Universidade de São Paulo

SLC0608 - Cálculo II
Resolução da Lista 1 - Exercícios do 21 ao 55

Clara Andrade Sapio

2 de novembro de 2020

Questão 21

a) $f(x,y) = \frac{2x^4-xy+1}{xy}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(8x^3-y)xy-(2x^4-xy+1)y}{(xy)^2} = \frac{8x^4y-2x^4y-y}{x^2y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{6x^4-1}{x^2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(-x)xy-(2x^4-xy+1)x}{(xy)^2} = \frac{-x^2y-2x^5+x^2y-x}{x^2y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x^4-1}{xy^2}$$

b) $f(x,y) = arctg(\frac{x}{y})$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x(-1)y^{-2} \cdot \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

c) $f(x,y) = sen(x^2-y^3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xcos(x^2-y^3)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2cos(x^2-y^3)$$

d) $f(x,y) = \int_x^y g(t)dt$

Do Cálculo 1, temos:

$$\frac{d}{dt}\int g(t)dt = g(t)$$

Se nos limites da integral tivéssemos funções, o Teorema Fundamental do Cálculo teria validade da mesma forma, mas com a aplicação da derivada sobre a primitiva calculada nos limites de integração.

Como estamos trabalhando com uma função f de duas variáveis definida pela integral de uma função de g de uma só variável (t), as derivadas parciais de f seguirão os princípios do Teorema Fundametal (Cálculo 1). Para ficar mais claro, suponha que a primitiva da integral de $g(t)dt$ seja uma função $p(t)$. Teríamos então:

$$f(x,y) = [p(t)]_{t=x}^{t=y}$$

Portanto,

$$f(x,y) = p(y) - p(x)$$

Encontrando as derivadas parciais de f, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial[p(y) - p(x)]}{\partial x}$$

Como $p(y)$ é função apenas de y, esse termo é constante para a derivada parcial em relação a x e então $\frac{\partial[p(y)]}{\partial x} = 0$ (derivada de constante é zero). Sobra então:

$$\frac{\partial[-p(x)]}{\partial x}$$

Como definimos p(x) como a primitiva de $g(t)$ calculada em x, o que estamos fazendo agora é derivar a integral de g calculada em x. Em analogia com o resultado expresso pelo Teorema Fundamental do Cálculo, o resultado dessa operação é:

$$\frac{\partial[-p(x)]}{\partial x} = -g(x)$$

Portanto:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -g(x)$$

Da mesma forma:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial[p(y) - p(x)]}{\partial y}$$

Note que $p(x)$ é função apenas de x e esse termo é constante para a derivada parcial em relação a y e então $\frac{\partial[p(x)]}{\partial y} = 0$ (derivada de constante é zero). Sobra então:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial[p(y)]}{\partial y}$$

Estamos derivando a integral de $g(t)$ calculada em y ($p(y)$). Logo, em analogia com o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos a própria função g calculada em y:

$$\frac{\partial[p(y)]}{\partial y} = g(y)$$

Portanto:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = g(y)$$

e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^3 - z^4} = (x^2 + y^3 - z^4)^{1/2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - z^4)^{-1/2} \cdot 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3 - z^4}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - z^4)^{-1/2} \cdot 3y^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2}{\sqrt{x^2 + y^3 - z^4}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - z^4)^{-1/2} \cdot (-4z^3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-2z^3}{\sqrt{x^2 + y^3 - z^4}}$$

f) $f(x, y, z, u, v) = xyzu^2v^4$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yzu^2v^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xzu^2v^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xyu^2v^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2xyzuv^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 4xyzu^2v^3$$

Questão 22

$$f(x, y) = x^{x^{x^y}} + sen(\pi x)[x^2 + sen(x + y) + e^x cos^2 y]$$

A derivada parcial de f em relação à y é:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial[x^{x^{x^y}} + sen(\pi x)[x^2 + sen(x + y) + e^x cos^2 y]]}{\partial y}$$

Como a derivada da soma é a soma da derivada, reescrevêmos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial[x^{x^{x^y}}]}{\partial y} + \frac{\partial[sen(\pi x)[x^2 + sen(x + y) + e^x cos^2 y]]]}{\partial y}$$

Analisando a primeira parcela da função $f(x,y)$, note que podemos escrevê-la da seguinte maneira:

$$x^{x^{x^y}} = e^{ln(x^{x^{x^y}})} = e^{x^{x^y} ln(x)}$$

Logo:

$$\frac{\partial[x^{x^{x^y}}]}{\partial y} = \frac{\partial[e^{x^{x^y} ln(x)}]}{\partial y}$$

Agora temos que aplicar a Regra da Cadeia. Seja $u(x,y) = x^{x^y} ln(x)$. Temos que:

$$\frac{\partial[e^{x^{x^y} ln(x)}]}{\partial y} = \frac{\partial e^u}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = e^u \cdot \frac{\partial[x^{x^y} ln(x)]}{\partial y} = e^{x^{x^y} ln(x)} \cdot ln(x) \frac{\partial[x^{x^y}]}{\partial y}$$

Aplicando ao ponto $(1,2)$, temos:

$$e^{1^{1^2} ln(1)} \cdot ln(1) \frac{\partial[x^{x^y}]}{\partial y}$$

Sem precisamos efetuar essa derivada parcial que sobrou, sabemos que o resultado disso tudo será zero, pois $ln(1) = 0$ e $ln(1)$ multiplica toda a expressão.

Agora analisando a parte restante da expressão de $f(x,y)$, temos:

$$\frac{\partial[sen(\pi x)[x^2 + sen(x+y) + e^x cos^2 y]]}{\partial y} = sen(\pi x) \cdot \frac{\partial[x^2 + sen(x+y) + e^x cos^2 y]}{\partial y}$$

Sem efetuarmos a derivada parcial, podemos aplicar o ponto $(1,2)$ na expressão fora da derivada. Obtemos então:

$$\frac{\partial[sen(\pi x)[x^2 + sen(x+y) + e^x cos^2 y]]}{\partial y} = sen(\pi \cdot 1) \cdot \frac{\partial[x^2 + sen(x+y) + e^x cos^2 y]}{\partial y}$$

Sabemos que $sen(\pi \cdot 1) = sen(\pi) = 0$ e esse termo multiplica toda a expressão seguinte. Assim, temos que no ponto (1,2):

$$\frac{\partial[sen(\pi x)[x^2 + sen(x+y) + e^x cos^2 y]]}{\partial y} = 0$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 0$$

Questão 23

a) $f(x,y) = 2x + 3y^2 \qquad P = (2, 1, f(2,1))$

$$x_0 = 2 \qquad y_0 = 1$$

Como a intersecção é com o plano $x = 2$, o coeficiente angular da reta será dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 6 \cdot 1 = 6$$

Portanto, o coeficiente angular da reta é 6.

b)

$$x_0 = 2 \qquad\qquad y_0 = 3$$

O coeficiente angular da reta da intersecção de f com o plano y = -1 será dada pela derivada parcial de f em relação a x no ponto dado:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Portanto, o coeficiente angular da reta é 2.

c)

O plano tangente à $f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0, z_0) é dado por:

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Onde f_x é a derivada parcial de f em relação à x e f_y é a derivada parcial de f em relação à y.

