RESUMO

$V \neq \phi$

$(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$

Se estão definidas em V duas operações

Adição: $(v, u) \in V \times V \xrightarrow{+} v + u \in V$

Multiplicação por escalar: $\underset{\mathbb{R}}{a}, \underset{V}{v}$ $(a, v) \in \mathbb{R} \times V \xrightarrow{\cdot} av \in V$

satisfazendo os axiomas,

A1: $(u+v)+w = u+(v+w) \ \forall \ u, v, w \in V$. (Associativa)

A2: $u+v = v+u \ \forall \ u, v \in V$. (Comutativa)

A3: $\exists \ 0 \in V$ tal que $v+0 = 0+v = v \ \forall \ v \in V$ (Existência do Elemento Neutro)

A4: $\forall \ v \in V$, existe $-v \in V$ tal que $v+(-v)=0$ → Existência do Oposto.

M1: $1.v = v \ \forall \ v \in V$.

M2: $(a+b)v = av + bv \ \forall \ a, b \in \mathbb{R}$ e $v \in V$.

M3: $(ab)v = a(bv) = b(av) \ \forall \ a, b \in \mathbb{R}$ e $v \in V$.

M4: $a(u+v) = au + av \ \forall \ a \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$.

OBS: 0 é único e $\forall \ v \in V$, $-v$ é único.

Exemplos:

$\mathbb{R}^n$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $P(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$

Primeiras Propriedades (Decorrem diretamente dos axiomas)

1. $\underset{\in\mathbb{R}}{0}\,\underset{\in V}{v} = \underset{\in V}{0} \quad \forall\, v \in V.$

2. $a.0 = 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

3. Se $\overset{\in\mathbb{R}}{a}\,\overset{\in V}{v} = \overset{\in V}{0}$ então $\underset{\in\mathbb{R}}{a} = 0$ ou $\underset{\in V}{v} = 0$.

4. LCA: Se $u+v = u+w \Longrightarrow v = w$

5. $\underbrace{(-1)}_{\in\mathbb{R}} v = \underset{\in V}{-v} \quad \forall\, v \in V$

<u>DEF</u>: $\underset{\in V}{u} - \underset{\in V}{v} = \underset{\in V}{u} + \underbrace{(-v)}_{\in V}$

6. $(a-b)v = av - bv$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $v \in V$

7. $(-a)v = -av \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$ e $v \in V$

8. $a(u-v) = au - av$ $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $u, v \in V$

OBSERVAÇÃOS:

Dados $v_1, \ldots, v_m \in V$ e $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$

Fazemos

- $a_i v_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, m$

e $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m \overset{\text{def}}{=} (a_1 v_1 + \cdots + a_{m-1} v_{m-1}) + a_m v_m$

Ex: $a_1 v_1 + a_2 v_2$ OK

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = (a_1 v_1 + a_2 v_2) + a_3 v_3$

Exercício

Lista 1 (3c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

É possível determinar $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $A = xB + yC$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 2x & x \\ x & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 2y \\ y & 0 \\ 0 & -y \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 1 &= y \\ x + 2y &= 1 \\ 2x + y &= 0 \\ x &= 0 \\ x &= -y \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{incompatível}$$

$y = 1 \Rightarrow x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1$

SUBESPAÇOS

$W \subset V$ é subespaço de V se:

(1) $0 \in W$

(2) Se $u, v \in W \Rightarrow u+v \in W$.

(3) Se $u \in W$ e $a \in \mathbb{R}$ então $au \in W$.

$(V, +, \cdot)$ espaço vetorial.

Um subconjunto $W \subset V$, $W \neq \emptyset$ é um subespaço de V se, e somente se, $(W, +, \cdot)$ é um espaço vetorial.

Exercícios

7(b) Lista 1

Sejam W_1 e W_2 subespaços de V. Então $W_1 \cup W_2$ é um subespaço de V se, e somente se, $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

$(\Leftarrow)$ OK

$(\Rightarrow)$ Suponha que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço e que $W_1 \not\subset W_2$. Quero mostrar que $W_2 \subset W_1$.

