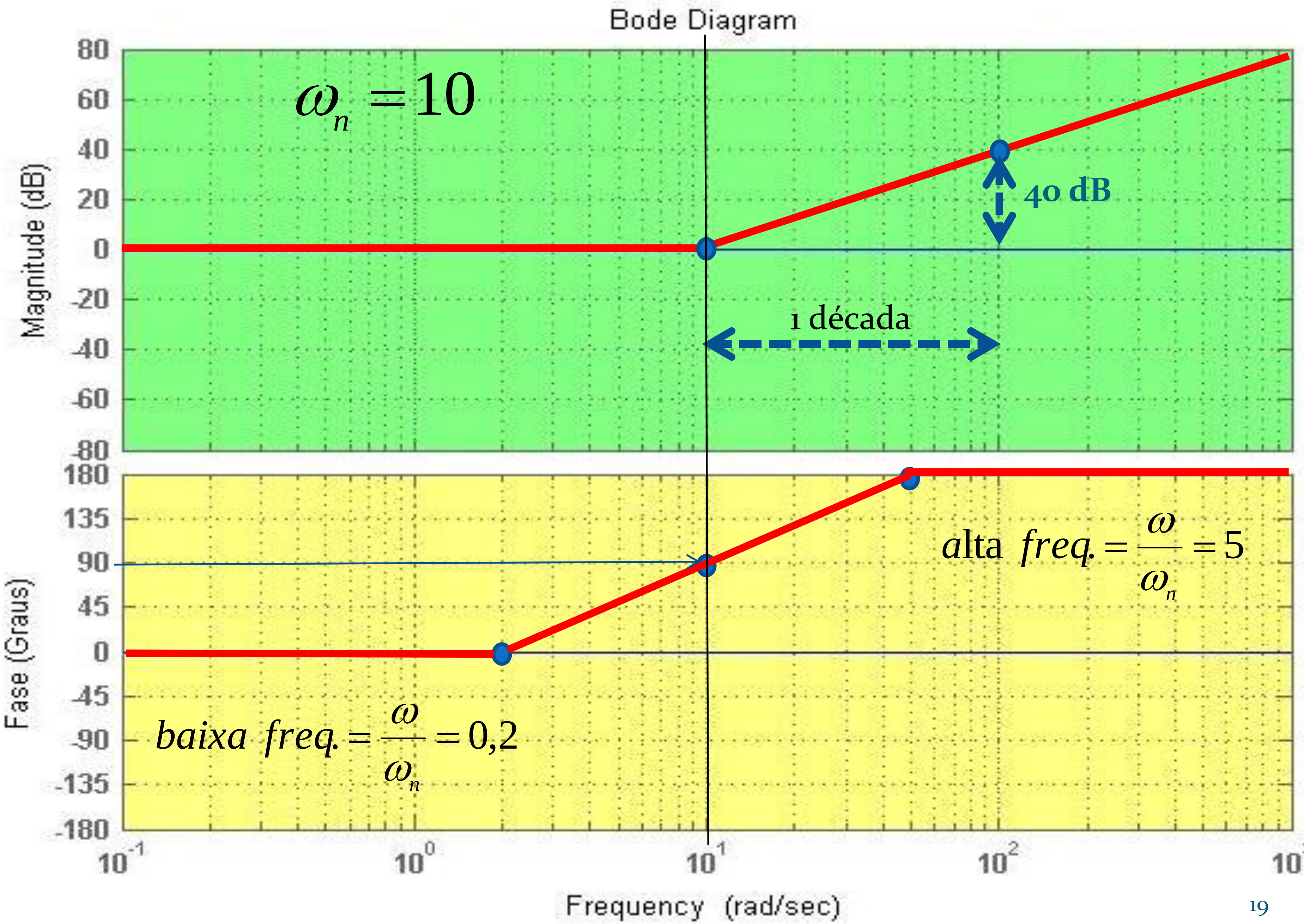
Fatores de 1ª Ordem:(1+jω/p)→ no denominador