O ponto em questão é $(2, -1, f(2, -1))$, assim:

$$x_0 = 2, \quad y_0 = -1, \quad z_0 = f(2, -1) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)^2 = 7$$

$$f_x = 2 \Rightarrow f_x(2, -1) = 2$$

$$f_y = 6y \Rightarrow f_y(2, -1) = -6$$

A equação do plano tangente então será:

$$z = 7 + 2(x - 2) + (-6)(y - (-1)) \Rightarrow z = 7 + 2x - 4 - 6y - 6$$

Portanto:

$$z = -3 + 2x - 6y$$

<u>Questão 24</u>

Observação: Lembre-se de que o vetor gradiente de uma função $f(x, y, z)$ é dado por:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Portanto, o vetor gradiente de f é:

$$\nabla f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

b) $f(x,y,z) = xarctg(y+z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = arctg(y+z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{1}{1+(y+z)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = x\frac{1}{1+(y+z)^2}$$

Portanto, o vetor gradiente de f é:

$$\nabla f = \left(arctg(y+z), \frac{x}{1+(y+z)^2}, \frac{x}{1+(y+z)^2}\right)$$

c) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2-y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{x^2-y^2}$$

Portanto, o vetor gradiente de f é:

$$\nabla f = \left(2xe^{x^2-y^2}, -2ye^{x^2-y^2}\right)$$

Questão 25

Seja $g(x,y) = x - cy$. Portanto, temos que $u(x,y) = f(g(x,y))$. Antes de aplicarmos a Regra da Cadeia, vamos avaliar as derivadas parciais de g em relação às suas variáveis:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial [x - cy]}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial [x - cy]}{\partial y} = -c$$

Aplicando a Regra da Cadeia, temos:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g} \cdot 1 = \frac{\partial f}{\partial g}$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial g} \cdot (-c) = -c \cdot \frac{\partial f}{\partial g}$$

Então teremos:

$$u_y + cu_x = -c \cdot \frac{\partial f}{\partial g} + c \cdot \frac{\partial f}{\partial g} = 0$$

Como se queria demonstrar.

Questão 26

a) $z(t) = f(x(t), y(t))$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ou

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t)$$

Sendo o vetor gradiente de f dado por:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Podemos escrever a expressão de $z'(t)$ como:

$$z'(t) = \nabla f \cdot (x'(t), y'(t))$$

b) (i) $z = tg(x^2 - y), \quad x(t) = 2t, \quad y(t) = t^2$

Note que:

$$f(x,y) = tg(x^2 + y)$$

As derivadas parciais de f são:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot sec^2(x^2 + y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = sec^2(x^2 + y)$$

Portanto o vetor gradiente de f é:

$$\nabla f = (2x \cdot sec^2(x^2 + y), sec^2(x^2 + y))$$

Substituindo x e y em função de t de acordo com suas leis, temos:

$$\nabla f = (2 \cdot 2t \cdot sec^2((2t)^2 + t^2, sec^2((2t)^2 + t^2) \Rightarrow \nabla f = (4t \cdot sec^2(5t^2), sec^2(5t^2))$$

As derivadas de x e y em relação a t são:

$$x'(t) = 2 \quad e \quad y'(t) = 2t$$

Logo, $z'(t)$ é:

$$z'(t) = (4t \cdot sec^2(5t^2), sec^2(5t^2)) \cdot (2, 2t) = 8tsec^2(5t^2) + 2tsec^2(5t^2)$$
$$z'(t) = 10tsec^2(5t^2)$$

(ii) $z = \frac{x}{y}, \quad x(t) = e^{-t}, \quad y(t) = ln(t)$

Note que:

$$f(x, y) = \frac{x}{y}$$

As derivadas parciais de f são:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}$$

Portanto, o vetor gradiente de f é:

$$\nabla f = \left(\frac{1}{y}, \frac{-x}{y^2}\right)$$

Substituindo x e y em função de t de acordo com suas leis, temos:

$$\nabla f = \left(\frac{1}{ln(t)}, \frac{-e^{-t}}{(ln(t))^2}\right)$$

As derivadas de x e y em relação a t são:

$$x'(t) = -e^{-t} \quad e \quad y'(t) = \frac{1}{t}$$

Logo, $z'(t)$ é dado por:

$$z'(t) = \left(\frac{1}{ln(t)}, \frac{-e^{-t}}{(ln(t))^2}\right) \cdot \left(-e^{-t}, \frac{1}{t}\right) = \frac{-e^{-t}}{ln(t)} + \frac{(-e^{-t})}{t(ln(t))^2}$$

$$z'(t) = \frac{-e^{-t}}{ln(t)} - \frac{e^{-t}}{t(ln(t))^2}$$

Questão 27

a) $h(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$

Note que a função h é igual à função f. A diferença está no fato de que h depende diretamente das variáveis u e v, enquanto que f é uma função que depende das composta de x(u,v) e y(u,v) (no fundo f é função de u e v). Assim, alicando a Regra da Cadeia:

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

b) $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2, \quad x(u,v) = u - v, \quad y(u,v) = u + v$

Note que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1 \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -1$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 1 \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1$$

Substituindo na Regra da Cadeia do item (a) :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2x \cdot 1 + (-2y) \cdot 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} = 2x - 2y = 2(x - y)$$

Substituindo x e y pelas respectivas associações com u e v:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 2(u - v - u - v) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} = -4v$$

Agora calculando a derivada parcial em relação à v:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 2x \cdot (-1) + (-2y) \cdot 1 = -2(x + y)$$

Substituindo x e y pelas respectivas associações com u e v:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -2(u - v + u + v) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = -4u$$

c) $f(x,y) = 1 - 4x^2 + 9y^2, \quad x(u,v) = 2ucos(v), \quad y(u,v) = 3usen(v)$

Note que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -8x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 18y$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2cos(v) \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -2usen(v)$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 3sen(v) \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 3ucos(v)$$

Substituindo na Regra da Cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = (-8x) \cdot 2cos(v) + 18y \cdot 3sen(v) = -16xcos(v) + 54ysen(v)$$

Substituindo x e y pelas funções x(u,v) e y(u,v):

