Capítulo 7

Controle em Malha Fechada Multivariável

Neste capítulo, apresentam-se algumas generalizações de resultados de sistemas SISO para sistemas MIMO (multiple-input-multiple-output). Em particular, apresenta-se a solução geral de um sistema linear invariante no tempo MIMO e sua relação com a matriz de funções de transferência, a configuração típica de um sistema MIMO em malha fechada, os parâmetros importantes para desempenho, o critério de estabilidade de Nyquist para sistemas MIMO, o teorema do pequeno ganho, estabilidade interna e família de controladores estabilizantes para um sistema MIMO.

7.1 Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo MIMO

Sistemas lineares e invariantes no tempo são representados por sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. Na representação em espaço de estados, as equações diferenciais são todas de primeira ordem, e as saídas são dadas como combinações lineares das entradas e dos estados:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \cdots + b_{1m}u_m(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + \cdots + b_{2m}u_m(t) \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + \cdots + b_{nm}u_m(t) \end{cases}$$

que poderia ainda ser colocada na forma matricial, que é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

Definem-se então as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

Teorema 7.1.1. *No domínio do tempo, pode-se provar que* $\mathbf{x}(t)$ *é dado por:*

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{At}\mathbf{x}(0)}_{\textit{resposta livre}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{\textit{resposta forçada}} \tag{7.1}$$

Se $\mathbf{u}(t) \equiv 0$, tem-se simplesmente que:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$$

As saídas de um sistema representam as variáveis que podem ser medidas diretamente. Em sistemas de controle, as saídas são as leituras fornecidas pelos sensores. Os estados, ao contrário, não são em geral mensuráveis (muitas vezes, são variáveis que nem sequer tem significado físico).

Definição 7.1.1 (Equações de Saída de um Sistema)**.** *Supondo que o sistema possua p saídas, elas são calculadas por:*

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$$

Definem-se então as matrizes

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}$$

Definição 7.1.2 (Representação em Espaço de Estados)**.** *Um sistema linear e invariante no tempo em espaço de estados é então um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem da forma:*

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= A\boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t) \end{aligned}$$

Teorema 7.1.2 (Solução Geral no Domínio do Tempo)**.** *A solução geral, no domínio do tempo, para o sistema (B.3) é dada por*

$$\mathbf{y}(t) = Ce^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + D\mathbf{u}(t) \tag{7.2}$$

Fica claro então que, para condições iniciais nulas, isto é $\mathbf{x}(0) = 0$, tem-se que e relação entre estrada e saída é dada por um operador que relaciona $\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{u}(t)$. Aplicando-se a Transforma de Laplace nas equações de estado, tem-se:

$$s\mathbf{X}(s) - A\mathbf{X}(s) = (sI - A)\mathbf{X}(s) = B\mathbf{U}(s) + \mathbf{x}(0)$$

Para os valores de s onde a inversa de $(sI - A)$ existe, tem-se que

$$\mathbf{X}(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1}B\mathbf{U}(s)}_{\text{resposta forçada}} + \underbrace{(sI - A)^{-1}\mathbf{x}(0)}_{\text{resposta livre}} \tag{7.3}$$

Substituindo-se $X(s)$ na segunda equação do sistema (equação de saída) tem-se que:

$$\mathbf{Y}(s) = \underbrace{[C(sI-A)^{-1}B + D]}_{G(s)}\mathbf{U}(s) + C(sI-A)^{-1}\mathbf{x}(0) \tag{7.4}$$

onde $G(s)$ é uma matriz $p \times m$ (deve ter obviamente as mesmas dimensões da matriz D) conhecida como *matriz de funções de transferência* do SLIT. Deste modo, representamos o sistema MIMO como:

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ G_{p1}(s) & G_{p2}(s) & \cdots & G_{pm}(s) \end{bmatrix}$$

onde $G_{ij}(s)$ relaciona a entrada u_j com a saída y_i

Exemplo:

