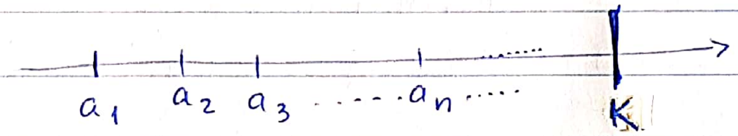
Aula 15 - 29/10

Teorema 5

Toda sequência monótona limitada é convergente.

Na verdade, poderíamos enunciar 2 teoremas:

(a) Toda sequência crescente e limitada superiormente é convergente:

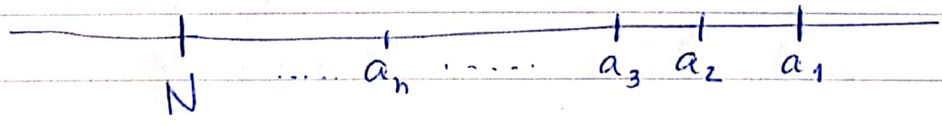


$a_n \leq K, \forall n$

$\Rightarrow \exists \lim a_n$

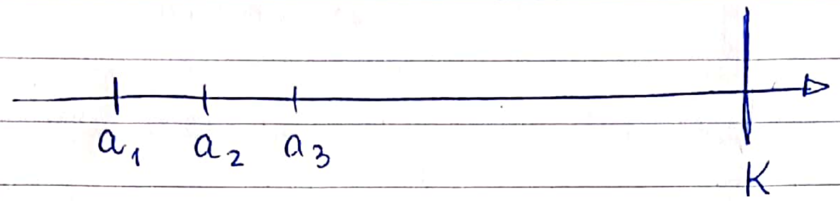
Vamos provar que $\lim a_n = \sup\{a_1, a_2, \dots\}$

(b) Toda sequência decrescente e limitada inferiormente é convergente:



$N \leq a_n, \forall n.$

Neste caso, prova-se que $\lim a_n = \inf\{a_1, a_2, \dots a_n, \dots\}$



$$a_1 < a_2 < a_3 \ldots\ldots \quad < \quad K$$

$$a_1 \leq a_n \leq K \,, \quad \forall n$$

Demonstração do Teorema 5.

H $\begin{cases} (a_n) \text{ é uma sequência crescente} \\ \text{limitada superiormente} \end{cases}$

T: a sequência (a_n) é convergente
($\underline{\underline{\exists}}$ $\lim a_n$)

<u>Dem.</u> Como, por hipótese $(a_n)_n$ é ltda
existe $K \in \mathbb{R}$ tal que

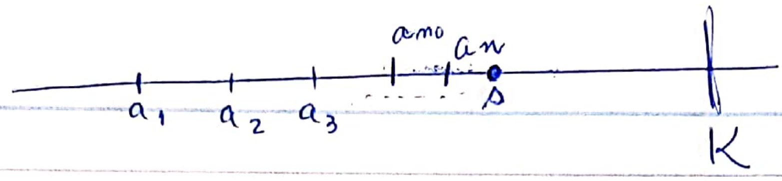
$$a_n \leq K \,, \quad \forall n.$$

Mas a seq é crescente:

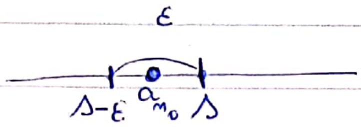
$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots\ldots \quad \underline{\underline{\leq K}}$$

Seja
$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ é não vazio
limitado superiormente
(por K)

$\exists$ $\underline{\sup A} = s$



Vamos provar que $s = \lim a_n$.



Dado $\varepsilon > 0$, sabemos que $s-\varepsilon$ não é maj. de A

$\Rightarrow \exists\ a_{n_0} \in A$ tal que $s-\varepsilon < a_{n_0} \leq s$.

$\boxed{\text{Se } n \geq n_0}$ então $a_n \geq a_{n_0}$, pois a seq é crescente

e $a_n \leq s$ pois s é majorante de A

Portanto,

$$\underbrace{s-\varepsilon} < a_{n_0} \leq \underbrace{a_n} \leq s < \underbrace{s+\varepsilon}$$

$$s-\varepsilon < a_n < s+\varepsilon$$

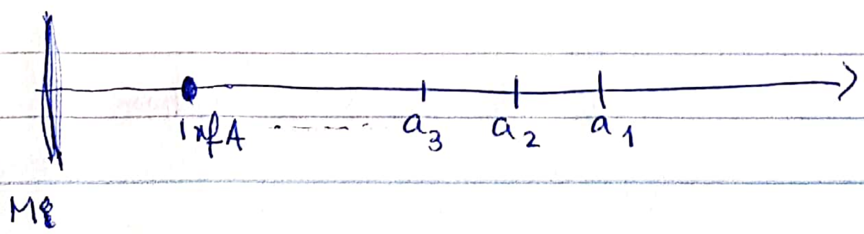
$$-\varepsilon < a_n - s < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |s - a_n| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0$$

