EACH

Escola de Artes, Ciências e Humanidades
da Universidade de São Paulo

Cálculo II:
Máximos e Mínimos para funções de duas variáveis

ACH 4553 Cálculo II - Marketing
Prof. Andrea Lucchesi

Agenda

1. Máximos e mínimos relativos
2. Pontos críticos
3. Exemplo
4. Exercício

Referência:

Cap 11:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

Agenda

1. Máximos e mínimos relativos
2. Pontos críticos
3. Exemplo
4. Exercício

Referência:

Cap 11:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

1. Máximos e Mínimos relativos

- Seja **f(x,y)** **,** o ponto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})\ \in\ D_f$ é um ponto

de máximo relativo de f(x,y) se existir uma bola aberta de centro $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ e raio r , tal que, para todo $\mathrm{P(x,y)} \in\ D_f$ situado no interior dessa bola aberta, tem-se:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})}$$

= **valor máximo de f(x,y)**

- Se $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, então $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$

é um ponto de mínimo relativo.

Figura 11.1: Pontos de máximo de uma função.

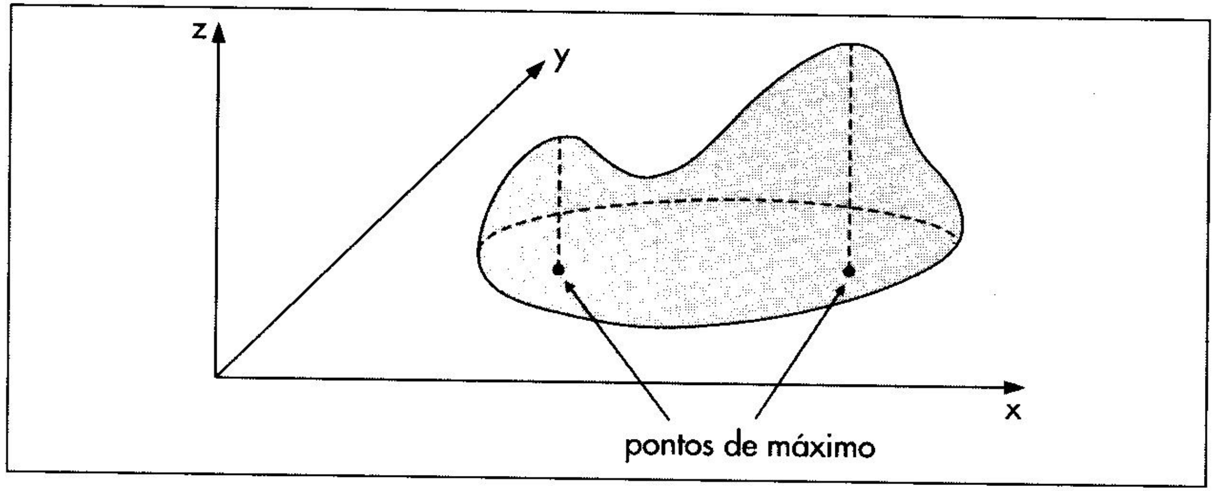
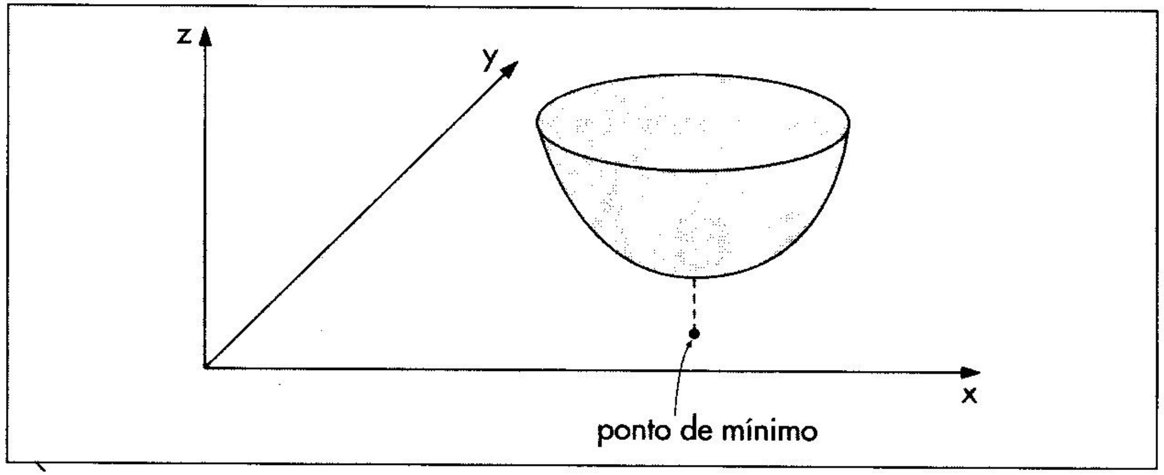


Figura 11.2: Ponto de mínimo de uma função.