O sistema a seguir representa uma planta de controle de temperatura e vazão de ar, onde um termopar, que corresponde à saída 2, mede a temperatura (de 0 a 10 volts) e um sensor de vazão mássica, que corresponde à saída 1, mede a vazão (de 0 a 10 V). As entradas são a tensão aplicada em uma resistência (para aquecimento), que é a entrada 2, e a tensão aplicada em um ventilador, que é a entrada 1 (tudo de 0 a 10 V). Atrasos de transporte foram aproximados por Padè. A representação em espaço de estados é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -47.48 & -17.57 & -2.284 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 32.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5.919 & -2.013 & -0.7554 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -25.8 & -11.64 & -5.288 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.25 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 8.0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -0.05956 & 0.6204 & 0 & -0.04276 & 0.3421 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.013 & 8.36 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os autovalores deste sistema são: $\lambda_1 = -26.3852$, $\lambda_2 = -20.8333$, $\lambda_3 = -0.2660$, $\lambda_4 = -4.0000$, $\lambda_5 = -1.6961$, $\lambda_6 = -0.2227$, $\lambda_7 = -14.7059$, $\lambda_8 = -8.3333$ e $\lambda_9 = -2.7617$, o que mostra que se trata de um sistema estável. Este sistema também é controlável e observável, e a correspondente matriz de funções de transferência é:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{-0.935s+19.85}{s^3+47.48s^2+562.3s+146.2} & 0 \\ \frac{-0.04276s+0.171}{s^3+5.919s^2+8.053s+1.511} & \frac{-513.6s+4280}{s^3+25.8s^2+186.2s+338.4} \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

Usando a função **hinfnorm** do MATLAB, achamos que $\|G\|_\infty = 12.6475$, que é 22.0401 dB. A resposta ao degrau unitário em cada entrada é apresentada na Fig. 7.2. Vê-se claramente que o sistema é de fase não-mínima. Nota-se que resposta da entrada dois para a saída um é nula, isto porque a função de transferência relacionando estes sinais é nula. Isto porque a resistência de aquecimento não afeta a vazão de forma perceptível.

