Lista VIII: Eletrodinâmica Quântica

① Estabeleça a decomposição do momento angular do campo eletromagnético nas suas partes intrínseca e orbital, isto é $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{spin}} + \mathbf{J}_{\text{orb}}$, onde

$$\mathbf{J}_{\text{spin}} = \frac{1}{2c} \int d\mathbf{r} \left(\mathbf{E} \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{E} \right),$$

$$\mathbf{J}_{\text{orb}} = \frac{1}{2c} \int d\mathbf{r} \sum_{i=1}^{3} \left[E_i (\mathbf{r} \times \nabla A_i) + (\mathbf{r} \times \nabla A_i) E_i \right] ,$$

Dica: mostre que

$$[\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})]_i = E_\ell (\mathbf{r} \times \nabla)_i A_\ell + \varepsilon_{i\ell k} E_\ell A_k - \nabla_\ell (E_\ell \, \varepsilon_{ijk} x_j A_k).$$

② Mostre que o momento angular total do campo eletromagnético quando atua sobre um estado de um único fóton $|\mathbf{k}\lambda\rangle$ resulta em

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{k}} |\mathbf{k}\lambda\rangle = \hbar\lambda |\mathbf{k}\lambda\rangle \, .$$

Isso demonstra que $\mathbf{J}_{\text{orb}}$ é de fato o momento angular orbital. Por quê?

③ Mostre que os operadores do campo eletromagnético podem também ser expressos diretamente em termos de operadores de criação e aniquilação de fótons com momento angular bem definido, isto é, que

$$\mathbf{A}(x) = \frac{\sqrt{\hbar c}}{8\pi^2} \sum_{jm\lambda} \sqrt{2j+1} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\sqrt{k}} [e^{i\omega t} \, \mathbf{f}_{jm\lambda}(k,r) \, a^\dagger_{jm\lambda} + \text{h.c.}] \, ,$$

onde

$$\mathbf{f}_{jm\lambda}(k,r) = \int d\mathbf{n} \, \mathbf{e}^*_{k\lambda} \, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} D^j_{m\lambda}(\mathbf{n})$$

com

$$[a_{jm\lambda}, a^\dagger_{j'm'\lambda'}] = \frac{\delta(k-k')}{kk'} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{\lambda\lambda'} \, .$$

Essa expansão de $\mathbf{A}$ em estados de momento angular total em torno de um ponto fixo leva a amplitudes de absorção e emissão de multipolos de ordem arbitrária.

④ Considere o efeito Zeeman em transições E1 $(j_i, m_i) \to (j_f, m_f)$. Mostre que o campo elétrico da radiação emitida é dado por

$$\mathbf{E} \propto \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{\kappa=0,\pm 1} \mathbf{e}^*_{k\lambda}\, d^1_{-\lambda,\kappa}(\theta)\, \langle j_i m_i 1\kappa | j_f m_f \rangle \,,$$

onde d^1 é a matriz de rotação para $j = 1$, θ é o ângulo entre o momento do fóton $\mathbf{k}$ e o campo magnético. Note que a polarização que é elíptica no caso geral, é completamente determinada pela simetria de rotação. Considere o caso especial $\theta = 0$, e mostre que apenas a polarização circular é emitida. Por quê?

⑤ Mais de um multipolo pode muitas vezes contribuir para uma transição radiativa. Se J^P representa um estado de momento angular J e paridade P, mostre que na transição $4^- \to 1^+$ as contribuições E3, M4 e E5 são permitidas e somam coerentemente na amplitude de transição. Mostre também que a contribuição dominante é E3 seguida pelo termo de interferência E3-M4.

⑥ Exercício 15, Cap. 10 do Gottfried.

⑦ Exercício 16, Cap. 10 do Gottfried.

⑧ Exercício 17, Cap. 10 do Gottfried.