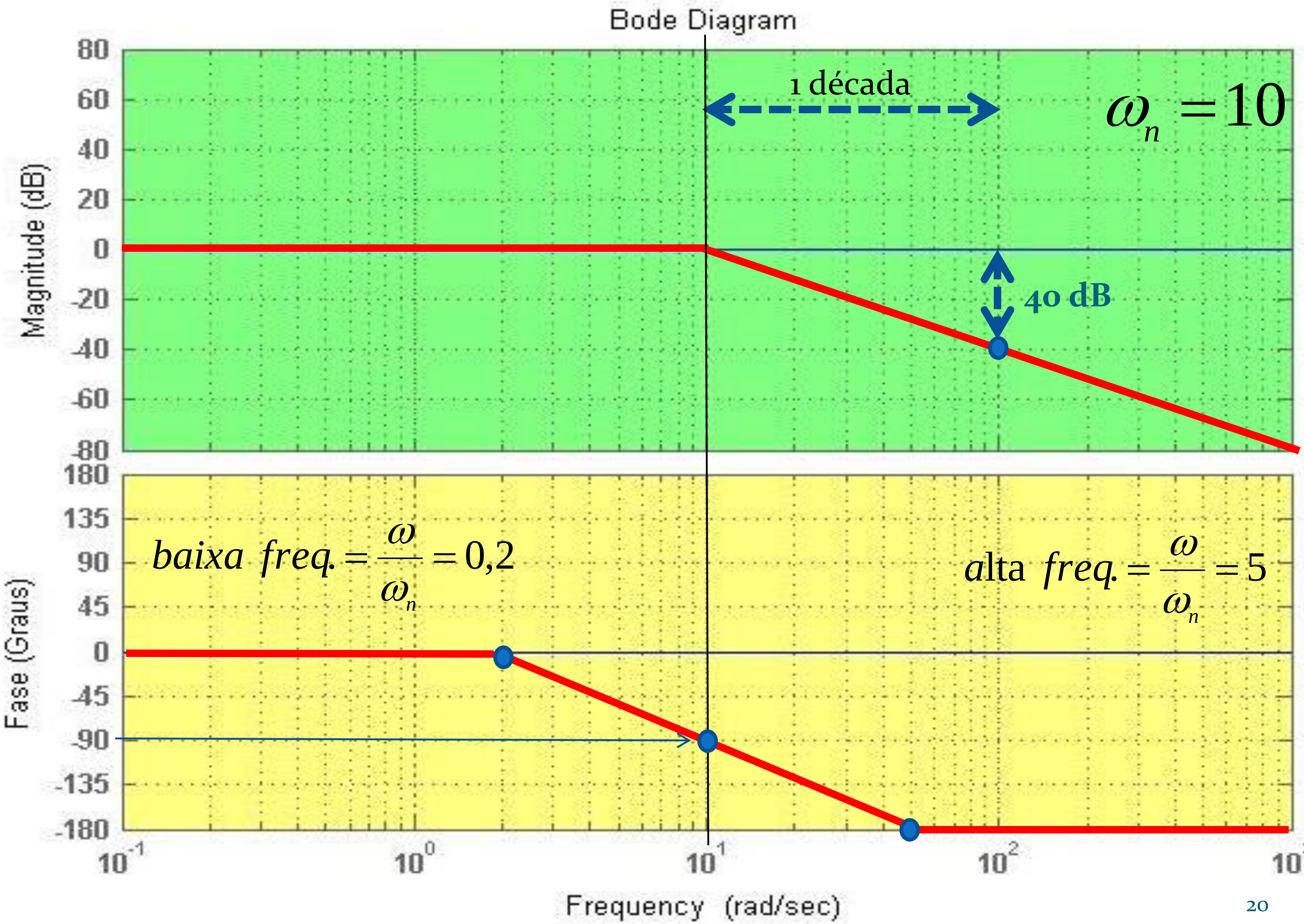
Fatores de 1ª Ordem: real e assíntotas



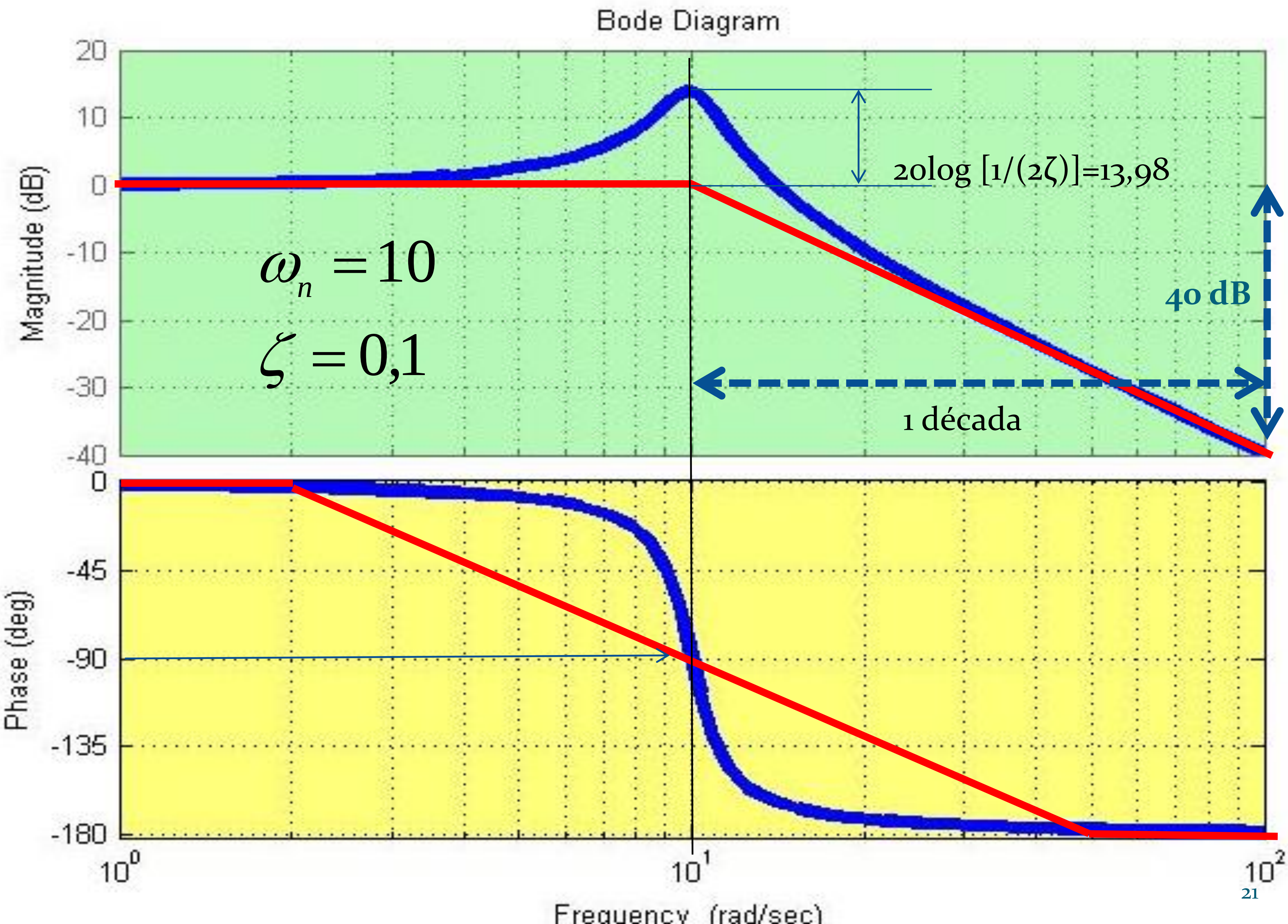