Agenda

1. Máximos e mínimos relativos
2. Pontos críticos
3. Exemplo
4. Exercício

Referência:

Cap 11:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

2. Pontos críticos

- Os pontos (a,b) $\in D_f$, para os quais $f_x(a,b) = 0$ e $f_y(a,b) = 0$

são denominados pontos críticos de f(x,y).

- Os pontos críticos de f(x,y) são candidatos a

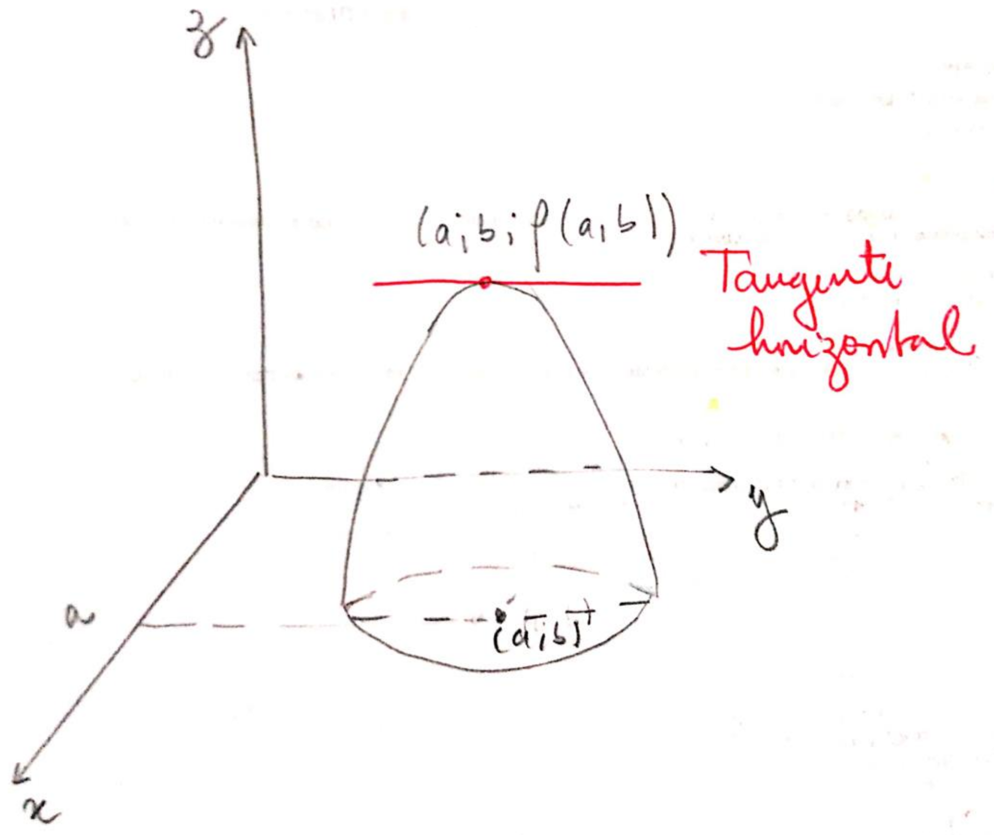
ponto de máximo ou de mínimo de f(x,y).

- Suponha que $f(x,y)$ possua um máximo relativo em (a,b).