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -16cos(v) \cdot 2ucos(v) + 54sen(v) \cdot 3usen(v) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u} = -32ucos^2(v) + 162usen^2(v)$$

Agora analisando a derivada parcial de f em relação à v por meio da expressão deduzida no item (a):

$$\frac{\partial f}{\partial v} = (-8x) \cdot (-2usen(v)) + 18y \cdot 3ucos(v) = 16xusen(v) + 54yucos(v)$$

Colocando x e y em função de u e v:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = 16usen(v) \cdot 2ucos(v) + 54ucos(v) \cdot 3usen(v) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = 32u^2sen(v)cos(v) + 162u^2sen(v)cos(v)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = 194u^2sen(v)cos(v)$$

Questão 28

a)

Para $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^3y}{x^6+y^2}\right] = y \cdot \frac{3x^2(x^6+y^2) - x^3 \cdot 6x^5}{(x^6+y^2)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y^3 - 3x^8y}{(x^6+y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^3y}{x^6+y^2}\right] = x^3 \cdot \frac{x^6+y^2 - y \cdot 2y}{(x^6+y^2)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^9 - x^3y^2}{(x^6+y^2)^2}$$

Portanto, temos o vetor gradiente de f:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \Rightarrow \nabla f = \left(\frac{3x^2y^3 - 3x^8y}{(x^6+y^2)^2}, \frac{x^9 - x^3y^2}{(x^6+y^2)^2}\right)$$

Sendo $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ vetor unitário:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \nabla f \cdot v = \alpha\left(\frac{3x^2y^3 - 3x^8y}{(x^6+y^2)^2}\right) + \beta\left(\frac{x^9 - x^3y^2}{(x^6+y^2)^2}\right)$$

b)

Para $(x, y) = (0, 0)$, precisamos calcular as derivadas parciais pela definição:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

Portanto, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \beta \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Questão 29

a) $f(x, y) = xy - x + y, \quad \vec{v} = (1, 1), \quad P = (1, 1)$

$$f_x(x,y) = y - 1 \Rightarrow f_x(1,1) = 1 - 1 = 0$$

$$f_y(x,y) = x + 1 \Rightarrow f_y(1,1) = 1 + 1 = 2$$

Agora analisando o vetor $\vec{v}$, temos que seu módulo é dado por:

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Como pudemos ver, o vetor $\vec{v}$ não é unitário. Precisamos encontrar o vetor unitário correspondente para aplicarmos a fórmula do produto escalar do versor com o vetor gradiente. Assim, fazemos:

$$\hat{v} \equiv \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Agora podemos aplicar a fórmula e avaliar a derivada direcional:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \hat{v} \cdot (f_x(1,1), f_y(1,1)) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

b) $f(x,y) = ln(x^2+y^4+4), \quad \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 2\sqrt{5}\right), \quad P = (1,0)$

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^4+4} \Rightarrow f_x(1,0) = \frac{2\cdot 1}{1^2+0^4+4} = \frac{2}{5}$$

$$f_y(x,y) = \frac{4y^3}{x^3+y^4+4} \Rightarrow f_y(1,0) = 0$$

Analisando o vetor $\vec{v}$, vemos que ele não é unitário. Precisamos encontrar o versor a ele associado. O primeiro passo é calcular seu módulo.

$$|\vec{v}| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{5}})^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{\frac{1}{5}+2\cdot 5} = \frac{\sqrt{101}}{\sqrt{5}}$$

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{101}}, \frac{10}{\sqrt{101}}\right)$$

Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = (f_x(1,0), f_y(1,0))\cdot \hat{v} = \left(\frac{2}{5}, 0\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{101}}, \frac{10}{\sqrt{101}}\right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{2}{5\sqrt{101}}$$

c) $f(x,y,z) = \frac{x-e^y}{x^2+y^4+1}, \quad \vec{v} = (2,2,0), \quad P = (1,1,1)$

$$f_x(x,y,z) = \frac{1(x^2+y^4+1) - 2x(x-e^y)}{(x^2+y^4+1)^2} \Longrightarrow f_x(1,1,1) = \frac{1^2+1^4+1-2\cdot 1(1-e^1)}{(1^2+1^4+1)^2}$$

$$\Rightarrow f_x(1,1,1) = \frac{2e+1}{9}$$

$$f_y(x,y,z) = \frac{-e^y(x^2+y^4+1) - 4y^3(x-e^y)}{(x^2+y^4+1)^2} \Rightarrow f_y(1,1,1) = \frac{-e^1(1^2+1^4+1) - 4\cdot 1(1-e^1)}{(1^2+1^4+1)^2}$$

$$\Rightarrow f_y(1,1,1) = \frac{e-4}{9}$$

Por fim, como $f(x,y,z)$ não depende de z, temos:

$$f_z(1,1,1) = 0$$

Analisando o vetor $\vec{v}$, vemos que ele não é unitário. Encontrando o versor correspondente, temos:

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2+2^2+0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Logo, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = (f_x(1,1,1), f_y(1,1,1), f_z(1,1,1)) \cdot \hat{v} = \left(\frac{2e+1}{9}, \frac{e-4}{9}, 0\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{2e+1}{9\sqrt{2}} + \frac{e-4}{9\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{3e-3}{9\sqrt{2}} = \frac{e-1}{3\sqrt{2}}$$

Questão 30

Obs: A direção em que uma função decresce mais rapidamente é a direção contrária do vetor gradiente da função no ponto. Chamando de $\vec{u}$ o vetor que designe a direção desejada, temos:

a) $\vec{u} = -\nabla f(1,1) = (0,-2)$

b) $\vec{u} = -\nabla f(1,0) = (-\frac{2}{5}, 0)$

c) $\vec{u} = -\nabla f(1,1,1) = \left(\frac{-2e-1}{9}, \frac{4-e}{9}, 0\right)$

Questão 31

a)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{6x^4-1}{x^2y}\right] = \frac{2xy(6x^4-1) - 24x^3(x^2y)}{(x^2y)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{12x^4+1}{x^3y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{-2x^4-1}{xy^2}\right] = \frac{-2xy(-2x^4-1)}{(xy^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4x^4+2}{xy^3}$$

Como f é no mínimo de classe C^2, as derivadas mistas de segunda ordem são iguais. Basta fazer uma delas então.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{-2x^4-1}{xy^2}\right] = \frac{-8x^3(xy^2) - y^2(-2x^4-1)}{xy^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-6x^4+1}{x^2y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-6x^4+1}{x^2y^2}$$

b)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] = \frac{-y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right] = \frac{-2y \cdot (-x)}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Como f é no mínimo de clase C^2, as derivadas mistas de segunda ordem são iguais e então basta fazer uma delas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right] = \frac{-1(x^2+y^2)-2x(-x)}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

c)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}[2xcos(x^2-y^3)] = 2cos(x^2-y^3) + 2x \cdot (-2xsen(x^2-y^3))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2cos(x^2-y^3) - 4x^2 sen(x^2-y^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}[-3y^2cos(x^2-y^3)] = -6y \cdot cos(x^2-y^3) + (-3y^2) \cdot 3y^2 sen(x^2-y^3)]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6ycos(x^2-y^3) - 9y^4 sen(x^2-y^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[2xcos(x^2-y^3)] = 2x \cdot 3y^2 sen(x^2-y^3) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2 sen(x^2-y^3)$$