Fatores de 2ª Ordem no Numerador



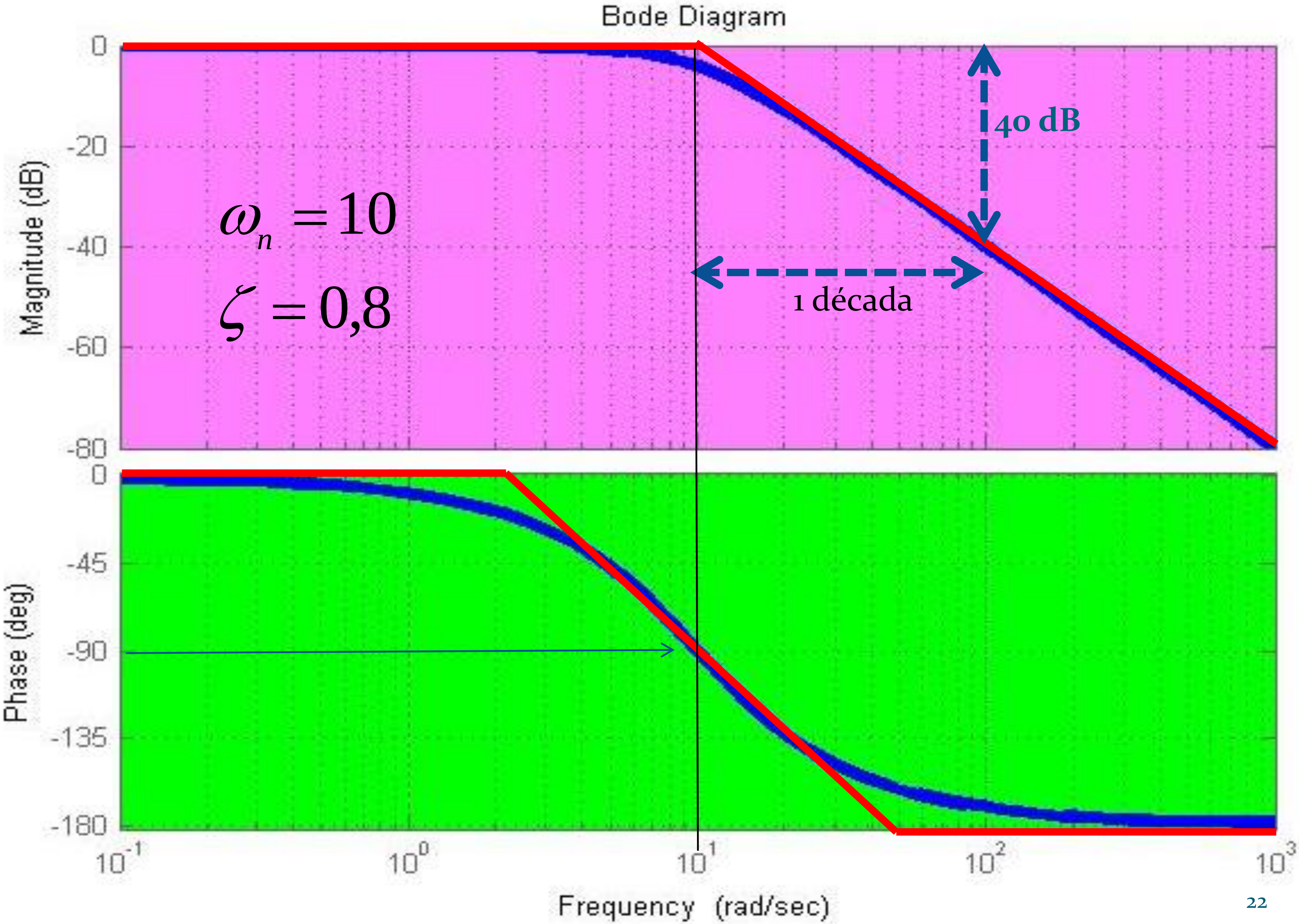
Fatores de 2ª Ordem no Denominador



2ª Ordem no Denominador:Assíntotas e real