Então, a curva formada pela intersecção da superfície z = f(x,y)

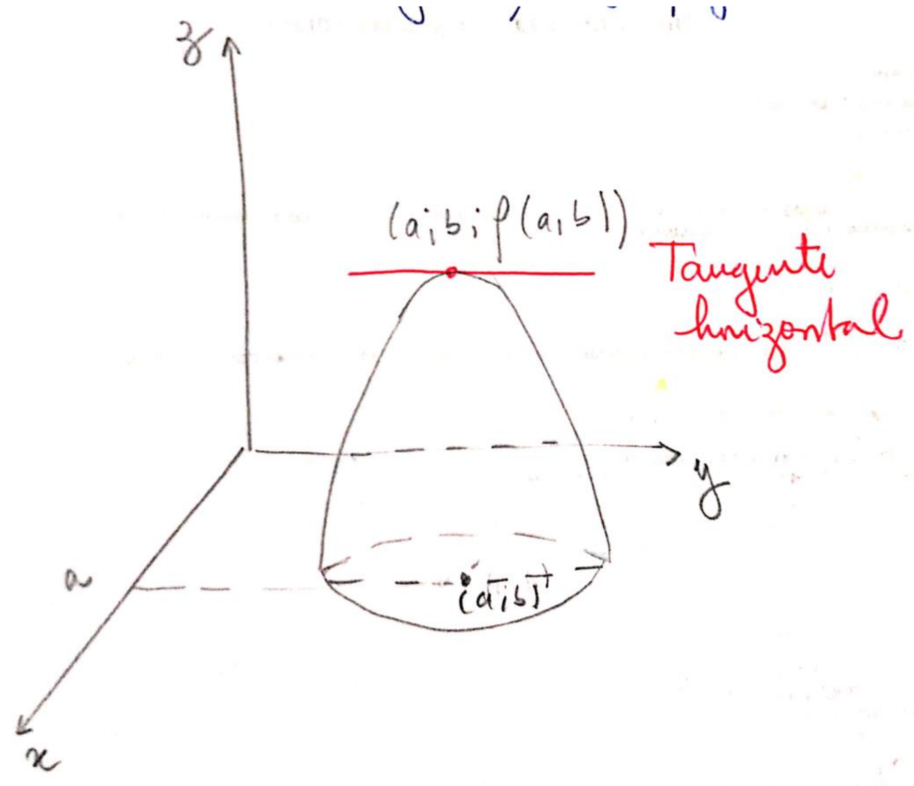
com o plano vertical y = b , possui um máximo relativo;

portanto, possui uma tangente horizontal em x = a.



2. Pontos críticos *(continuação)*

- Como a derivada parcial $f_x(a,b)$ é o coeficiente angular dessa tangente, segue que $f_x(a,b)$ =0.
- Analogamente, a curva formada pela intersecção da superfície z = f(x,y) com o plano x = a , possui um máximo relativo em y = b; logo $f_y(a,b) = 0$.



- Então:
  - O ponto (a,b) ∈ D_f, para o qual:

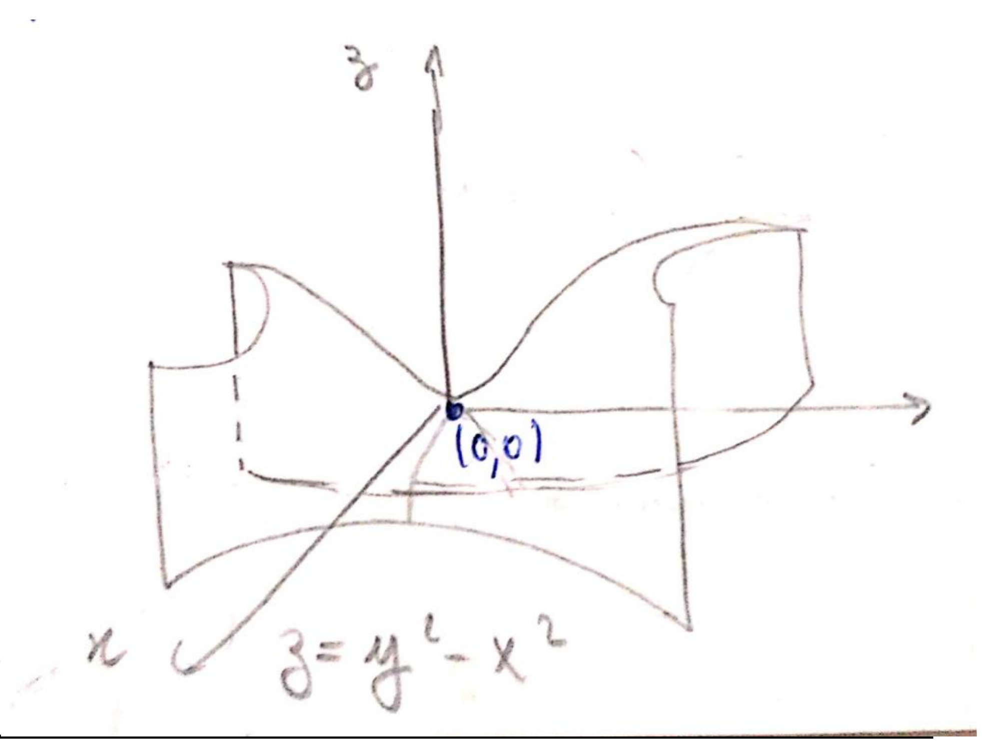
$f_x(a,b) = 0$ e $f_y(a,b) = 0$, denomina-se ponto crítico de f(x,y) = candidato a ponto de máximo ou mínimo relativo.