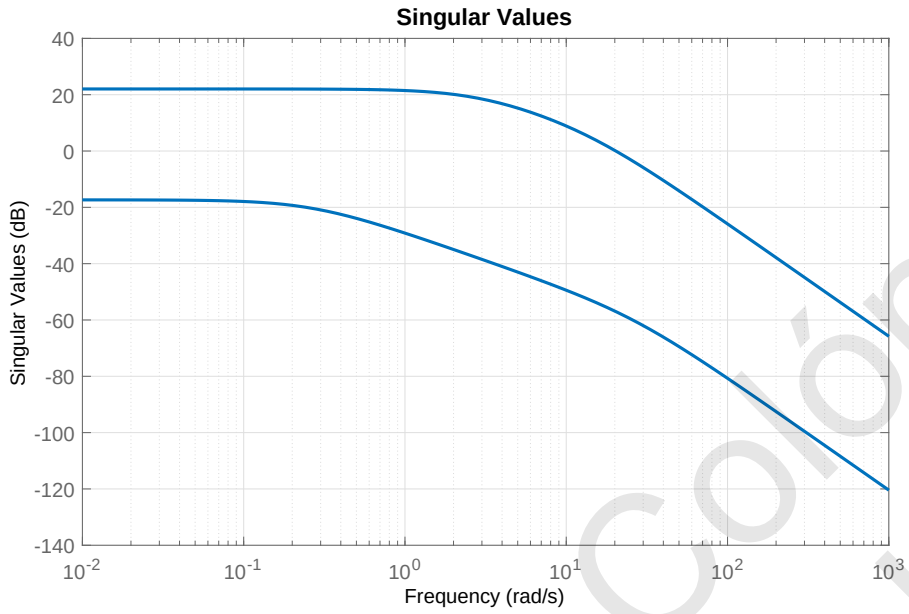

Figura 7.1: Valores Singulares da Matriz de $G(j\omega)$

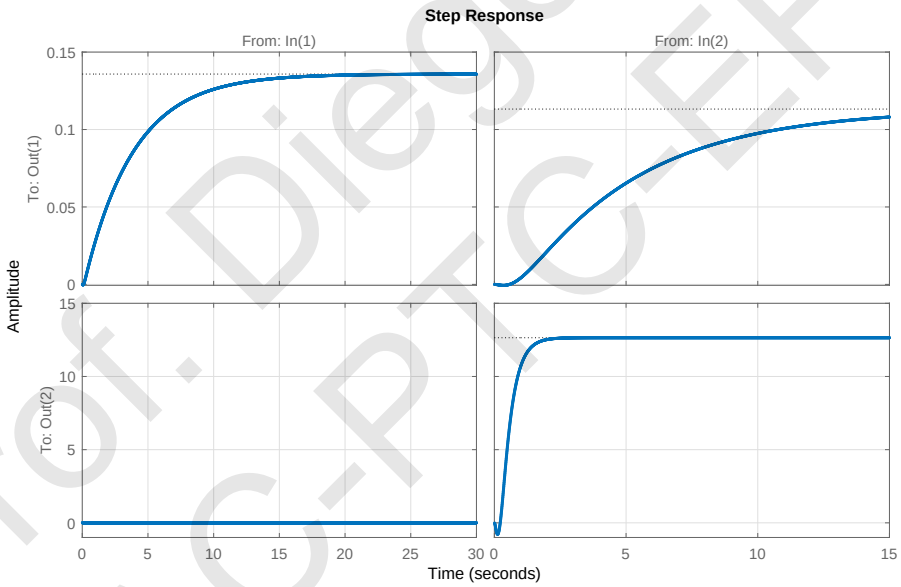

Figura 7.2: Resposta ao Degrau

7.2 Sistema em Malha Fechada MIMO

Um sistema em malha fechada MIMO tem um diagrama de blocos apresentado na Fig. 7.3. Este diagrama de blocos é similiar ao usado para sistemas SISO. Entretanto, a ordem da multiplicação de matrizes importa. Ou seja, tem-se que $GK \neq KG$. Deste modo, a expressão que relaciona saída com sinais de entrada é dada por:

$$\mathbf{Y} = G\mathbf{U} + G_d\mathbf{D} = GK\mathbf{E} + G_d\mathbf{D} = GK(\mathbf{R} - \mathbf{N} - F\mathbf{Y}) + G_d\mathbf{D}$$

considerando $F \equiv I$ (identidade), tem-se que:

$$(I + GK)\mathbf{Y} = GK\mathbf{R} - GK\mathbf{N} + G_d\mathbf{D}$$

de modo que, se multiplicarmos à esquerda nos dois lados da igualdade por $(I + GK)^{-1}$:

$$Y = \underbrace{(I + GK)^{-1}GK}_{T}\mathbf{R} - \underbrace{(I + GK)^{-1}GK}_{T}\mathbf{N} + \underbrace{(I + GK)^{-1}}_{S}G_d\mathbf{D}$$

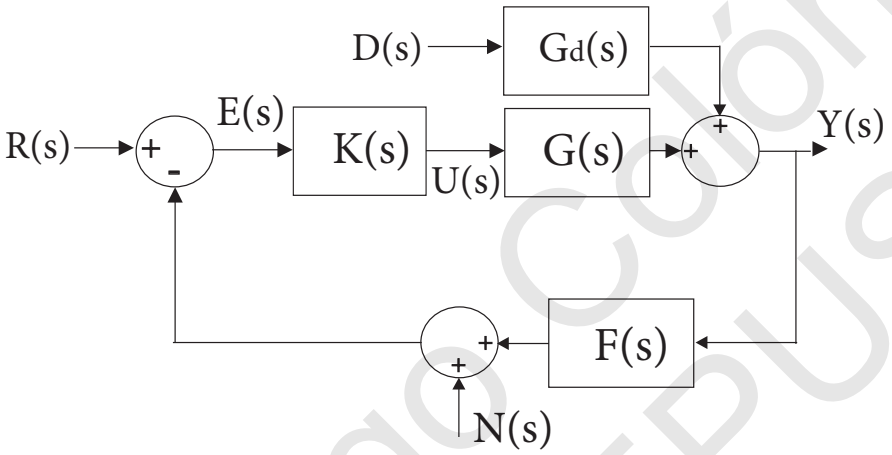

Figura 7.3: Diagrama de Blocos MIMO Usado em Controle Robusto

Para o caso do erro em função das entradas, temos que:

$$\mathbf{E} = \mathbf{R} - \mathbf{Y} = \mathbf{R} - T\mathbf{R} - T\mathbf{N} + SG_d\mathbf{D} = (I - T)\mathbf{R} - T\mathbf{N} + SG_d\mathbf{D} = S\mathbf{R} + SG_d\mathbf{D} - T\mathbf{N}$$

Deste modo, supondo, por facilidade que $G_d \equiv 1$, então temos que:

$$\mathbf{E} = S\mathbf{R} + S\mathbf{D} - T\mathbf{N}$$

Sabemos que a norma induzida da matriz $S(j\omega)$ é dada por:

$$\|\mathbf{S}(j\omega)\|_2 = \bar{\sigma}(S(j\omega)) = \max_{U \neq 0} \frac{\|S(j\omega)\mathbf{U}(j\omega)\|_2}{\|\mathbf{U}(j\omega)\|_2}$$

onde U é um vetor arbtrário em função da frequência. Em particular, $\mathbf{R}(j\ omega)$ poderia ser um vetor de exponenciais complexas do tipo $A_i e^{\omega t + \phi_i} = A_i e^{\phi_i} e^{\omega t}$, que é simplesmente um vetor complexo multiplicado por $e^{\omega t}$:

$$\|\mathbf{E}(j\omega)\|_2 \leq \bar{\sigma}(S(j\omega))\|\mathbf{R}(j\omega)\|_2$$