2ª Ordem no Denominador:Assíntotas e real



Exercício: Composição de Funções

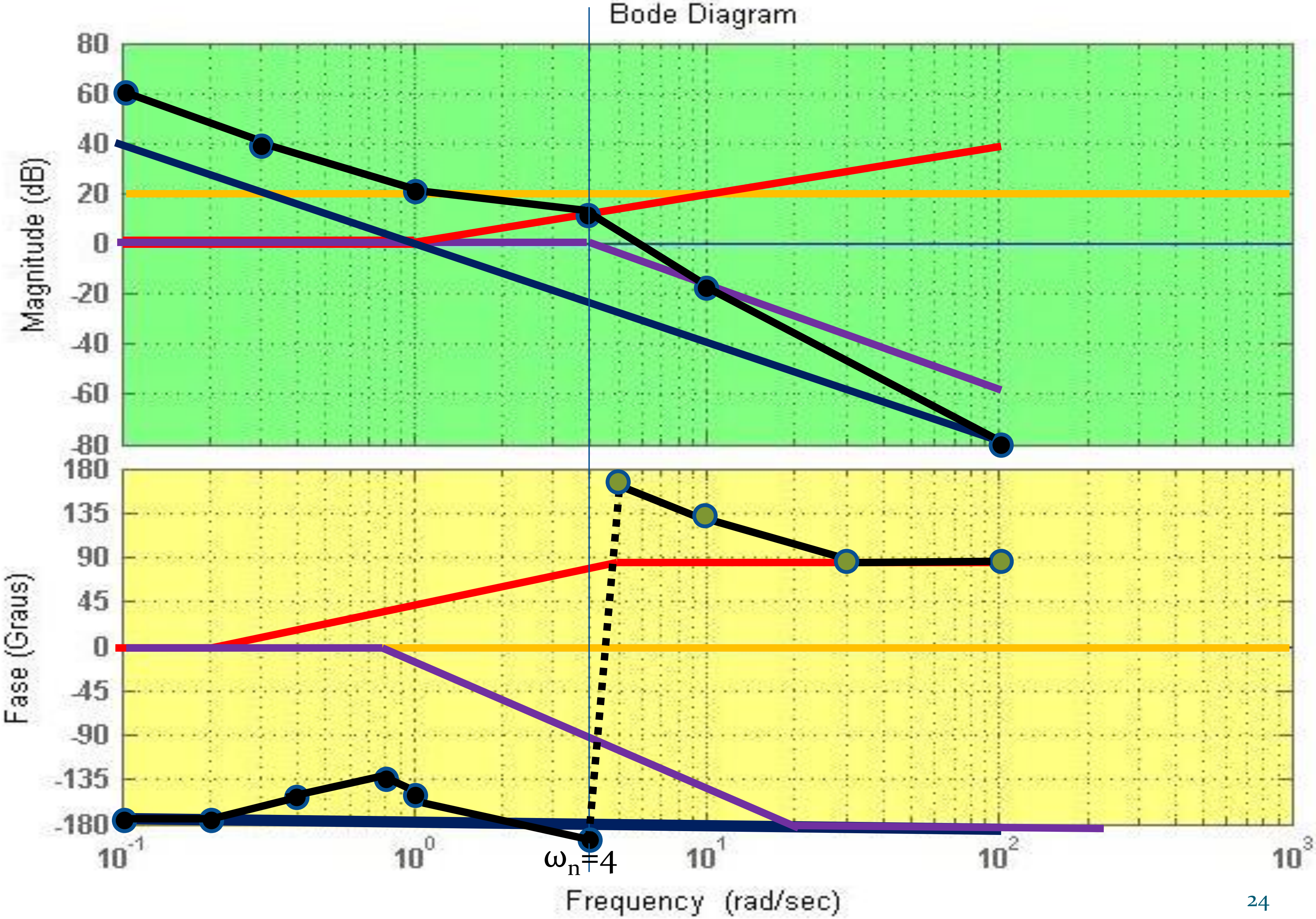
$$G(j\omega)=\frac{10(1+j\omega)}{(j\omega)^2\left(1+j\frac{\omega}{4}-\left(\frac{\omega}{4}\right)^2\right)}$$

1) $10:$ *fator* constante;

