# Resolução - Exercícios - Cálculo IV - Aula 10 - Semana 26/10 – 30/10

**Exercício 1** (Passado da semana passada para esta!). *Obtenha o desenvolvimento em série de potências de $f(x)$ em torno de 0 e indique o raio de convergência:*

*a* $\sqrt{1-x^3}$

*b* $(1+x)^{-3}$

*c* $\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

*Solução.* Vamos obter a série de cada um dos itens:

a) No Exemplo 1 da Lista 10 vimos que

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^n, \quad |x| < 1.$$

Sendo assim, para todo $x$, com $|x| < 1$, tem-se

$$\sqrt{1-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n n!} (-x)^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^n.$$

Substituindo ma série anterior $x$ por $x^3$, com $|x| < 1$, Obtemos que o desenvolvimento em série de potências de $f(x) = \sqrt{1-x^3}$ é dado por

$$\sqrt{1-x^3} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n n!} x^{3n}$$

Para encontrar o raio de convergência aplicamos o critério inverso da razão:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-3)}{2^n n!}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{(2n-1)} = 1.$$

Por fim, concluímos que o raio de convergência da série de potências de $f(x)$ é $R = 1$.

b) Da Série Binomial tratada nas notas da Aula 10 e tomando $\alpha = -3 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ obtemos que

$$f(x) = (1+x)^{-3} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-3}{n} x^n$$

onde $\binom{-3}{n} = \frac{(-3-(n-1))(-3-(n-2))\cdots(-3-2)(-3-1)(-3)}{n!} = \frac{(-2-n)(-1-n)\cdots(-5)(-4)(-3)}{n!}$
com intervalo de convergência $]-1, 1[$. Concluímos que a série tem raio de convergência $R = 1$

**Outro modo de resolução:** seja $f(x) = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ para $|x| < 1$. Como $f''(x) = 2(1+x)^{-3}$, temos

$$(1+x)^{-3} = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right)'' = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+2)(m+1)}{2} x^m.$$

c) Aplicando a Série Binomial de para $\alpha = -\frac{1}{3}$ obtemos que

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{3}} = (1+(-x))^{-\frac{1}{3}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{3}}{n}(-x)^n = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{3}}{n}x^n.$$

Substituindo $x$ por $x^2$ obtemos que

$$f(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{3}}{n}x^{2n}.$$

onde $\binom{-\frac{1}{3}}{n} = \frac{(-\frac{1}{3}-(n-1))(-\frac{1}{3}-(n-2))\cdots(-\frac{1}{3}-2)(-\frac{1}{3}-1)(-\frac{1}{3})}{n!} = \frac{(\frac{2}{3}-n)(\frac{5}{3}-n)\cdots(-\frac{7}{3})(-\frac{4}{3})(-\frac{1}{3})}{n!}$
E com raio de convergência $R = 1$.

□

**Exercício 2.** *Utilize uma série infinita para aproximar o número dado com quatro decimais:*

*a* $\int_0^{1/2} \frac{\ln(x+1)}{x}dx$

*b* $\int_0^{1/2} \cos\left(x^2\right) dx$

*c* $\int_0^{1} \frac{\sin(x)}{x}dx$

*d* $\int_0^{1} \frac{1-e^{-x}}{x}dx$

*Solução.* a Dada a série de Taylor $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, $x \in (-1,1]$, podemos obter a série desejada dividindo a expressão por $x$ e tomando a integral. Com isso temos:

$$\int_0^x \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^2}$$

Para $x = 1/2$ temos o resultado desejado.

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{n^2}$$

Uma série convergente pelo critério de Leibniz. Para quatro casas decimais de precisão, queremos $|a_{n+1}| < 10^{-4}$, o que acontece para $n = 7$ pois

$$|a_8| = \left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^8\frac{1}{(8)^2} = \frac{1}{256}\frac{1}{64} \approx 6.1\cdot 10^{-5} < 10^{-4}$$

Somando então os termos, obtemos a aproximação:

$$\int_0^{1/2}\frac{\ln(1+x)}{x}dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{72} - \frac{1}{256} + \frac{1}{800} - \frac{1}{2304} + \frac{1}{6272} \approx 0.4485$$

b Vale:

$$\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!}$$

e podemos integrar esta função termo a termo, resultando em

$$S \doteq \int_0^{1/2}\cos(x^2)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left.\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}\right|_0^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{4n+1}(4n+1)(2n)!}$$

Série respeitando as condições do critério de Leibniz. Nesse caso, se encontrarmos $n$ grande o suficiente para que $|a_{n+1}| < \frac{1}{10^4}$, poderemos aproximar $S$ pela soma parcial $S_n$ com precisão

$$|S - S_n| \leq |a_{n+1}| < \frac{1}{10^4}.$$

Como

$$a_2 = \frac{1}{2^9 \cdot 9 \cdot 4!} = \frac{1}{110592} < \frac{1}{10^4},$$

segue que $\int_0^{1/2} \cos(x^2) dx$ é aproximada por $S_1$ com erro inferior a $10^{-4}$.

c Sabemos que vale:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+1}}{x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}\end{aligned}$$

E podemos integrar essa função termo a termo obtendo:

$$\begin{aligned}S &= \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left. \frac{x^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)^2} \right|_0^1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+1)^2}\end{aligned}$$

A ultima serie é uma serie satisfazendo as condições do critério de Leibniz. Assim estamos interessados em encontrar $n$ tal que $|a_{n+1}| < \frac{1}{10^4}$ Para aproximar $S$ pela soma parcial $S_n$ com

$$|S - S_n| \leq |a_{n+1}| < \frac{1}{10^4}$$

Como $a_2 = \frac{1}{3000} > 10^{-4}$, $n = 1$ não serve. Mas como $a_3 = \frac{1}{35280} < 10^{-4}$, segue que $S_2$ é uma aproximação de $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$ com quatro casas decimais de precisão.

d Vale

$$-e^{-x} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!}$$

Assim obtemos que

$$\frac{1 - e^{-x}}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{n!}$$

Integrando termo a termo obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \left. \frac{x^n}{n} \right|_0^1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)n}\end{aligned}$$

Série que satisfaz o critério de Leibniz. Assim podemos aproximar $S$ pela soma parcial $S_n$ tal que

$$|S - S_n| \leq |a_{n+1}| < \frac{1}{10^4}.$$

Basta observar que para $n = 6$ obtemos que $\frac{1}{7!7} = \frac{1}{3580} < 10^{-4}$, daí temos

$$|S - S_6| \leq \frac{1}{(7!)7} < \frac{1}{10^4}.$$

$\square$