Isto significa que o máximo valor singular fornece, para cada frequência, o máximo ganho, que corresponde a uma determinada direção. Se o projeto do controlador $K(j\omega)$ for tal que faça com que $\bar{\sigma}(S(j\omega))$ seja pequeno nas baixas frequências, significa que se $\mathbf{r}(t)$ for um vetor de senóides de frequência ω que esta nesta faixa, então o vetor $\mathbf{R}(j\ omega)$ tem norma pequena nesta faixa, o que significa que as amplitudes dos números complexos também são pequenas nesta faixa. Isto singifica que o vetor de erros nesta faixa de frequência também tem amplitude pequena.

Não costuma se usar, em sistemas MIMO, nada parecido com o Método do Lugar das Raízes do Controle Clássico. Primeiramente porque os controladores MIMO do tipo $K(s)$ em geral dependem de muitos parâmetros a serem determinados pelo projetista. Além disso, até onde vai o conhecimento deste autor, não há regras simples para se esboçar esta lugar geométrico, mesmo que o controlador só dependesse de um parâmetro (o que já o limitaria muito).

Exemplo: Para o caso do sistema que estamos analisando, podemos plotar os valores singulares da matriz de funções de transferência $S(j\omega)$ para o caso de um controlador $K(s) = kI$, que é apresentado na Fig. 7.4. Este controlador é equivalente a realimentar a saída i na entrada i com ganho k. Os valores de k variam de 0.02 a 0.24 em intevalo de 0.02. Para o valor $k = 0.24$, temos que $\|S\|_\infty = 26.1542$ (em decibéis), e para $k = 0.25$, o sistema já fica instável. Neste último caso estável, teríamos $\bar{\sigma}(S(j\omega)) = -0.277\,\text{dB}$, o que representa uma atenuação muito pequena. Então, o erro estacionário deve ser grande nesta situação.

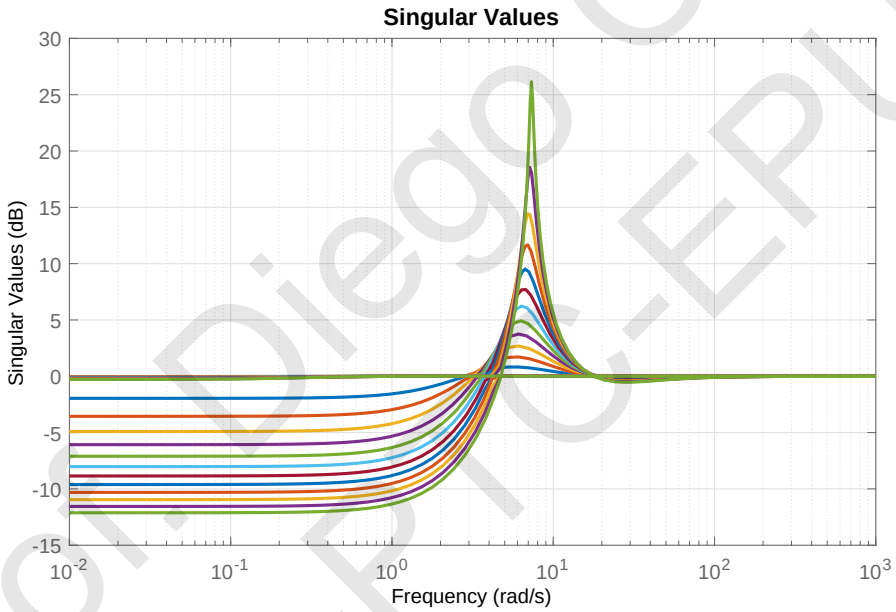

Figura 7.4: Valores Singulares da Matriz de $S(j\omega)$

O pico de ressonância indica a presença de um pólo próximo do eixo imaginário, como pode ser verificado na resposta ao degrau unitário, apresentado em Fig. 7.5.