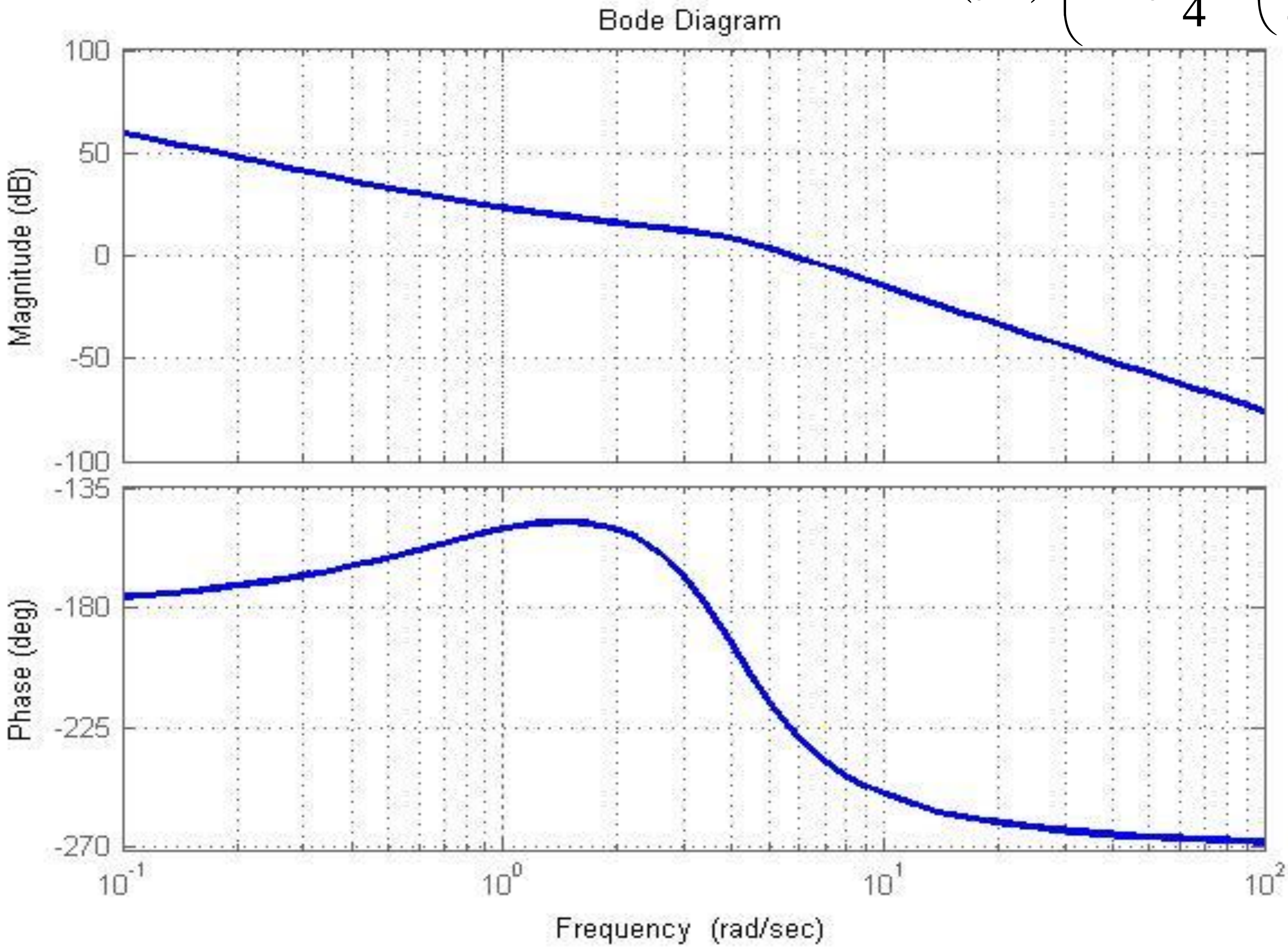
2) $(1+j\omega):$ *fator* de primeira ordem no numerador;

3) $(j\omega)^2:$ *fator* integrativo;

