



Mecânica I – PME3100

Aulas 19 e 20

Dinâmica do Ponto

**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica****9.1 – Leis Fundamentais da Mecânica Clássica**

Os princípios de Newton podem ser condensados nas duas leis seguintes:

1ª Lei:

Existem referenciais (chamados absolutos ou inerciais), em relação aos quais um ponto material de massa m sujeito a forças de resultante $\vec{F}$ move-se com aceleração $\vec{a}$, tal que:

$$m \vec{a} = \vec{F}$$

Equação Fundamental da Dinâmica

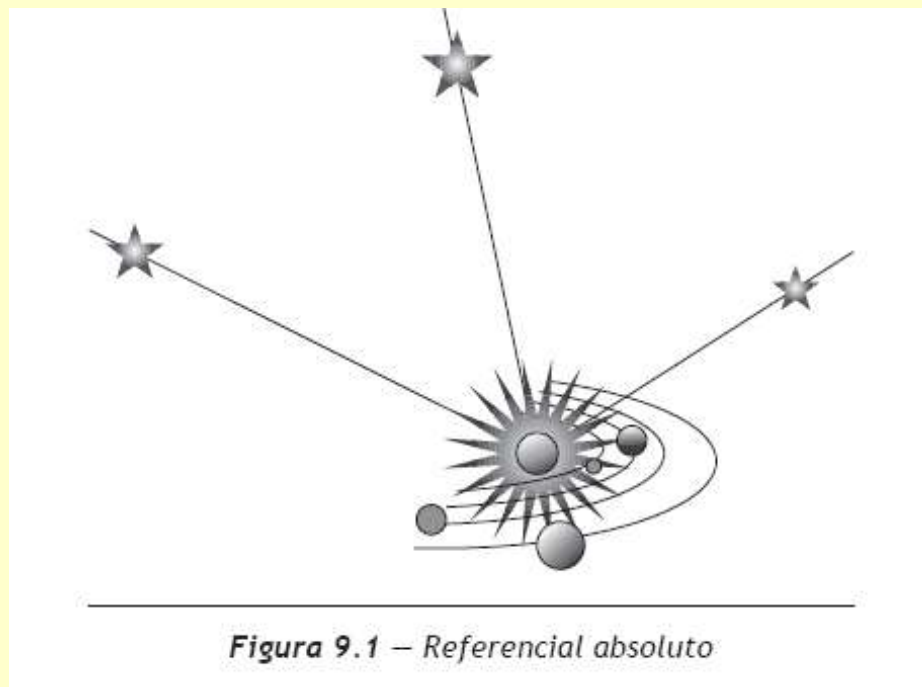
Aqui está contemplado o princípio da inércia



Capítulo 9

**9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica**

**9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica**



Fonte: França, L. N. F. e Matsumura, A. Z.
2011, *Mecânica Geral*, 3ª edição,
Editora Edgard Blücher Ltda.



Capítulo 9

**9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica**

**9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica**

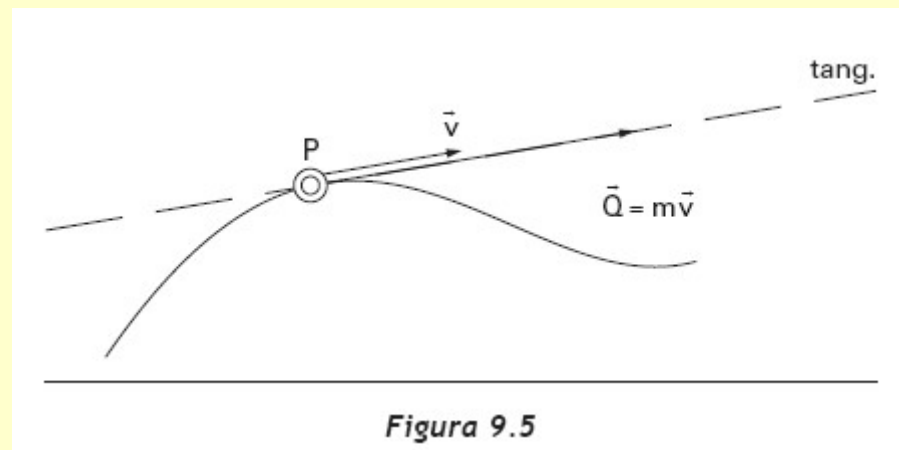
2ª Lei (Princípio da Ação e Reação):

Já visto no Capítulo 4, item 4.2

**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica****9.3 – Teoremas Gerais da Dinâmica****9.3 .1– Quantidade de Movimento**

Definição: Quantidade de Movimento de P

$$\bar{Q} = m\bar{v}$$



**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica**

$$\bar{Q} = m\bar{v}$$

Derivando em relação ao tempo

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \frac{dm}{dt}\bar{v} + m\frac{d\bar{v}}{dt}$$

Na Mecânica Clássica, ***m*** cte.