De modo a ter baixo erro estacionário e menor sobressinal (além de maior roubustez) é necessário que $\bar{\sigma}(S(j\omega))$ seja pequeno nas baixas frequências e que $\|S\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_\omega \bar{\sigma}(S(j\omega))$ não seja alto (tipicamente, menor que 2). Pela definição de T e S, claramente se vê que $S + T = I$, e como $\bar{\sigma}(S)$ é uma norma, então:

$$|\bar{\sigma}(S) - \bar{\sigma}(T)| \leq \bar{\sigma}(S + T) = \bar{\sigma}(I) = 1 \leq \bar{\sigma}(S) + \bar{\sigma}(T)$$

Além disso, $L(j\omega) = G(j\omega)K(j\omega)$ tipicamente tende a zero para $\omega \to \infty$, o que faz com que $S(j\omega) \to I$, o que faz com que $\bar{\sigma}(T)(j\omega) \to 0$. Ainda existe uma identidade tal que:

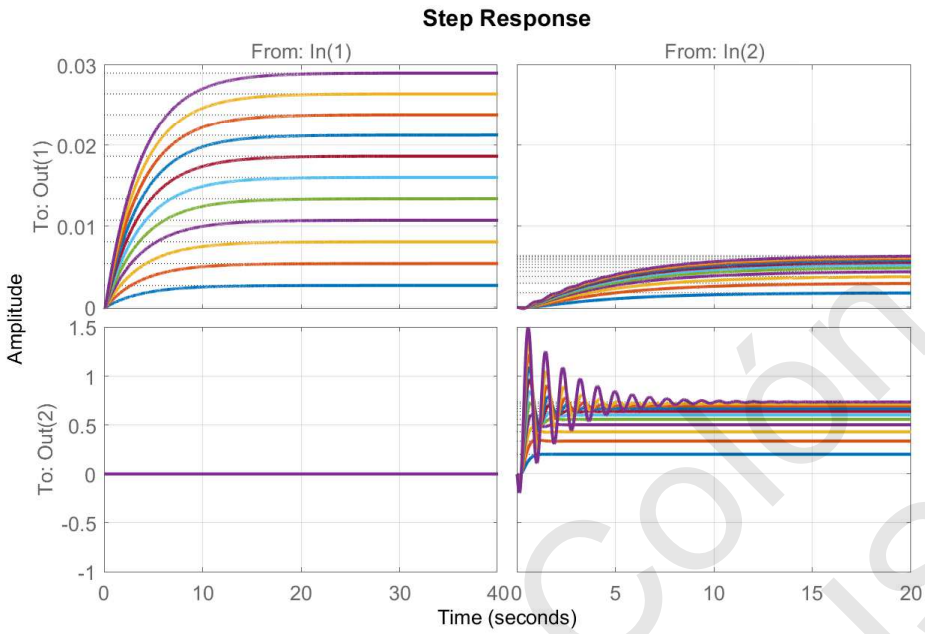

Figura 7.5: Resposta ao Degrau em Malha Fechada

$$\underline{\sigma}(L) - 1 \leq \frac{1}{\bar{\sigma}(S)} \leq \underline{\sigma}(L) + 1$$

deste modo, se queremos que o erro estacionário seja pequeno em baixas frequências, temos que fazer $\underline{\sigma}(L)$ alto nestas frequências, ou seja, o menor ganho deve ser suficientemente grande. Não basta então que $\bar{\sigma}(L)$, porque isso não garante que $\underline{\sigma}(L)$ também o seja.

Podemos também lançar mão do conceito de função peso $w_p(s)$, que aqui usaremos em letra minúscula para não confundir com matriz de peso $W_p(s)$. Deste modo, podemos impôr, como condição de desempenho:

$$\bar{\sigma}(S)(j\omega) < \frac{1}{|w_p(j\omega)|}$$

Por fim, podemos definir a banda-passante ω_B como sendo a frequência onde $\bar{\sigma}(S)(j\omega)$ cruza 0.707 (ou -3dB) na subida.