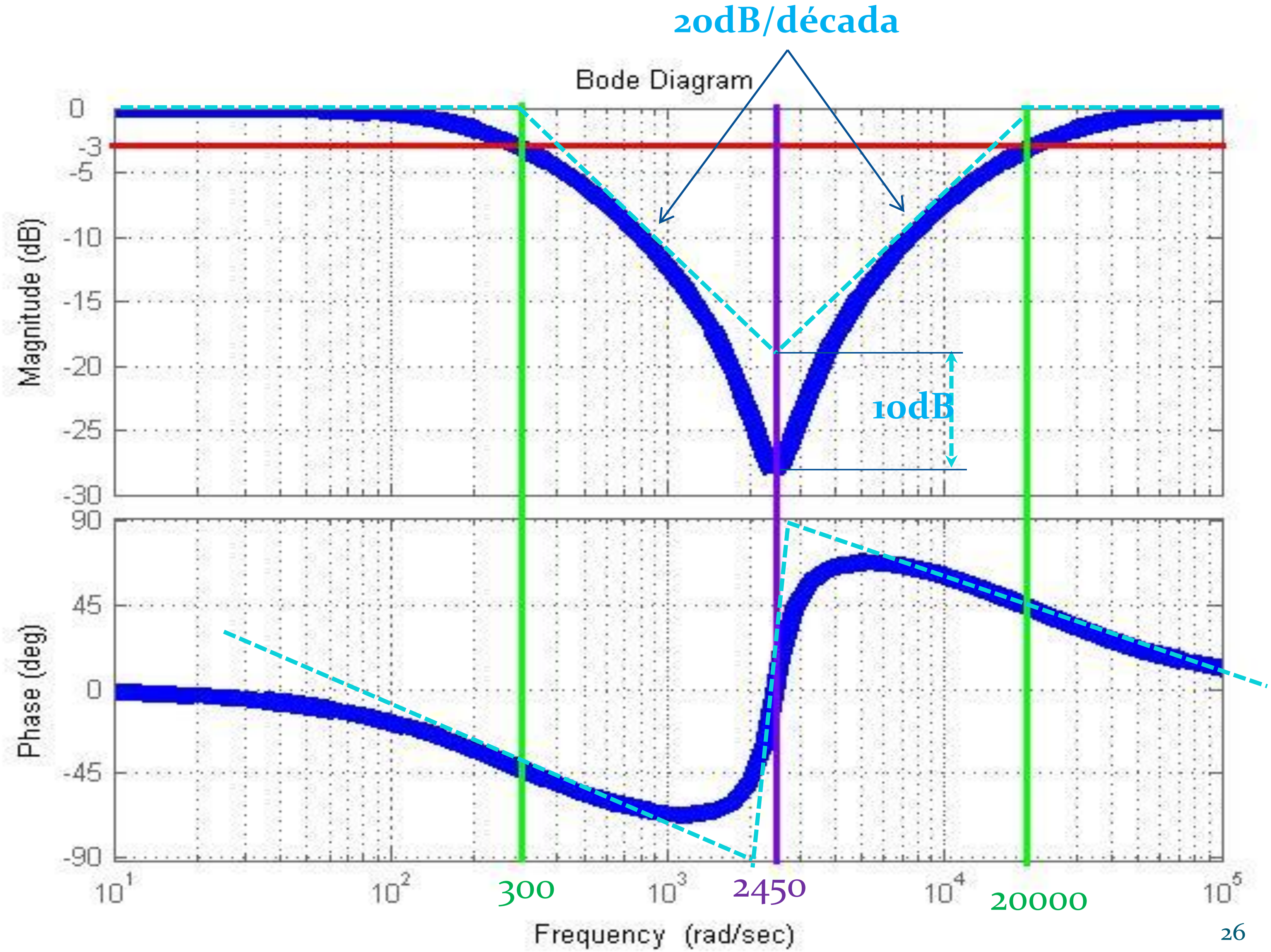
4) $\left(1+j\frac{\omega}{4}-\left(\frac{\omega}{4}\right)^2\right):$ *fator* de 2ª Ordem no denominador.