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a} \quad \Rightarrow \quad \dot{\bar{Q}} = m\bar{a}$$

*A derivada (em relação ao tempo) da quantidade de movimento de **P** é igual à resultante das forças que agem neste ponto.*

**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica****9.3.2– Trabalho e potência**

$\vec{F} \Rightarrow$ Força que num certo instante t , está aplicada num ponto P

$\vec{v} \Rightarrow$ Velocidade de P no instante t

Admita que a força é aplicada sempre no mesmo ponto, P ,
de um corpo

Capítulo 99.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica

Definições:

$$Pot = \bar{F} \cdot \bar{v}$$

Potência da força $(\bar{v}, \bar{F})$ no instante t

$$d\tau = \bar{F} \cdot \bar{v} dt$$

Trabalho elementar da força no instante t

$$\tau = \int_{t_0}^t \bar{F} \cdot \bar{v} dt$$

Trabalho da força num intervalo de tempo

**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica**

Se a força for uma função conhecida da posição ocupada por P na trajetória, diz-se que a força é “posicional”

$$\tau = \int_{P_0}^P \bar{F} \cdot dP$$

que, em geral, depende do
caminho percorrido

$P_0 \Rightarrow$ posição inicial

$P \Rightarrow$ posição final (genérica)

**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica****9.3.3– Função Potencial e Energia Potencial**

Se a força $\vec{F}$ que atua no ponto material for tal que o trabalho elementar $\vec{F} \cdot d\mathbf{P}$ seja o diferencial de uma função $U(\mathbf{P})$, chamaremos $U(\mathbf{P})$ *função potencial* e diremos que a força $\vec{F}$ é *conservativa*.

Neste caso o *trabalho* realizado pela força *independe da trajetória*.

$$\tau = \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\mathbf{P} = \int_{P_0}^P dU(\mathbf{P}) = U(\mathbf{P}) - U(\mathbf{P}_0)$$

**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica****Exemplo – Força Peso**

Referencial $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$, sendo o eixo $O\bar{k}$ orientado na vertical ascendente