Como a função é no mínimo de classe C^2, as derivadas parciais mistas de segunda ordem são iguais e portanto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2 sen(x^2-y^3)$$

d)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}[-g(x)] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -g'(x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}[g(y)] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g'(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}[g(y)] = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}[-g(x)] = 0$$

e)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^3-z^4}}\right] = \frac{\sqrt{x^2+y^3-z^4} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^3-z^4}}}{(\sqrt{x^2+y^3-z^4})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^3 - z^4}{(x^2 + y^3 + z^4)\sqrt{x^2 + y^3 - z^4}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3 - z^4}}\right] = \frac{3}{2}\frac{2y \cdot 2\sqrt{x^2 + y^3 - z^4} - 3y^2 \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3-z^4}}}{(\sqrt{x^2 + y^3 - z^4})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(y^4 + 4yx^2 - 4yz^4)}{2(x^2 + y^3 - z^4)\sqrt{x^2 + y^3 - z^4})}$$

Aplicando o mesmo raciocício (regra do quociente e rearranjo dos termos), obtemos a derivada parcial segunda em relação à z e as derivadas mistas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{-2z^3}{\sqrt{x^2 + y^3 - z^4}}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{-2(3z^2x^2 + 3z^2y^3 - z^6)}{(x^2 + y^3 - z^4)\sqrt{x^2 + y^3 - z^4}}$$

Sendo f no mínimo de classe C^2, temos a igualdade entre as derivadas parciais de segunda ordem mistas.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3 - z^4}}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-3xy^2}{2(x^2 + y^3 - z^4)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-3xy^2}{2(x^2 + y^3 - z^4)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3 - z^4}}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{2xz^3}{2(x^2 + y^3 - z^4)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{2xz^3}{(x^2 + y^3 - z^4)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{-2z^3}{\sqrt{x^2 + y^3 - z^4}}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{3z^3y^2}{(x^2 + y^3 - z^4)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{3z^3y^2}{(x^2 + y^3 - z^4)^{3/2}}$$

f)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}[yzu^2v^4] \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}[xzu^2x^4] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}[xyu^2v^4] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u}[2xyzuv^4] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 2xyzv^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v}[4xyzu^2v^3] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 12xyzu^2v^2$$

Perceba que teremos 120 derivadas mistas de segunda ordem (temos uma função f dependente de 5 variáveis distintas). Logo, deixarei explicítas as derivadas parciais apenas que envolvem a variável x. O raciocínio é o mesmo para as demais derivadas mistas e não se esqueça de que as derivadas mistas com as mesmas variáveis apenas trocadas sua ordem (ex:$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} e \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$) serão iguais pois essa função é no mínimo de classe C^2.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}[xzu^2v^4] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = zu^2v^4$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = zu^2v^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}[xyu^2v^4] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = yu^2v^4$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = yu^2v^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}[2xyzuv^4] \Rightarrow= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u} = 2yzuv^4$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x}[2xyzuv^4] = 2yzuv^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial x}[4xyzu^2v^3] \Rightarrow= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v} = 4yzu^2v^3$$

$$\Rightarrow= \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial x} = 4yzu^2v^3$$

Questão 32

$$U(x,y) = e^{-x}cosy + e^{-x}seny$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -e^{-x}(cosy + seny) \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}[-e^{-x}(cosy + seny)]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = e^{-x}(cosy + seny)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^{-x}(-seny + cosy) \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}[e^{-x}(-seny + cosy)]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = e^{-x}(-cosy - seny)$$

Então, naturalmente, segue que:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = e^{-x}(cosy + seny) + e^{-x}(-cosy - seny) = 0$$

Questão 33

$$u(x,t) = e^{-25t}sen(5x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -25e^{-25t}sen(5x)$$

$$\Rightarrow u_t = -25e^{-25t}sen(5x)$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}e^{-25t} \cdot 5cos(5x) \Rightarrow u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}[e^{-25t} \cdot 5cos(5x)] = e^{-25t} \cdot 5 \cdot 5 \cdot (-sen(5x))$$

$$\Rightarrow u_{xx} = -25e^{-25t}sen(5x)$$

Portanto, percebe-se que, de fato:

$$u_t = u_{xx}$$

Questão 34

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

Para calcularmos as derivadas parciais pedidas, precisamos de alguns resultados:

I)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(x^2+y^2) - x^2(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3 + 2xy^2 - 2x^3}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

II)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2(2y)}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

III)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{-2x^2(x^2+y^2)^2 + 2x^2y \cdot 2(x^2+y^2) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2x^2(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

IV)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{4xy(x^2+y^2)^2 - 2xy^2 \cdot 2(x^2+y^2) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{4xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

Como a função é de classe C^k, com $k \geq 2$, as derivadas parciais de segunda ordem mistas são iguais. Assim, obtemos:

V)

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

Agora podemos avaliar de forma mais clara as derivadas de terceira ordem pedidas, fazendo o mesmo raciocínio (regra do quociente e reajuste dos termos).

1)

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{-2x^2(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}\right] \Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{4x(x^4-8x^2y^2+3y^4)}{(x^2+y^2)^4}$$

2)

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{4xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\right] \Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{4x(3y^4-8x^2y^2+x^4)}{(x^2+y^2)^4}$$

3)

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{4xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}\right] \Rightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{4y(-3x^4+8x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^4}$$

Questão 35

Obs: a relação a ser verificada não é a que está no enunciado, e sim a que está posta abaixo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2}$$

Sendo $u(x,y) = v(r,\theta)$ e $x = rcos\theta$ e $y = rsen\theta$, temos as seguintes "derivadas imediatas"(explícitas):

$$\frac{\partial x}{\partial r} = cos\theta \quad e \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -rsen\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = sen\theta \quad e \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = rcos\theta$$

Para verificarmos a relação colocada acima, precisamos avaliar i) $\frac{\partial v}{\partial r}$, ii) $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$ e iii) $\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$.

i)

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + sen\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$

ii)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left[cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + sen\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

Aqui, distribuimos o operador da deriada parcial em relação à r e em seguida aplicamos uma regra do produto para as funções que estão multiplicando:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}[cos\theta]\frac{\partial u}{\partial x} + cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial x} + \frac{\partial}{\partial r}[sen\theta]\frac{\partial u}{\partial x} + sen\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial y}$$

Em primeiro lugar, perceba que $cos\theta$ e $sen\theta$ são funções que não dependem de r e portanto $\frac{\partial}{\partial r}[cos\theta] = \frac{\partial}{\partial r}[sen\theta] = 0$.