Logo, $\lim a_n = s$ ($\therefore$ a seq (a_n) converge)

—x—

Lição de casa: Demonstrar o caso (a_n) decrescente, limitada inferiormente



Exemplo 1

$a_1 = 1$ $\qquad \boxed{a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_2 = 3 - \frac{1}{a_1} = 3 - 1 = 2.$$

$$a_3 = 3 - \frac{1}{a_2} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$a_4 = 3 - \frac{1}{a_3} = 3 - \frac{1}{\frac{5}{2}} = 3 - \frac{2}{5} = \frac{13}{5} = 2{,}6$$

$$a_5 = 3 - \frac{1}{a_4} = 3 - \frac{1}{\frac{13}{5}} = 3 - \frac{5}{13} = \frac{34}{13} \approx 2{,}615$$

Conjeturas: $\begin{cases} (a_n)_n \text{ é crescente } \checkmark \\ (a_n)_n \text{ é limitada } \checkmark \end{cases}$

(A) (a_n) é limitada superiormente por 3.

Mais precisamente, $\boxed{1 \leq a_n \leq 3}$

- $a_1 = 1$ $\qquad (1 \leq a_1 \leq 3)$
- suponha $\qquad 1 \leq a_k \leq 3$ para algum k

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{a_k} \leq 1$$

$$-\frac{1}{3} \geq -\frac{1}{a_k} \geq -1$$

$$3 \geq 3 - \frac{1}{3} \geq \underbrace{3 - \frac{1}{a_k}}_{= a_{k+1}} \geq 3 - 1 > 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq a_{k+1} \leq 3$$

PIF
$$\Rightarrow 1 \leq a_n \leq 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(B) (a_n) é crescente: $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n = 1, 2, 3, \dots$

- Vale: $a_1 \leq a_2$ $\quad (a_1 = 1, \; a_2 = 2)$

- Suponha $a_k \leq a_{k+1}$ para algum k

Como todos os termos da seq são positivos:

$$\frac{1}{a_k} \geq \frac{1}{a_{k+1}}$$

$$-\frac{1}{a_k} \leq -\frac{1}{a_{k+1}}$$

$$\underbrace{3 - \frac{1}{a_k}}_{=\,a_{k+1}} \leq \underbrace{3 - \frac{1}{a_{k+1}}}_{=\,a_{k+2}}$$

$$a_{k+1} \leq a_{k+2}$$

P.I.F

$\Longrightarrow$ Vale $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n$

Pelo T. 5, a sequência converge, ou seja,

existe $\boxed{L = \lim a_n}$.

$$a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

$(n \to \infty)$ $\downarrow$

$$\boxed{L = 3 - \frac{1}{L}}$$

$$L^2 = 3L - 1$$

$$L^2 - 3L + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$L = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2}$$

$$L = \begin{cases} \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ \text{ou} \\ \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ não serve} \end{cases}$$

tilibra

Exemplo 2.

$b_1 = 1$, $\boxed{b_{n+1} = \frac{1}{9}(3b_n + 5), \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$

$b_2 = \frac{1}{9}(3 \cdot 1 + 5) = \frac{8}{9} = 0,\overline{8} \approx 0,888\ldots$

$b_3 = \frac{1}{9}\left(3 \cdot \frac{8}{9} + 5\right) = \frac{23}{27} = 0,\overline{851} = 0,851851\ldots$

etc...

(b_n) é decrescente e limitada: $\quad 0 \leq b_n \leq 1$ $\Big\}$ Provar!

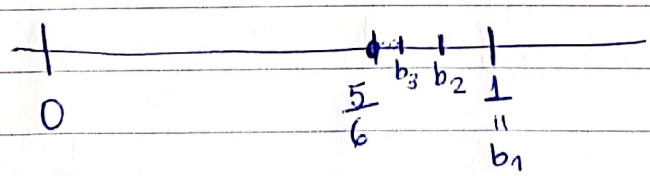
$\overset{T5}{\Longrightarrow}$ existe $L = \lim b_n$.

$$b_{n+1} = \frac{1}{9}(3b_n + 5)$$

$n \to \infty$

$$L = \frac{1}{9}(3L + 5)$$

$$\boxed{L = \frac{5}{6}}$$



Exemplo importante

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\underbrace{\lim a_n}_{\text{existe}} \overset{\text{Def}}{=} e$$

(a_n) é limitada superiormente

$$a_1 = (1+1)^1 = 2$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2,\overline{370}$$

etc...

$a_{10} =$ $\qquad$ $a_{50} =$

Vamos provar que $(a_n) < 3, \ \forall n$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{10n}\right)^n = ?$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{10n}\right)^{10n}\right]^{\frac{1}{10}} = \lim_{k\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^{\frac{1}{10}}$$

$k = 10n$

$$\overset{T4}{=} \left[\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^{\frac{1}{10}}$$

$$= \sqrt[10]{e}$$