2. Pontos críticos *(continuação)*

- Como saber se o ponto crítico é ponto de máximo ou de mínimo ou sela?
  - ➢ Utilizar as derivadas parciais de 2ª ordem.
- Suponha que (a.b) seja um ponto crítico da função f(x,y) e a matriz hessiana no ponto (a,b) dada por:
- H(a,b) = $\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$
- O determinante de H(a,b) é dado por:

$$D = f_{xx}(a,b).\, f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b).\, f_{yx}(a,b)$$

- Então:
  - ➢ Se $D > 0$ e $f_{xx}(a,b) < 0 \Rightarrow$ (a, b) é ponto de máximo de f(x,y);
  - ➢ Se $D > 0$ e $f_{xx}(a,b) > 0 \Rightarrow$ (a, b) é ponto de mínimo de f(x,y);
  - ➢ Se $D < 0$ $\Rightarrow$ (a, b) é ponto de sela de f(x,y);
  - ➢ Se $D = 0$ $\Rightarrow$ nada é possível declarar.



Agenda

1. Máximos e mínimos relativos
2. Pontos críticos
3. Exemplo
4. Exercício

Referência:

Cap 11:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

3. Exemplo

- Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Classifique os seus pontos críticos.

1) Calcular a condição de primeira ordem (CPO), ou seja calcular as derivadas parciais, igualar a zero e resolver o sistema:

➢ Calculando as derivadas parciais:

$$f_x = 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} = 0$$

$$f_y = 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{y} = 0$$

➢ Não precisa resolver sistema nesse caso, a solução é mais simples: (0, 0)

Existe apenas um ponto crítico nesse exemplo: x = 0. ou (0,0)

2) Encontrar a ordenada y da cada ponto crítico: já foi encontrado no item 1);

3. Exemplo *(continuação)*

- Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Classifique os seus pontos críticos.

3) Para verificar se os pontos críticos são pontos de máximo relativo, mínimo relativo, ponto de sela ou nenhum dos anteriores: calcular as derivadas parciais de 2ª ordem e o determinante da matriz hessiana. **(CSO = condição de 2ª ordem)**

➢ Calculando as derivadas parciais de 2ª ordem nos pontos críticos:

Lembrando que as derivadas parciais de 1ª ordem são:

$f_x = 2x$ $\qquad\qquad$ $f_y = 2y$

As derivadas parciais de 2ª ordem no ponto crítico (0,0) são:

- $f_{xx} = 2$ => $f_{xx}(0,0) = $ **2**
- $f_{xy} = 0$ => $f_{xy}(0,0) = $ **0**
- $f_{yy} = 2$ => $f_{yy}(0,0) = $ **2**
- $f_{yx} = 0$ => $f_{yx}(0,0) = $ **0**

3. Exemplo *(continuação)*

- Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Classifique os seus pontos críticos.

3) Para verificar se os pontos críticos são pontos de máximo relativo, mínimo relativo, ponto de sela ou nenhum dos anteriores: calcular as derivadas parciais de 2ª ordem e o determinante da matriz hessiana. **(CSO = condição de 2ª ordem)**

➢ Construir a matriz hessiana para cada ponto crítico e calcular o respectivo determinante:

- ponto crítico (0,0):

H(a,b) = $\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$ => H(0,0) = $\begin{vmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{vmatrix}$ => **H(0,0) =** $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$ => **D(0,0) = 2.2 – 0.0 = 4**