Em segundo lugar, note que, sendo $u(x, y)$ uma função de classe C^2, temos que $\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial r}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial r}$. Como já visto no item i, temos a derivada parcial de u em relação à r então podemos substituir na expressão que encontrarmos agora no item ii:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial r} + sen\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial r} = cos\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial r} + sen\theta\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = cos\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + sen\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right) + sen\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + sen\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cos\theta sen\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + sen\theta cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} + sen^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + sen^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2cos\theta sen\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

iii)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

Primeiro avaliando $\frac{\partial v}{\partial \theta}$:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Substituindo as derivadas explícitas de x e y em relação à θ pelos resultados encontrados no começo do exercício, temos:

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = -rsen\theta\frac{\partial u}{\partial x} + rcos\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$

Agora podemos derivar tudo em relação à θ para obter a derivada segunda de v em relação à θ:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-rsen\theta\frac{\partial u}{\partial x} + rcos\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Novamente, "distribui-se"o operador da derivada parcial em relação à θ e aplica-se a regra do produto:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}[-rsen\theta]\frac{\partial u}{\partial x} - rsen\theta\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}[rcos\theta]\frac{\partial u}{\partial y} + rcos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial y}$$

Derivando os termos de $-rsen\theta$ e $rcos\theta$ em relação à θ e rearranjando os termos partindo do pressuposto de que u é de classe C^2, aplicamos o mesmo raciocínio usado para encontrar o resultado do item ii:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = -rcos\theta\frac{\partial u}{\partial x} - rsen\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) - rsen\theta\frac{\partial u}{\partial y} + rcos\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = -rcos\theta\frac{\partial u}{\partial x} - rsen\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(-rsen\theta\frac{\partial u}{\partial x} + rcos\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right) - rsen\theta\frac{\partial u}{\partial y} + rcos\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(-rsen\theta\frac{\partial u}{\partial x} + rcos\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = -rcos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r^2sen^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r^2sen\theta cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - rsen\theta\frac{\partial u}{\partial y} - r^2cos\theta sen\theta\frac{\partial u^2}{\partial y\partial x} + r^2cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = -rcos\theta\frac{\partial u}{\partial x} - rsen\theta\frac{\partial u}{\partial y} + r^2sen^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r^2cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2r^2sen\theta cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

Portanto, agora basta somarmos (ii) + $\frac{1}{r}$(i) + $\frac{1}{r^2}$ (iii) e verificarmos a relação mencionada:

$$(ii) + \frac{1}{r}(i) + \frac{1}{r^2}(iii) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} =$$

$$cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + sen^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2cos\theta sen\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} +$$

$$+\frac{cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{sen\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial y} +$$

$$-\frac{cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{sen\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial y} + sen^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2sen\theta cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

Cancelando os termos iguais de sinais opostos, obtemos:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + sen^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + sen^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(cos^2\theta + sen^2\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(sen^2\theta + cos^2\theta)$$

Usando que $cos^2\theta + sen^2\theta = 1$, temos, por fim:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Como se queria demonstrar.

Questão 36

Sobre diferenciabilidade, podemos resumir a análise da diferenciabilidade de uma função f seguindo o seguinte esquema:

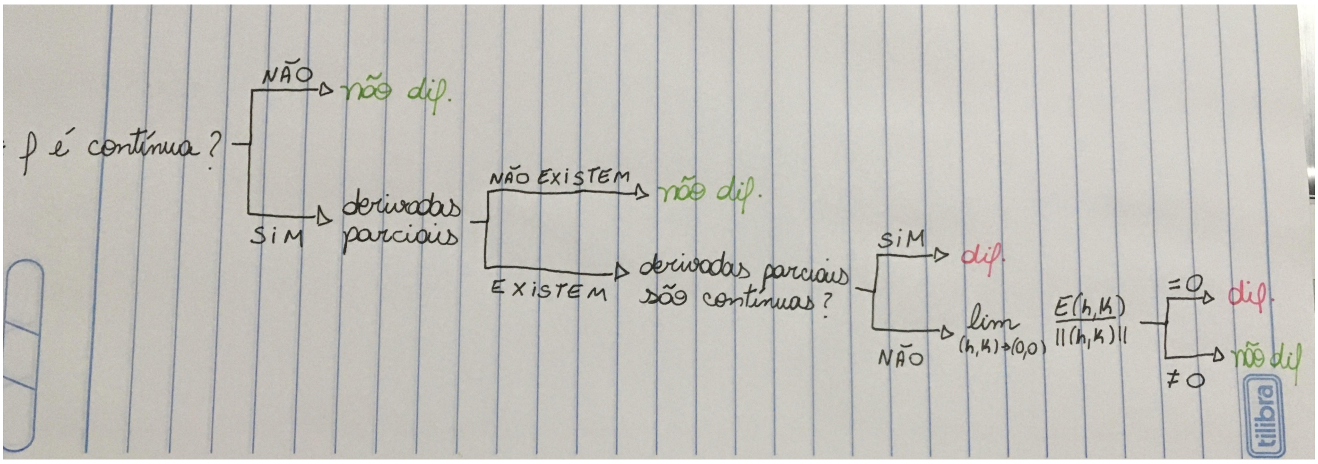

Figura 1: Esquema para verificar se uma função é diferenciável em um ponto.

a) $f(x,y) = 1 + xln(xy-5)$

i) Domínio de f:

$$xy - 5 > 0 \Rightarrow xy > 5$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 5\}$$

ii) Derivadas parciais:

$$f_x = ln(xy-5) + \frac{xy}{xy-5} \Rightarrow D_{f_x} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 5\}$$

$$f_y = \frac{x^2}{xy-5} \Rightarrow D_{f_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 5\}$$

As derivadas parciais de f são contínuas em todo o seu respectivo domínimo D_{f_x} e D_{f_y}. Para a função ser diferenciável em um ponto basta que este ponto pertença ao seu domínio (f contínua no ponto) e que as derivadas parciais sejam contínuas nesse intervalo. Logo, temos que $f(x,y)$ é diferenciável em D_f.

b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

i) Domínio de f:

$$xy \geq 0 \Rightarrow D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$$

ii) Derivadas parciais:

$$f_x = \frac{y}{2\sqrt{xy}} \Rightarrow D_{f_x} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$$

$$f_y = \frac{x}{2\sqrt{xy}} \Rightarrow D_{f_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$$

