Aula 12 – Cálculo da área da superfície de um sólido de revolução.

Prof. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Instituto de Matemática e Estatística

MAT1352 – Cálculo para funções de uma variável real II

Objetivo da aula:

Usar integração para calcular a área da superfície do sólido obtido rotacionando o gráfico de uma função $f(x)$ em torno do eixo das abscissas.

Área da superfície de um cone circular reto

- Seja C um cone circular reto, cuja base é a circunferência B e tendo V como vértice.
- Fixe $n \in \mathbb{N}$, com $n > 2$.
- Fixe $P_0, \ldots, P_n$ pontos da circunferência B tais que $P_n = P_0$ e que os arcos entre os pontos P_i e P_{i+1} são todos congruentes, correspondendo ao ângulo $\dfrac{2\pi}{n}$.
- Considere A_n a soma de todas as áreas dos triângulos $P_{i-1}P_iV$, para $i \in \{1, n\}$.
- Sendo A a área da superfície de C, temos que $A = \lim_{n\to\infty} A_n$.

- Seja l a distância entre V e qualquer ponto da circunferência B.
- Seja r o raio da circunferência B.
- Note a área de cada triângulo $P_{i-1}P_iV$ é $r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{l^2 - r^2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}$.
- Portanto, $A = \lim_{n\to\infty} nr\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)\sqrt{l^2 - r^2\,\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}$.
- Multiplicando a expressão acima por π no numerador e no denominador, e usando o limite fundamental, concluímos que:
- $A = \pi r l$

Área da superfície de um tronco de cone

- Considere dois cones, C_1 e C_2, tais que $C_2 \subseteq C_1$ e ambos compartilham o mesmo vértice V.
- A região $C_1 \setminus C_2$ é chamada de *tronco de cone*.
- Sejam r_1 e r_2 os raios das circunferências que são bases dos cones C_1 e C_2, respectivamente.
- Para cada $i \in \{1, 2\}$ seja l_i a distância de V a algum ponto da circunferência que é base de C_i.
- A área A do tronco de cone será $\pi(r_1 l_1 - r_2 l_2)$.
- Por semelhança de triângulos, $\frac{r_1}{l_1} = \frac{r_2}{l_2}$ e, portanto, $r_1 l_2 = r_2 l_1$.
- Portanto, $A = \pi(r_1 l_1 - r_2 l_2) = \pi(r_1 + r_2)(l_1 - l_2)$.

Fórmula da área da superfície de sólido de revolução

- Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ contínua e de classe C^1 em $]a, b[$.
- Fixado $n \in \mathbb{N}$, fixe $\{x_0, \ldots, x_n\}$ a partição de $[a, b]$ dada por $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$, par $0 \leq i \leq n$.
- Considere $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $y_i = f(x_i)$ e $P_i = (x_i, y_i)$.
- Defina S_i a área do tronco de cone obtido pela rotação do segmento $P_{i-1}P_i$ em torno do eixo x.
- Defina $A_n = \sum_{i=1}^{n} S_i$.
- Temos que a área da superfície do sólido obtido pela rotação do gráfico de f em torno do eixo x tem área $A = \lim_{n\to\infty} A_n$.

- Pela fórmula do tronco de cone, temos $S_i = \pi(y_{i-1} + y_i)d(P_{i-1}, P_i)$.
- Argumentando como na aula anterior, encontramos $t_i \in]x_{i-1}, x_i[$ tal que:
- $S_i = \pi(y_{i-1} + y_i)\sqrt{1 + (f'(t_i))^2}$.
- Fazendo n tender a infinito e usando a continuidade de f, temos que $y_{i-1} + y_i$ é aproximadamente igual a $2f(t_i)$.
- Portanto, temos $A = \lim_{n\to\infty} 2\pi f(t_i)\sqrt{1 + (f'(t_i))^2}$.
- Logo, $A = 2\pi \displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$.

Teorema 1

Se $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *é contínua em* $[a, b]$ *e de classe* C^1 *em* $]a, b[$*, a área da superfície do sólido obtido pela rotação do gráfico da função* $y = f(x)$ *em torno do eixo* x*, para* $a \leq x \leq b$*, é igual a:*

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Exemplo 1

Prove que a área da superfície da esfera de raio R é $4\pi R^2$.

Exemplo 2

Calcule a área da superfície da parábola $y = x^2$ *em revolução em torno do eixo* y*, entre os pontos* $y = 0$ *e* $y = 1$*.*

Fim