$$P = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

$$\bar{F} = -mg\bar{k} \quad \text{e}$$

$$dP = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$$

$$\tau = \int_{P_0}^P \bar{F} \cdot dP = -mg \int_{z_0}^z dz = -mg(z - z_0)$$

$$\tau = -mg(z - z_0)$$

**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica****Exemplo – Força Elástica**

Ponto P , ligado a uma mola “linear” a qual está presa a um ponto fixo O

A mola exerce, sobre P , a força

$$\vec{F} = -K(r - l)\vec{u}$$

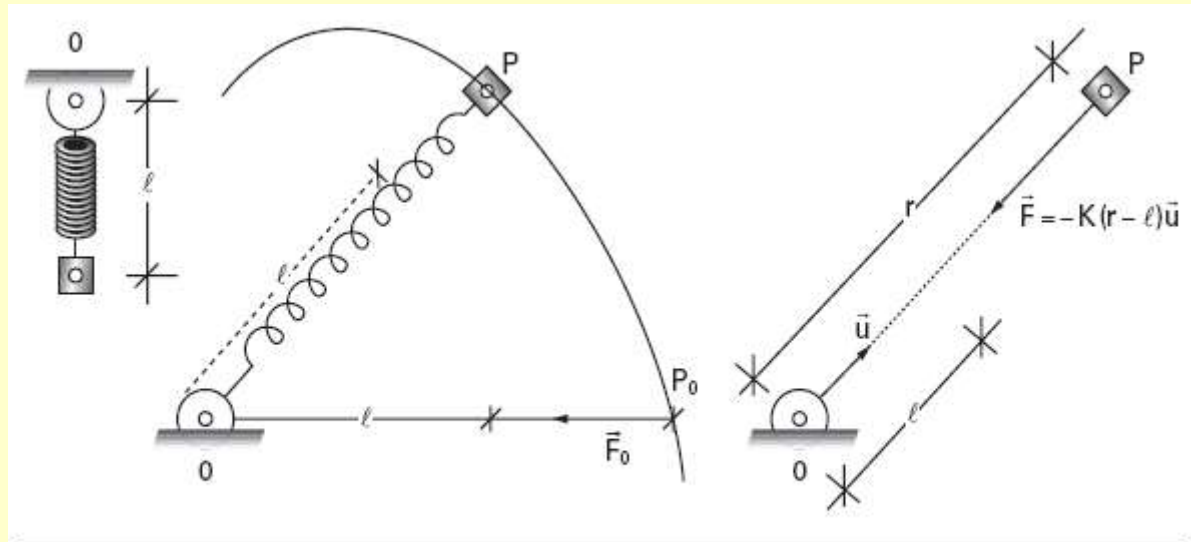


Figura 9.6 – Ponto sujeito à força elástica

**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica**

Sendo $P - O = r\bar{u} \quad \Rightarrow \quad dP = dr\bar{u} + r d\bar{u}$

Como $\bar{u}$ tem módulo constante, ele é ortogonal à sua derivada $d\bar{u}$ ($r d\bar{u} \cdot \bar{u} = 0$). Resulta para o trabalho elementar

$$\bar{F} \cdot dP = -K(r - l)dr$$

uma vez que l é constante, podemos escrever

$$\bar{F} \cdot dP = -K(r - l)d(r - l)$$

**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica**

O trabalho será dado pela integral definida

$$\tau = - \int_{r_0}^r K(r-l) d(r-l) = -\frac{1}{2} K[(r-l)^2 - (r_0-l)^2]$$

$$\tau = -\frac{1}{2} K[(r-l)^2 - (r_0-l)^2]$$

**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica****9.3 .4– Energia Cinética**

Definição: *Energia Cinética* de $\mathbf{P} \Rightarrow$

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

Partindo da Equação Fundamental da Dinâmica

$$m\bar{a} = \bar{F} \quad \Rightarrow \quad m \left[\dot{v}\bar{t} + \left(\frac{v^2}{\rho} \right) \bar{n} \right] = \bar{F}$$

(aceleração em componentes intrínsecas)

**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica**

$$m \left[\dot{v} \bar{t} + \left(\frac{v^2}{\rho} \right) \bar{n} \right] = \bar{F}$$

Multiplicando escalarmente por $\bar{t}$

$$m \dot{v} \bar{t} \cdot \bar{t} + m \left(\frac{v^2}{\rho} \right) \bar{n} \cdot \bar{t} = \bar{F} \cdot \bar{t} \quad \Rightarrow \quad m \dot{v} = \bar{F} \cdot \bar{t}$$

Multiplicando escalarmente por v

$$m v \dot{v} = \bar{F} \cdot v \bar{t} = \bar{F} \cdot \bar{v}$$

**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica**

$$mv\dot{v} = \bar{F} \cdot v\bar{t} = \bar{F} \cdot \bar{v}$$

sendo $\dot{E} = mv\dot{v} \Rightarrow \dot{E} = \bar{F} \cdot \bar{v} = \frac{dE}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v}$

$$dE = \bar{F} \cdot \bar{v}dt \Rightarrow dE = \bar{F} \cdot dP$$

Integrando entre os instantes t_0 e t , aos quais correspondem as posições P_0 e P , na trajetória, vem:

$$E - E_0 = \int_{P_0}^P \bar{F} \cdot dP$$

**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica**

$$E - E_0 = \int_{P_0}^P \bar{F} \cdot dP = \tau$$

Teorema da Energia (Cinética)

*A variação de energia cinética de um **ponto material**, num intervalo de tempo, é igual ao trabalho realizado, no mesmo intervalo, pela resultante das forças que nele atuam.*