Como as derivadas parciais são contínuas em $\{(x, y) : xy > 0\}$ e $D_f = (x, y) \geq 0$, f é diferenciável na intersecção entre esses 3 conjuntos (D_f, D_{f_x} e D_{f_y}), portanto f é diferenciável em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$.

c) $f(x, y) = x^2 e^y$

i) Domínio de f:

$$D_f = \mathbb{R}^2$$

ii) Derivadas parciais:

$$f_x = 2xe^y \Rightarrow D_{f_x} = \mathbb{R}^2$$

$$f_y = x^2 e^y \Rightarrow D_{f_y} = \mathbb{R}^2$$

Como a função e as derivadas parciais dela são contínuas em $\mathbb{R}^2$, segue que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

d) $f(x, y) = \frac{1+y}{1+x}$

i) Domínio de f:

$$1 + x \neq 0 \Rightarrow D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -1\}$$

ii) Derivadas parciais:

$$f_x = -\frac{1+y}{(1+x)^2} \Rightarrow D_{f_x} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -1\}$$

$$f_y = \frac{1}{1+x} \Rightarrow D_{f_y} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -1\}$$

Novamente, temos que $D_f = D_{f_x} = D_{f_y}$ e, portanto, f é diferenciável em D_f (as derivadas parciais são contínuas em D_f).

e) $f(x, y) = arctg(xy)$

i) Domínio de f: (lembre-se de que a função arctg diverge para $\pi/2$ e múltiplos ímpares desse ângulo)

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

ii) Derivadas parciais:

$$f_x = \frac{y}{1 + (xy)^2} \Rightarrow D_{f_x} = \mathbb{R}^2$$

$$f_y = \frac{x}{1 + (xy)^2} \Rightarrow D_{f_y} = \mathbb{R}^2$$

Como as derivadas parciais são contínuas em todos os pontos, temos que f é diferenciável dm D_f.

f) $f(x,y) = y + sen(\frac{x}{y})$

i) Domínio de f:

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$$

ii) Derivadas parciais:

$$f_x = \frac{1}{y}cos(\frac{x}{y}) \Rightarrow D_{f_x} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$$

$$f_y = 1 - \frac{xcos(\frac{x}{y})}{y^2} \Rightarrow\Rightarrow D_{f_y} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$$

Como $D_f = D_{f_x} = D_{f_y}$, segue que f é diferenciável em D_f (as derivadas parciais de f são contínuas em todo D_f.

<u>Questão 37</u>

a)

$$f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} - 0}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{y} = 0$$

Portanto, as derivadas parciais existem e ambas valem 0.

b)

Para verificarmos se as derivadas parciais são contínuas no ponto, precisamos analisar o valor que elas assumem fora desse ponto e depois tomar o limite de (x,y) tendendo a ele.

Para $(x,y) \neq (0,0)$, basta pegar a expressão da função em $(x,y) \neq (0,0)$ e fazer as derivadas parciais como de costume.

i) f_x

$$f_x(x,y) = \frac{y \cdot (x^2 + y^2) - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^2 + y^2 - 2x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow f_x(x,y) = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

A partir desse resultado, temos que a derivada parcial em relação à x vale:

$$0, \quad se \quad (x,y) = (0,0)$$

$$\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad se \quad (x,y) \neq (0,0)$$

Para verificar a continuidade de f_x em (0,0), fazemos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Pegando o caminho $\gamma(t) = (t, 2t)$, onde $\gamma(0) = (0,0)$, temos:

$$\lim_{t\to 0} f_x(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{2t(4t^2-t^2)}{(4t^2+t^2)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{6t^3}{25t^4} = \frac{6}{25}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t} = \pm\infty$$

Como $\lim_{t\to 0} f_x(\gamma(t)) \neq 0$, segue que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) \neq 0$ e, portanto, f_x não é contínua no ponto $(0,0)$.

ii) f_y

$$f_y(x,y) = \frac{x(x^2+y^2)-xy(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^2+y^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow f_y(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

A partir desse resultado, temos que f_y vale:

$$0 \quad se \quad (x,y) = (0,0)$$

$$\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad se \quad (x,y) \neq (0,0)$$

Para avaliar a continuidade de f_y em (0,0), precisamos calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)$. Tomando novamente o caminho $\gamma(t) = (t, 2t)$, temos:

$$\lim_{t\to 0} f_y(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t(t^2-4t^2)}{(t^2+4t^2)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{-3t^3}{25t^4} = -\frac{3}{25}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t} = \pm\infty$$

Como $\lim_{t\to 0} f_y(\gamma(t)) \neq 0$, segue que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) \neq 0$ e, portanto, f_y não é contínua no ponto $(0,0)$.

c)

Para verificarmos que f não é diferenciável em (0,0), precisamos calcular o seguinte limite:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{|(h,k)|}$$

Onde

$$E(h,k) = f(0+h, 0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k$$

$$E(h,k) = f(h,k) = \frac{hk}{h^2+k^2}$$

Avaliando o limite:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{|(h,k)|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{hk}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

Tomando o caminho $\gamma(t) = (t, t,)$, tal que $\gamma(0) = (0, 0)$, temos:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t \cdot t}{(t^2+t^2)\sqrt{t^2+t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2\sqrt{2t^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{t\to 0} \frac{1}{|t|} = \pm\infty$$

Logo, como $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{|(h,k)|} \neq 0$, segue que f não é diferenciável em (0,0).

Questão 38

a)

i) $f_x(0, 0)$

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 sen(\frac{1}{x^2})}{x} = \lim_{x\to 0} x sen(\frac{1}{x^2})$$

Sendo $sen(\frac{1}{x^2})$ uma função limitada e $\lim_{x\to 0} x = 0$, segue que

$$\lim_{x\to 0} x sen(\frac{1}{x^2}) = 0 \Rightarrow f_x(0,0) = 0$$

ii) f_y

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2 sen(\frac{1}{y^2})}{y} = \lim_{y\to 0} y sen(\frac{1}{y^2})$$

Pelos mesmos argumentos utilizados quando calculamos $f_x(0, 0)$:

$$\lim_{y\to 0} y sen(\frac{1}{y^2}) = 0 \Rightarrow f_y(0,0) = 0$$

b)

Para $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}[(x^2+y^2) sen(\frac{1}{x^2+y^2})] = 2x sen(\frac{1}{x^2+y^2}) - (x^2+y^2)\frac{2x cos(\frac{1}{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow f_x(x,y) = 2x sen(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2x cos(\frac{1}{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)}$$

Verificando a continuidade de f_x em (0,0):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x sen(\frac{1}{x^2+y^2}) - \frac{2x cos(\frac{1}{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)}$$

Tomando $\gamma(t) = (t, 0)$:

$$\lim_{t\to 0} 2xsen(\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x}cos(\frac{1}{x^2})$$

Perceba que no termo $\frac{2}{x}cos(\frac{1}{x^2})$ não podemos aplicar Teorema do Confronto porque $\frac{2}{x}$ não tende à zero quando $x \to 0$. A função cosseno oscila e não tem limite definido para algo do tipo "$cos(\infty)$". Logo, f_x não é contínua em (0,0).