Bode Diagram
Magnitude (dB)
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
Fase (Graus)
180
135
90
45
0
-45
-90
-135
-180
10^{-1}
10^{0}
$\omega_n=4$
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/sec)

$$G(j\omega)=\frac{10(1+j\omega)}{(j\omega)^2\left(1+j\frac{\omega}{4}-\left(\frac{\omega}{4}\right)^2\right)}$$



Identificação da FT a partir do diagrama de Bode



Identificação da FT a partir do diagrama de Bode: solução

- Razão de amplitude vinha em zero em baixa frequência e começou a cair com -20dB a partir de 300 rad/s➔ há um polo real em -300 rad/s.
- Em ω = 2450 rad/s a inclinação passa de -20dB para +20dB e a fase muda de +180° ➔ Há um par de zeros complexos aí (não pode ser par de zeros reais porque só mudaria 2x45° = 90°.
- Em ω = 20.000 rad/s a inclinação passa de +20dB para zero ➔ há outro polo aí:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{\omega_n^2(s+p_1)(s+p_2)} = \frac{s^2 + 2\zeta(2450)s + (2450)^2}{(2450)^2(s+300)(s+20000)}$$

ζ=? ➔Na frequência de canto 2450, onde há um para de zeros complexos, há um pico de 10dB ➔ $20\,log\frac{1}{2\zeta} = 10$

$log2\zeta$=-0,5 ➔ ζ = 0,158

Especificações no domínio da frequência para sistemas de 2ª Ordem

$$G_2(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+1}$$

FT senoidal na Forma de Bode:

$$G_2(j\omega)=\frac{1}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}j\right]} \rightarrow |G(j\omega| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2+\left[1-\left(\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)\right]^2}}$$

Pico de ressonância (M_r): quando denominador é mínimo;

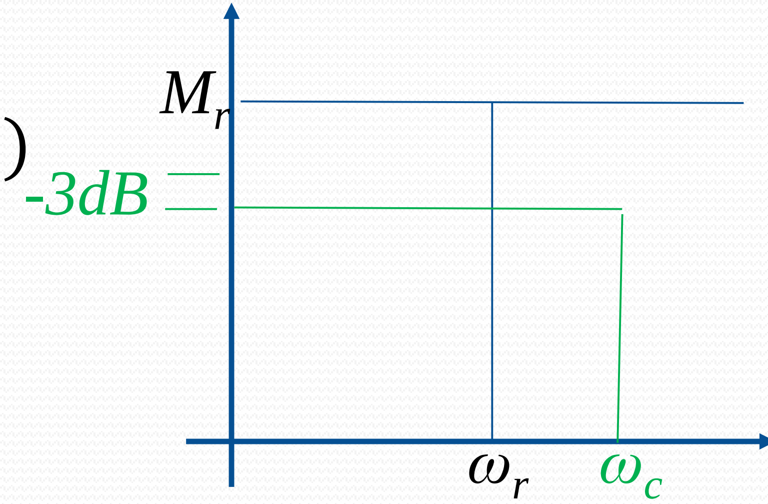
$$\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2+\left[1-\left(\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)\right]^2 = g(\omega).\ \text{Seja}\ \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = y \Rightarrow g(\omega) = (1-y)^2+4\zeta^2 y$$

$$\frac{dg}{dy}|_{y_r} = 2y_r + 4\zeta^2 - 2 = 0$$

$$y_r = 1 - 2\zeta^2 = \left(\frac{\omega_r}{\omega_n}\right)^2$$

$\Rightarrow \omega_{r=}\ \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$ ⇒frequência de ressonância

(para $0 < \zeta < 0{,}707$)



$$\mathrm{g}(\omega_r) = (1-y_r)^2 + 4\zeta^2 y_r = 4\zeta^2(1-\zeta^2)$$

$$|G(j\omega| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\zeta\omega}{\omega_n}\right)^2 + \left[1-\left(\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{g(\omega)}}$$

Pico de ressonância:

$$M_r = |G(j\omega_r| = \frac{1}{\sqrt{g(\omega_r)}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, \text{ para } 0 < \zeta < 0{,}707$$