**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica**

Energia Potencial e Trabalho de uma Força Conservativa

Força conservativa: energia potencial associada a ela, $V(P)$, definida como o oposto da sua função potencial $U(P)$

$$\tau = \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot dP = \int_{P_0}^P dU(P) = U(P) - U(P_0)$$

slide 10

$$V(P) = -U(P)$$



$$\tau = U(P) - U(P_0) = V(P_0) - V(P)$$

**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica**

Do Teorema da Energia, sabemos que:

$$E - E_0 = \tau$$

Do *slide* anterior, vimos que:

$$\tau = V(P_0) - V(P) = V_0 - V$$

Igualando as equações anteriores:

$$E + V = E_0 + V_0$$

Princípio da Conservação da Energia Mecânica

*Quando um ponto material estiver sujeito apenas a **forças conservativas**, sua **energia total**, isto é, cinética mais potencial, **se conserva**.*



Capítulo 9

9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica

9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica

Ainda:

$$\tau = \int_{P_0}^P \bar{F} \cdot dP = V_0 - V$$

**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica**

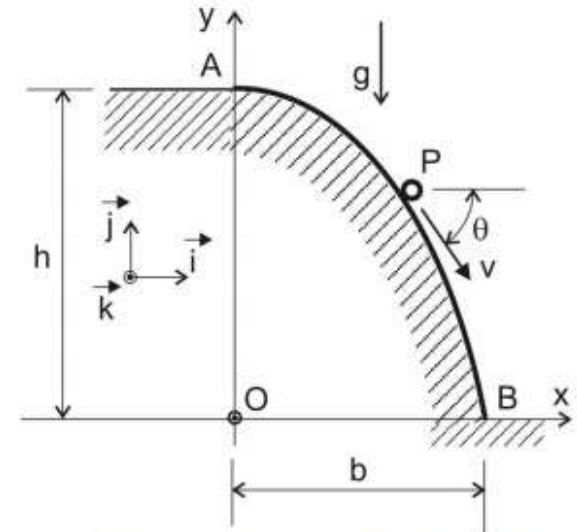
P3 – 2014 – Questão 1

Questão 1 (3,0 pontos): O ponto material P , de massa m , desloca-se no plano vertical Oxy sob a ação da gravidade, deslizando sem atrito sobre um “tobogã”, representado na figura pela curva plana AB , definida pela equação

$y = h \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right)$. No instante inicial, o ponto P é largado na posição A , com uma

velocidade horizontal v_0 para a direita. Nestas condições:

- faça o diagrama de corpo livre do ponto P , e obtenha a relação das componentes a_x e a_y da sua aceleração, em função de θ e dos esforços aplicados;
- obtenha o valor máximo da velocidade inicial v_0 para que o ponto P não perca contato com o tobogã em nenhum instante durante o movimento.
- indique as forças que realizam trabalho durante o movimento, justificando a resposta, e obtenha a expressão do módulo da velocidade que o ponto P terá na posição B , em função da velocidade inicial e dos dados da figura;
- expresse a velocidade de P em função de θ e determine os versores de Frenet $\vec{t}$ e $\vec{n}$.

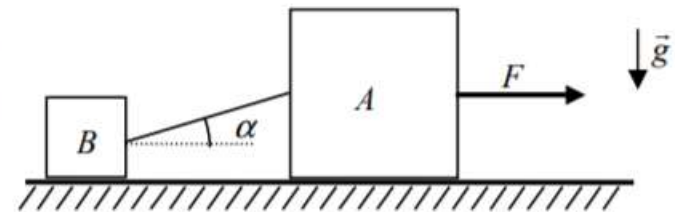


**Capítulo 9****9.1 Leis Fundamentais da
Mecânica Clássica****9.3 Teoremas Gerais da
Dinâmica**

P3 – 2018 – Reoferecimento – Questão 1

1ª Questão (3,0 pontos). Dois blocos A e B , de massas m_A e m_B , estão ligados por uma corda inextensível, movendo-se sobre um plano horizontal sob a ação de uma força $\vec{F} = F\vec{i}$ aplicada ao bloco A . Sabe-se que o coeficiente de atrito cinético entre o plano horizontal e as superfícies dos blocos é μ e que a corda se rompe quando sujeita a uma tração de módulo T_r . Considerando a condição limite em que a corda está na iminência de se romper, pede-se:

- (d) desenhar os diagramas de corpo livre dos blocos;
- (e) determinar a aceleração dos blocos;
- (f) determinar F .





PERGUNTAS?