3. Exemplo *(continuação)*

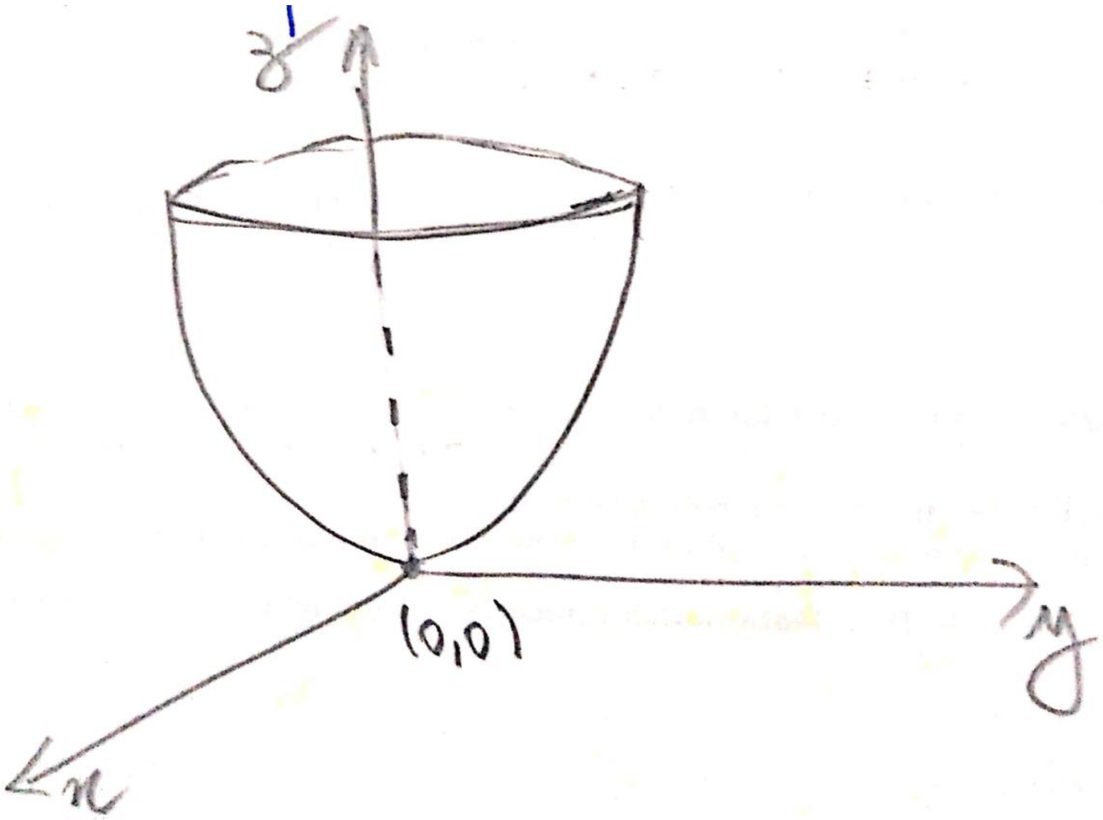
- Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Classifique os seus pontos críticos.

4) Analisar o sinal do determinante D(a.b) e de f_{xx} para cada ponto crítico:

- Ponto crítico (0,0):

D(0,0) > 0 e $f_{xx}(0,0)$ > 0 =>

(0,0) é **ponto de mínimo relativo**



Agenda

1. Máximos e mínimos relativos
2. Pontos críticos
3. Exemplo
4. Exercício

Referência:

Cap 11:

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S. e BUSSAB, W.O. **Cálculo – Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Editora Saraiva, 3ª ed, 2012.

4. Exercício

- Classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = x^3 - y^3 + 6xy$.

1) Calcular a condição de primeira ordem (CPO), ou seja calcular as derivadas parciais, igualar a zero e resolver o sistema:

- Calculando as derivadas parciais:

$$f_x = 3x^2 + 6y = 0$$
$$f_y = -3y^2 + 6x = 0$$

- Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y = 0 & (1) \\ -3y^2 + 6x = 0 & (2) \end{cases}$$

Partindo da equação (1): y = $\frac{-3x^2}{6} = \frac{-x^2}{2}$ e substituindo na equação (2): $-3(\frac{-x^2}{2})^2 + 6x = 0$:

$$\frac{-3x^4}{4} + 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x^4 + 24\,x = 0 \Rightarrow -3x.(x^3 - 8) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} -3x=0 \quad e \\ (x^3-8)=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \quad e \\ x^3=8 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \quad e \\ x = 2 \end{matrix}$$

Então, existem dois pontos críticos nesse caso: x = 0 e x = 2.