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}[(x^2 + y^2)sen(\frac{1}{x^2 + y^2})] = 2ysen(\frac{1}{x^2 + y^2}) - \frac{2ycos(\frac{1}{x^2+y^2})}{(x^2 + y^2)}$$

Analogamente, não existe $\lim_{t\to 0} f_y(0, t)$ e, portanto, f_y não é contínua em (0,0).

c)

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h, k)}{|(h, k)|}$$

Onde

$$E(h, k) = f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h - f_y(0, 0)k$$
$$E(h, k) = f(h, k) = (h^2 + k^2)sen(\frac{1}{h^2 + k^2})$$

Logo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h, k)}{|(h, k)|} = \frac{(h^2 + k^2)sen(\frac{1}{h^2+k^2})}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2 + k^2}sen(\frac{1}{h^2 + k^2})$$

Como a função seno é limitada e $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2 + k^2} = 0$, pelo Teorema do Confronto, segue que:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2 + k^2}sen(\frac{1}{h^2 + k^2}) = 0$$

Como $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{|(h,k)|} = 0$, a função é diferenciável em (0,0).

Questão 39

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x}cosy$$

$D_f = \mathbb{R}^2$

Calculando $f_x(0, 0)$ pela definição:

$$f_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x^{-2/3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = \infty$$

Como $f_x(0, 0)$ não é um valor finito (isto é, f_x diverge no ponto (0,0)), a função f não é diferenciável em (0,0).

Questão 40

$$x^2 + xy + y^2 - 3y = 1, \quad P = (1, 2)$$

Se definirmos (x, y), tal que:

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$$

Note que:

$$f(1, 2) = 1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2 - 3 \cdot 2 = 0$$

A reta normal tem a direção dada pelo vetor gradiente no ponto desejado. Logo, precisamos calculá-lo no ponto (1,2):

$$\nabla f(1, 2) = (f_x(1, 2), f_y(1, 2))$$

$$f_x(x, y) = 2x + y \Rightarrow f_x(1, 2) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$$
$$f_y(x, y) = x + 2y - 3 \Rightarrow f_y(1, 2) = 1 + 2 \cdot 2 - 3 = 2$$
$$\Rightarrow \nabla f(1, 2) = (4, 2)$$

A equação da reta normal à função no ponto (1,2,f(1,2)) é:

$$(x, y, z) = (1, 2, f(1, 2)) + \lambda(f_x(1, 2), f_y(1, 2), -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Isto é:

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + \lambda(4, 2, -1)$$

A reta tangente é sempre perpendicular à reta normal, isto é, o vetor tangente (que indica a direção da reta tangente) deve ser perpendicular ao vetor , $\vec{n} = (f_x(1, 2), f_y(1, 2), -1)$,o que implica que $\vec{t} \cdot \vec{n} = 0$, onde $\vec{t}$ é o vetor tangente. Se $\vec{t} = (a, b, c)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ temos a seguinte imposição:

$$(a, b, c) \cdot (4, 2, -1) = 0 \Rightarrow 4a + 2b - c = 0$$

Assim, qualquer vetor que tenha componentes a,b e c que satisfaçam a equação acima será automaticamente perpendicular ao vetor normal e, portanto, tangente à curva. Podemos tomar, por exemplo, a = 1, b = -2 e c = 0 e então a equação da reta tangente será:

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + \lambda(1, -2, 0) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Dica: é fácil verificar se a equação que você encontrou está correta, basta plotar no GeoGebra!

Questão 41

$$x^2 - y^2 = 1$$

Definindo:

$$f(x, y) = 1 - x^2 + y^2$$

A função em um ponto (x_0, y_0) será dada por:

$$f(x_0, y_0) = 1 - x_0^2 + y_0^2$$

Derivadas parciais:

$$f_x(x, y) = -2x \Rightarrow f_x(x_0, y_0) = -2x_0$$

$$f_y(x, y) = 2y \Rightarrow f_y(x_0, y_0) = 2y_0$$

Assim, o vetor normal é dado por $\vec{n} = (-2x_0, 2y_0, -1)$. Se o vetor tangente for $\vec{t} = (a, b, c)$, precisamos impor que $\vec{n} \cdot \vec{t} = 0$ para encontrar condições sobre a,b e c:

$$(-2x_0, 2y_0, -1) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow -2x_0a + 2y_0b - c = 0$$

Existem várias possibilidades que satisfazem essa equação. Uma delas é tomar $a = y_0$, $b = x_0$ e $c = 0$

O vetor que indica a direção da reta tangente então ficará:

$$\vec{t} = (y_0, x_0, 0)$$

Como quero que a reta tangente (e, portanto, o vetor tangente) seja paralelo à reta $y = 2x$, preciso que $x_0 = 2y_0$ (a segunda componente do vetor tangente tem que ser igual ao dobro da primeira componente). Assim, substituindo $x_0 = 2y_0$ na equação incial $x^2 - y^2 = 1$, temos:

$$(2y_0)^2 - y_0^2 = 1 \Rightarrow 3y_0^3 = 1$$

$$y_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Sendo $x_0 = 2y_0$, temos que:

$$se \quad y_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$se \quad y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x_0 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Portanto, nos pontos $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ a reta tangente à curva $x^2 - y^2 = 1$ é paralela à reta $y = 2x$.