7.3 Critério de Nyquist Multivariável

Seja um sistema MIMO de modo que a matriz de funções de transferência em malha aberta é $L(s) = G(s)K(S)$. Suponha ainda que $L(s)$ possui uma representação em espaço de estados:

$$L(s) = C_{\text{ol}}(sI - A_{\text{ol}})^{-1}B_{\text{ol}} + D_{\text{ol}}$$

deste modo, os polos de malha aberta são as raízes do polinômio característico $\phi_{\text{ol}}(s) = \det(sI - A_{\text{ol}})^{-1}$. O sistema em malha fechada e dado pela realimentação do erro na entrada de L, ou seja, tem-se que:

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_{\text{ol}}x + B_{\text{ol}}(r - y) \\ y &= C_{\text{ol}}x + D_{\text{ol}}(r - y) \end{cases}$$

de modo que se isolarmos y, teremos $(I - D_{\text{ol}})y = C_{\text{ol}}x + D_{\text{ol}}r$, de modo que o sistema em malha fechada fica com a seguinte realização em espaço de estados:

$$\dot{x} = \underbrace{[A_{\text{ol}} - B_{\text{ol}}(I - D_{\text{ol}})^{-1}C_{\text{ol}}]}_{A_{\text{cl}}} x + \underbrace{B_{\text{ol}}[I - (I - D_{\text{ol}})^{-1}D_{\text{ol}}]}_{B_{\text{cl}}} r$$

de modo que o polinômio característico em malha fechada é $\phi_{\text{cl}}(s) = \det(sI - A_{\text{cl}})^{-1}$

Lema 7.3.1 (Fórmula de Schur)**.** *Dada uma matriz particionada F, tem-se que:*

$$\det \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} = \det F_{11} \det(F_{22} - F_{21}F_{11}^{-1}F_{12}) = \det F_{22} \det(F_{11} - F_{12}F_{22}^{-1}F_{21})$$

Deste modo, podemos escrever:

$$\det[I + L(s)] = \det[I + C_{\text{ol}}(sI - A_{\text{ol}})^{-1}B_{\text{ol}} + D_{\text{ol}}] = \det[(I + D_{\text{ol}}) + C_{\text{ol}}(sI - A_{\text{ol}})^{-1}B_{\text{ol}}] = \frac{\det(I + D_{\text{ol}})}{\det(sI - A_{\text{ol}})} \det[sI - A_{\text{ol}} + B_{\text{ol}}(I + D_{\text{ol}})^{-1}C_{\text{ol}}] = \det(I + D_{\text{ol}}) \frac{\det(sI - A_{\text{cl}})}{\det(sI - A_{\text{ol}})} \quad (7.7)$$

As seguintes modificações devem ser feitas: 1) o percurso de Nyquist se mantém igual ao do caso SISO; 2) deve-se traçar o correspondente gráfico polar de Nyquist para a função $\det(I + L(s))$; 3) N é o número de voltas em torno da origem [SP05].

O critério de estabilidade de Nyquist MIMO fica então enunciado como:

Teorema 7.3.1. *Se P é o número de polos de malha aberta de $L(s)$ no semiplano direito, o sistema em malha fechada é estável se e somente se o gráfico de Nyquist de* $\det(I + L(j\omega))$*:*

1. *Dá P voltas em torno da origem no sentido anti-horário*
2. *Não passa pela origem (ou seja, não tem polos de malha fechada no eixo imaginário)*

Exemplo: Para o sistema do exemplo anterior, considerando que o controlador é da forma $K(s) = kI$, tem-se os gráficos de Nyquist para valores de k até 0.25. Neste último caso, vê-se que o gráfico polar esta quase envolvendo a origem, o que indica o limiar de estabilidade. Esta situação corresponde aos valores altos de $\|S\|_\infty$.

7.4 Teorema do Pequeno Ganho

O teorema do pequeno ganho é um resultado que vale para sistemas MIMO que é uma condição suficiente (mas não necessária) para estabilidade em malha fechada. Em geral, é dito como sendo um resultado *conservador*, no sentido que acaba limitando demasiadamente o desempenho de um sistema quando aplicado para se garantir robustez de estabilidade.

Definição 7.4.1 (Raio Espectral)**.** *Define-se o raio espectral da função de transferência em malha aberta $L(j\omega)$ como sendo:*

$$\rho(L(j\omega)) = \max_i |\lambda_i(L(j\omega))|$$

ou seja, trata-se do máximo autovalor para cada frequência.