4. Exercício *(continuação)*

2) Encontrar a ordenada y de cada ponto crítico substituindo em y = $\frac{-3x^2}{6} = \frac{-x^2}{2}$.

a) quando x = 0 => y $= \frac{-x^2}{2} = \frac{-(0)^2}{2}$ = 0 => ponto crítico: **(0,0)**

b) quando x = 2 => y $= \frac{-x^2}{2} = \frac{-(2)^2}{2}$ = -2 (atenção para o sinal) => ponto crítico: **(2,-2)**

3) Para verificar se os pontos críticos são pontos de máximo relativo, mínimo relativo, ponto de sela ou nenhum dos anteriores: calcular as derivadas parciais de 2ª ordem e o determinante da matriz hessiana. **(CSO = condição de 2ª ordem)**

- Calculando as derivadas parciais de 2ª ordem nos pontos críticos:

Lembrando que as derivadas parciais de 1ª ordem são:

$f_x = 3x^2 + 6y = 0$ $\qquad$ $f_y = -3y^2 + 6x = 0$

a) As derivadas parciais no ponto crítico (0,0) são:

- f_{xx} = 6x => $f_{xx}(0,0)$ = 6 .0 = **0**
- f_{yy} = -6y => $f_{yy}(0,0)$ = -6 .0 = **0**
- f_{xy} = 6 => $f_{xy}(0,0)$ = **6**
- f_{yx} = 6 => $f_{yx}(0,0)$ = **6**

4. Exercício *(continuação)*

3) *(continuação)* Para verificar se os pontos críticos são pontos de máximo relativo, mínimo relativo, ponto de sela ou nenhum dos anteriores: calcular as derivadas parciais de 2ª ordem e o determinante da matriz hessiana.

➢ Calculando as derivadas parciais de 2ª ordem nos pontos críticos:

Lembrando que as derivadas parciais de 1ª ordem são:

$f_x = 3x^2 + 6y = 0$ $\qquad\qquad$ $f_y = -3y^2 + 6x = 0$

b) As derivadas parciais de 2ª ordem no ponto crítico (2,-2) são:

- f_{xx} = 6x => $f_{xx}(2,-2)$ = 6 .2 = **12**
- f_{xy} = 6 => $f_{xy}(2,-2)$ = **6**
- f_{yy} = -6y => $f_{yy}(2,-2)$ = -6 .(-2) = **12**
- f_{yx} = 6 => $f_{yx}(2,-2)$ = **6**

➢ Construir a matriz hessiana para cada ponto crítico e calcular o respectivo determinante:

a) ponto crítico (0,0):

- H(a,b) = $\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$ => H(0,0) = $\begin{vmatrix} f_{xx}(0{,}0) & f_{xy}(0{,}0) \\ f_{yx}(0{,}0) & f_{yy}(0{,}0) \end{vmatrix}$ => **H(0,0) =** $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{6} \\ \mathbf{6} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$ => **D(0,0) = 0.0 – 6.6 = - 36**

4. Exercício *(continuação)*

3) *(continuação)*

- ➢ Construir a matriz hessiana para cada ponto crítico e calcular o respectivo determinante:

b) ponto crítico (2, -2):

- H(a,b) = $\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$ => H(2,-2) = $\begin{vmatrix} f_{xx}(2,-2) & f_{xy}(2,-2) \\ f_{yx}(2,-2) & f_{yy}(2,-2) \end{vmatrix}$ => **H(2, -2) =** $\begin{vmatrix} \mathbf{12} & \mathbf{6} \\ \mathbf{6} & \mathbf{12} \end{vmatrix}$ =>

=> **D(2, -2) = 12.12 – 6.6 = 144 – 36 = 108**

4. Exercício *(continuação)*

4) Analisar o sinal do determinante D(a.b) e de f_{xx} para cada ponto crítico:

a) Ponto crítico (0,0):

D(0,0) < 0 => (0,0) é **ponto de sela** (não precisa checar o sinal de f_{xx})

b) ponto crítico (2, -2):

D(2, -2) > 0 e f_{xx}(2, -2) > 0 => (2, -2) é **ponto de mínimo relativo**