Seja $w \in W_2$. Mostrar que $w \in W_1$.

Como $W_1 \not\subset W_2$, existe $v \in W_1$ tal que $v \notin W_2$

Agora w e $v \in W_1 \cup W_2$ e por hipótese, $W_1 \cup W_2$ é subespaço. Logo $w + v \in W_1 \cup W_2$.

Então $w + v \in W_1$ ou $w + v \in W_2$.

Se $w + v \in W_2$, como $w \in W_2 \Rightarrow (w+v) - w \in W_2$

$\Rightarrow v \in W_2$ contra a hipótese.

Logo $w + v \in W_1$. Como $v \in W_1$, $(w+v) - v \in W_1$

$\Rightarrow w \in W_1$, como queríamos.

DEF: COMBINAÇÃO LINEAR (CL)

Dados $v_1, \ldots, v_m \in V$ e $a_1, \ldots, a_m \in V$,

$v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$ é um CL de $v_1, \ldots, v_m$.

Dizemos que um vetor $v \in V$ é uma CL se $v_1, \ldots, v_m$ se existirem $a_1, \ldots, a_m \in R$ tais que $v = a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$.

$S = \{v_1, \ldots, v_m\}$

$[S] = \{$ <u>todas</u> as CL de $v_1, \ldots, v_m\} = \{a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m \mid a_i \in \mathbb{R} \; \forall i = 1, \ldots, m\}$

SUBESPAÇO GERADO POR S

$[S]$ é um SUBESPAÇO de V.

$(V, +, \cdot)$ espaço vetorial.

PROPRIEDADES de subespaço gerado

Sejam $S, T \subset V$

1. Se $S \subset T \Rightarrow [S] \subset [T]$
2. $S \subset [S]$
3. $[S] = [T]$ se, e somente se, $S \subset [T]$ e $T \subset [S]$.

4. Se $v \in [S]$ então $[S \cup \{v\}] = [S]$.

5. $[[S]] = [S]$.

Espaços Vetoriais Finitamente Gerados

$(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial **FINITAMENTE GERADO** se existir $S \subset V$, S FINITO tq $[S] = V$.

Exemplos: $\mathbb{R}^n$, $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $P_n(\mathbb{R}) \subset P(\mathbb{R})$

$\hookrightarrow$ polinômios de grau $\leq n$ é um subespaço de $P(\mathbb{R})$.

$P(\mathbb{R})$ NÃO é finitamente gerado.

DEPENDÊNCIA LINEAR

Sejam $v_1, \ldots, v_m \in V$. Considere a equação vetorial

$$(*)\ x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_m v_m = 0, \text{ onde } x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}.$$

Essa equação SEMPRE tem a solução

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0 \,. \quad (\text{SOLUÇÃO TRIVIAL}).$$

PERGUNTA: Dados $v_1, \ldots, v_m$ será que (*) tem só a solução trivial ou admite soluções além da trivial?

DEF: Se (*) tem APENAS a sol. trivial dizemos que $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é LINEARMENTE INDEPENDENTE (LI).

Caso contrário, $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é LINEARMENTE DEPENDENTE (LD).

Então $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é LI se $a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0$ implica $a_1 = \cdots = a_n = 0$,

$\{v_1, \ldots, v_m\}$ é LD se existem escalares NÃO TODOS NULOS tais que $a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0$.

Propriedades:

Seja $S \subset V$ um conjunto de vetores, $S = \{v_1, ---, v_m\}$.

(1) Se S é LI então todo subconjunto de S é LI.
(Se S contém um subconjunto LD, então S é LD)

(2) Se S é LD, então pelo menos um dos vetores de S é CL dos outros.

(3) Se $0 \in S$ então S é LD.

(4) Se $v \neq 0$ $S = \{v\}$ é LI.