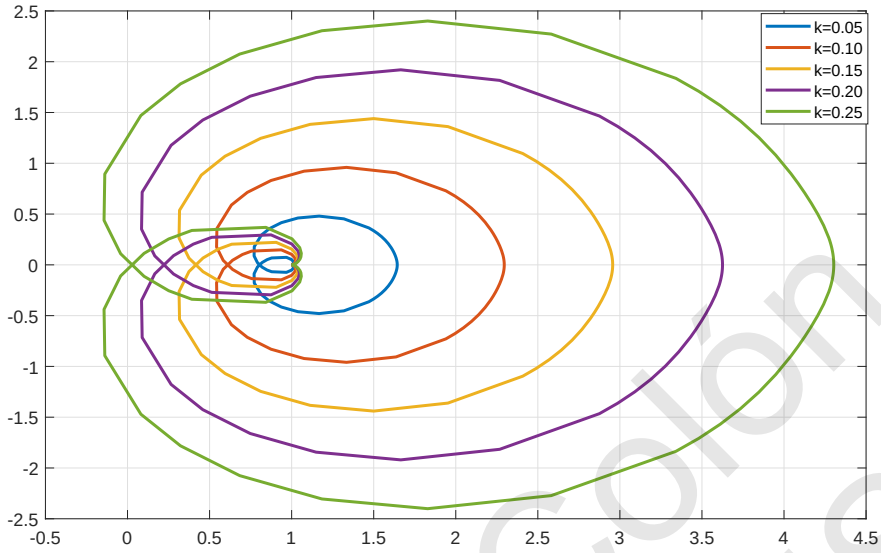

Figura 7.6: Diagrama de Nyquist para Vários Valores

Deste modo, pode-se enunciar o chamado:

Teorema 7.4.1 (Teorema do Raio Espectral). *Se $L(j\omega)$ é estável, o sistema em malha fechada é estável se:*

$$\rho(L(j\omega)) < 1, \text{ para qualquer } \omega$$

Demonstração. De fato, se $L(s)$ é estável, então $P = 0$, de modo que para ser ter instabilidade, é necessário que $\det(I + L(j\omega))$ envolva uma ou mais vezes a origem. Se isto acontece, então vai existir um $1 > \epsilon > 0$ tal que para alguma frequência $\bar{\omega}$, teremos que $\det(I + \epsilon L(j\bar{\omega})) = 0$. Isto ocorre porque ao fazer esta multiplicação é o mesmo que atenuar o função de transferência e malha aberta de modo que ela cruze a origem em algum ponto. Como o determinante é igual ao produto dos autovalores, então tem-se que:

$$\det(I + \epsilon L(j\bar{\omega})) = \Pi_i \lambda_i(I + \epsilon L(j\bar{\omega})) = 0$$

Sendo assim, para algum i, o correspondente autovalor deve ser nulo. Como $\lambda(I + \alpha A) = 1 + \alpha\lambda(A)$, então tem-se que para algum i, tem-se que $1 + \epsilon\lambda_i(L(j\bar{\omega})) = 0$, o que só é possível se $|\lambda_i(L(j\bar{\omega}))| \geq 1$. Como o raio espectral é o máximo autovalor para cada frequência, então, o único jeito de não se ter instabilidade é se o raio espectral for menor que um, o que é o resultado. ■

Para o caso SISO, tem-se que o raio espectral é simplesmente o módulo $|L(j\omega)|$, de modo que uma condição suficiente para se ter estabilidade para um sistema SISO é $|L(j\omega)| < 1$. Isto é equivalente a dizer que o gráfico de Nyquist da função de transferência em malha aberta nunca sai do círculo unitário. Se est critério fosse usado para encontrar um controlador $K(s)$, isto resultaria em um sistema muito restritivo, pois não permitiria, por exemplo, altos valores em baixas frequências, que são importantes para se ter erro estacionário pequeno.

Teorema 7.4.2 (Teorema do Pequeno Ganho). *Se $L(j\omega)$ é estável, o sistema em malha fechada é estável se:*

$$\|L(j\omega)\| < 1, \text{ para qualquer } \omega$$

onde esta normal de matriz pode ser qualquer norma desde que satisfaça $\|A.B\| \leq \|A\|\|B\|$.

O interessante do teorema do pequeno ganho é que ele vale para uma classe mais ampla de sistemas não-lineares, onde não se pode aplicar o critério de Nyquist.

7.4.1 Estabilidade Interna MIMO

A estabilidade interna de um sistema MIMO em malha fechada é equivalente a dizer que qualquer representação em espaço de estados deste sistema tem a origem (que é um ponto de equilíbrio) assintoticamente estável. Entretanto, da mesma forma que no caso SISO, o gráfico de Nyquist MIMO depende somente dos pólos de $L(s)$. Evidentemente, os pólos que se cancelam com zeros, correspondentes a modos não-controláveis e/ou não-observáveis não aparecem em $L(s)$, logo o gráfico de Nyquist independe deles.