(5) Se S é LI e $v \in V$ é tal que $\{v\} \cup S$ é LD então v é CL de $v_1, ----, v_m$, isto é, $v \in [S]$.

(6) Se $S = \{v_1, ---, v_m\}$ e digamos, $v_i \in S$ é CL dos outros vetores de S, então
$$[S] = [S - \{v_i\}].$$

BASE E DIMENSÃO

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado.

DEF: Uma BASE $B = \{v_1, ---, v_n\}$ é um subconjunto de V tal que:
(1) $[B] = V$ (2) B é LI.

TEO 1. Suponha $V = [S]$, $S = \{v_1, ---, v_m\}$. Então existe $B \subset S$, B base de V.

TEO 2: Se $V = [S]$, $S = \{v_1, ---, v_m\}$, então todo subconjunto de V com mais do que m vetores é LD.

Se $V = \{0\}$ colocamos $\underbrace{B = \emptyset}_{\text{base}}$, $V = [\emptyset]$

Dos TEO 1 e TEO 2 sai que todo espaço vetorial finitamente gerado tem uma base e que duas bases quaisquer de V têm o mesmo número de vetores.

DEF: $\dim V \overset{\text{def}}{=}$ nº de vetores em uma base qualquer de V.

(1) $\mathbb{R}^n$

can $= \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ $\qquad e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$

$\dim \mathbb{R}^n = n$

(2) $M_{m\times n}(\mathbb{R})$

can $= \{E_{ij},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & \text{coluna } j & & \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ i \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

E_{ij} tem 1 na linha i coluna j e todas as outras entradas são nulas

$\dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn$.

(3) $P_n(\mathbb{R})$

can $= \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$

$\dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$

PROPOSIÇÃO: Seja V um espaço vetorial de dimensão n.

(1) Todo subconjunto LI de V com n vetores é uma base de V.

(2) Todo conjunto gerador de V com n vetores é uma base de V.

TEOREMA DO COMPLETAMENTO: Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Seja $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ um subconjunto LI de V. Então existem vetores $v_{k+1}, \dots, v_n$ em V tais que

$$B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\} \text{ é uma base de } V.$$

Exemplo (Método Prático)

Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $v_1 = (1, 3, 5, 7)$ e $v_2 = (2, 4, 6, 8)$

Montamos a matriz

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(0,1,2,3) = -[(2,4,6,8) - 2(1,3,5,7)] = 2v_1 - v_2$

$(0,3,5,7) = -[(1,0,0,0) - (1,3,5,7)] = v_1 - e_1$

$(0,0,1,2) = 3(0,1,2,3) - (0,3,5,7) = 3(2v_1 - v_2) - v_1 + e_1$

$(0,0,2,3) = -(0,1,0,0) + (0,1,2,3) = 2v_1 - v_2 - e_2$

$(0,0,0,0) = (0,0,2,3) - 2e_3 - 3e_4 = 2v_1 - v_2 - e_2 - 2e_3 - 3e_4$

$(0,0,0,0) = (0,0,1,2) - e_3 - 2e_4 = 3(2v_1 - v_2) - v_1 + e_1 - e_3 - 2e_4$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma base é $\{v_1, v_2, e_3, e_4\}$

Note que $6v_1 - 3v_2 - v_1 + e_1 - e_3 - 2e_4 = 0$

Logo $e_1 = -5v_1 + 3v_2 + e_3 - e_4 \Rightarrow e_1 \in [v_1, v_2, e_3, e_4]$

$$0 = 2v_1 - v_2 - e_2 - 2e_3 - 3e_4$$

$$\Rightarrow e_2 = +2v_1 - v_2 - 2e_3 - 3e_4$$

$$e_2 \in [v_1, v_2, e_3, e_4]$$

$$\mathbb{R}^4 = [v_1, v_2, e_1, e_2, e_3, e_4]$$

Mas e_1 e e_2 estão em $[v_1, v_2, e_3, e_4]$

Logo $[v_1, v_2, e_3, e_4] = \mathbb{R}^4$ e esses vetores são LI.