Deste modo, não está garantida a estabilidade em MF se houver algum cancelamento de pólo com zero no semiplano direito e interno a $G(s)$, a $K(s)$ ou entre $G(s)$ e $K(s)$. Diz-se que um sistema em MF é *internamente estável* se para uma repreentação em espaço de estados do sistema, a origem do espaço de estados é assintoticamente estável para quaisquer sinais d_u e d_y e r [SP05], conforme Fig. 7.7

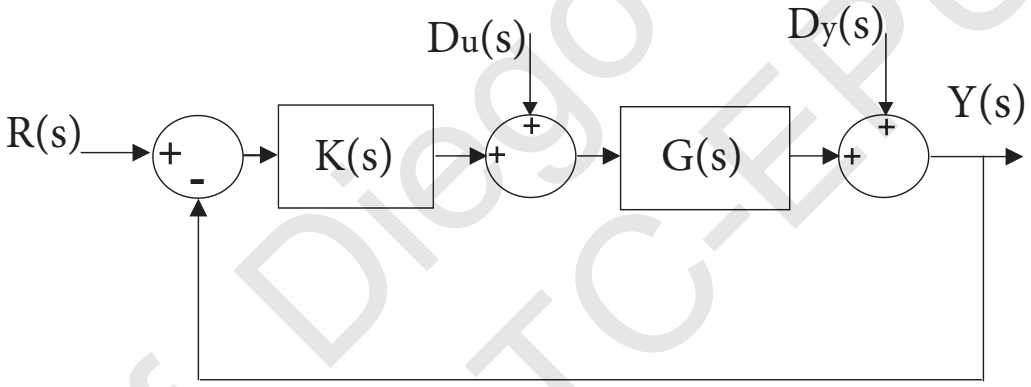

Figura 7.7: Diagrama de Blocos para Estabilidade Interna MIMO

Podemos dizer então que para que o sistema seja internamente estável, é necessário que:

1. Não haja polos internos nem a K nem a G que sejam ocultos e instáveis
2. Não haja cancelmento de pólos de K com zeros de G no semiplano direito (e vice-versa)
3. para $L = GK$, o critério de Nyquist resulte em $Z = 0$.

Teorema 7.4.3. *Suponha que G e K não tenham polos ocultos e instáveis. Então, o sistema realimentado na Fig. 7.7 é* internamente instável *se e só se as funções de transferência em malha fechada:*

$$GK(1+GK)^{-1}, \quad G(1+KG)^{-1}, \quad K(1+GK)^{-1}G, \quad -KG(1+KG)^{-1}$$

forem todas estáveis

Lema 7.4.1. *Dado um sistema em malha fechada com realimentação negativa onde G_1 é o ramo direto e G_2 é o ramo de realimentação, então vale a seguinte identidade:*

$$G_1(I + G_2G_1)^{-1} = (I + G_1G_2)^{-1}G_1$$

Demonstração. Se multiplicarmos $G_1(I + G_2G_1)^{-1} = (I + G_1G_2)^{-1}G_1$ à esquerda por $(I + G_1G_2)$ e à direita por $(I + G_2G_1)$, teremos que:

$$(I+G_1G_2)G_1(I+G_2G_1)^{-1} = G_1 \rightarrow (I+G_1G_2)G_1 = G_1(I+G_2G_1) \rightarrow G_1+G_1G_2G_1 = G_1+G_1G_2G_1$$

■

Deste modo, como GK está no ramo direto, então $GK(1 + GK)^{-1} = (1 + GK)^{-1}GK$

7.4.2 Família de Controladores Estabilizantes MIMO

Para o caso da Fig. 7.7 para sistemas MIMO, infelizmente a situação é mais complicada para se obter a família de controladores estabilizantes, pois é necessário encontrar fatorações coprimas da planta $G(s)$, ou seja, encontrar matrizes de funções de transferência $M(s)$ e $N(s)$ pertencentes ao espaço $\mathcal{H}_\infty$ e tal que $G(s) = N(s)M^{-1}(s)$ e os controladores são encontrados através da solução da equação diofantina:

$$U(s)N(s) + V(s)M(s) = I$$

e o controlador dado por $K(s) = U(s)V^{-1}(s)$ é um controlador estabilizante. O conjunto de todos os controladores estabilizantes para $G(s)$ são então dados por:

$$K_Q(s) = [U(s) + M(s)Q(s)][V(s) + N(s)Q(s)]^{-1}$$

onde $Q(s)$ é qualquer matriz de funções de transfência em $\mathcal{H}_\infty$.

Existe uma parametrização também para a fatoração coprima $G(s) = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$ similar à anterior. Neste caso, há formulas diretas par solução das equações diofantinas.