Questão 42

a)

$$z = 4 - x - y^2 \Rightarrow f(x, y) = 4 - x - y^2 \quad P = (1, 1, 2)$$

A equação do plano tangente $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é dada por:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

i)

$$f(1,1) = 4 - 1 - 1^2 = 2$$

ii)

$$f_x(x,y) = -1 \Rightarrow f_x(1,1) = -1$$

$$f_y(x,y) = -2y \Rightarrow f_y(1,1) = -2$$

O plano tangente então é dado por:

$$z = 2 - 1(x-1) - 2(y-1)$$

$$\Rightarrow z = 5 - x - 2y$$

b)

$$z = \sqrt[3]{10 - x^3 - y^3} \Rightarrow f(x,y) = \sqrt[3]{10 - x^3 - y^3} \quad P = (1,1,2)$$

i)

$$f(1,1) = \sqrt[3]{10 - 1^3 - 1^3} = 2$$

ii)

$$f_x(x,y) = -\frac{x^2}{\sqrt[3]{(10 - x^3 - y^3)^2}} \Rightarrow f_x(1,1) = -\frac{1^2}{\sqrt[3]{(10 - 1^3 - 1^3)^2}} = -\frac{1}{4}$$

$$f_y(x,y) = -\frac{y^2}{\sqrt[3]{(10 - x^3 - y^3)^2}} \Rightarrow f_y(1,1) = -\frac{1^2}{\sqrt[3]{(10 - 1^3 - 1^3)^2}} = -\frac{1}{4}$$

O plano tangente é dado por:

$$z = 2 - \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{4}(y-1)$$

$$\Rightarrow z = \frac{5}{2} - \frac{x}{4} - \frac{y}{4}$$

Questão 43

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$$\pi : 3x - y + z = 7$$

Como quero encontrar um plano tangente que seja paralelo ao plano π, é necessário que as normais desses dois planos sejam paralelas, isto é $\vec{n_s} \times \vec{n_\pi} = \vec{0}$, onde $\vec{n_s}$ é o vetor normal à superfície S e $\vec{n_\pi} = (3, -1, 1)$ é o vetor normal à π. Sabendo que $\vec{n_s}$ é o vetor gradiente da função f, temos:

$$\vec{n_s} = (f_x, f_y, f_z) = (2x, 2y, 2z)$$

Em um ponto genérico do tipo (a,b,c), temos:

$$\vec{n_s} = (2a, 2b, 2c)$$

Agora precisamos impor que $\vec{n_s} \times \vec{n_\pi} = \vec{0}$ para termos que esses vetores são paralelos. Fazendo este produto vetorial, obtemos:

$$\vec{n_s} \times \vec{n_\pi} = (2b + 2c, 6c - 2a, -2a - 6b)$$

Impondo que essa operação resulte no vetor nulo, obtemos um sistema de 3 equações:

$$2b + 2c = 0$$

$$6c - 2a = 0$$

$$-2a - 6b = 0$$

A resolução desse sistema nos mostra que o ponto que procuramos é tal que $a = 3c$ e $b = -c$, isto é, o ponto deve ser do tipo $P = (3c, -c, c)$. Substituindo $x = 3c$, $y = -c$ e $z = c$ na equação que define a superfície S, temos:

$$(3c)^2 + (-c)^2 + (c^2) = 1 \Rightarrow 11c^2 = 1$$

$$\Rightarrow c = \pm \frac{1}{\sqrt{11}}$$

Se $c = \frac{1}{\sqrt{11}}$, obtemos o ponto $P_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

Se $c = -\frac{1}{\sqrt{11}}$, obtemos o ponto $P_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

Questão 44

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $L(x, y) = 2y - 2x - 2$

A aproximação linear de f em um ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é dada pelo plano tangente à f nesse ponto. Portanto:

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Note que:

$$f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2$$
$$f_x(x, y) = 2x \Rightarrow f_x(x_0, y_0) = 2x_0$$
$$f_y(x, y) = 2y \Rightarrow f_y(x_0, y_0) = 2y_0$$

Logo:

$$L(x, y) = x_0^2 + y_0^2 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$$
$$L(x, y) = -x_0^2 - y_0^2 + 2x_0 x + 2y_0 y$$

Comparando com a função dada:

$$-x_0^2 - y_0^2 + 2x_0 x + 2y_0 y = 2y - 2x - 2$$

Temos então que

$$2x_0x = -2x \Rightarrow x_0 = -1$$

$$2y_0y = 2y \Rightarrow y_0 = 1$$

$$-x_0^2 - y_0^2 = -2$$

Portanto o ponto é (-1,1) (note que esse ponto satisfaz a terceira equação e então, de fato, está correto).

b) $f(x, y) = x^2y$, $L(x, y) = 4y - 4x + 8$

Note que

$$f(x_0, y_0) = x_0^2y_0$$

$$f_x(x, y) = 2xy \Rightarrow f_x(x_0, y_0) = 2x_0y_0$$

$$f_y(x, y) = x^2 \Rightarrow f_y(x_0, y_0) = x_0^2$$

Portanto:

$$L(x, y) = x_0^2y_0 + 2x_0y_0(x - x_0) + x_0^2(y - y_0)$$

$$L(x, y) = 2x_0y_0x + 2x_0^2y - 2x_0^2y_0$$

Comparando com a função dada:

$$2x_0y_0x + 2x_0^2y - 2x_0^2y_0 = 4y - 4x + 8$$

Logo, temos que:

$$2x_0y_0x = -4x$$

$$2x_0^2y = 4y \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{2}$$

$$-2x_0^2y_0 = 8$$

Se $x_0 = \sqrt{2}$, da primeira equação obtemos $2\sqrt{2}y_0 = -4$, portanto $y_0 = -\frac{2}{\sqrt{2}}$. Perceba que $x_0 = \sqrt{2}$ e $y_0 = -\frac{2}{\sqrt{2}}$ satisfaz a terceira equação e portanto o ponto $(\sqrt{2}, -\frac{2}{\sqrt{2}})$ é a solução do problema (perceba que se tomarmos $x_0 = -\sqrt{2}$, a solução da primeira equação seria $y_0 = \frac{2}{\sqrt{2}}$, mas esse ponto não iria satisfazer a terceira equação).

c) $f(x, y, z) = xy + z^2$, $L(x, y, z) = y + 2z - 1$

Note que

$$f(x_0, y_0, z_0) = x_0y_0 + x_0^2$$

$$f_x(x, y, z) = y \Rightarrow f_x(x_0, y_0, z_0) = y_0$$

$$f_y(x, y, z) = x \Rightarrow f_y(x_0, y_0, z_0) = x_0$$

$$f_z(x, y, z) = 2z \Rightarrow f_z(x_0, y_0, z_0) = 2z_0$$

Logo:

$$L(x,y,z) = x_0y_0 + x_0^2 + y_0(x-x_0) + x_0(y-y_0) + 2z_0(z-z_0)$$
$$L(x,y,z) = 3x_0y_0 + x_0^2 - 2z_0^2 + y_0x + x_0y + 2z_0z$$

Comparando com a função dada:

$$3x_0y_0 + x_0^2 - 2z_0^2 + y_0x + x_0y + 2z_0z = y + 2z - 1$$

Temos o sistema de equações:

$$x_0y = y \Rightarrow x_0 = 1$$

$$y_0x = 0 \Rightarrow y_0 = 0$$
$$2z_0z = 2z \Rightarrow z_0 = 1$$
$$3x_0y_0 + x_0^2 - 2z_0^2 = -1$$

Note que a solução encontrada nas 3 primeiras equações ($x_0 = 1$, $y_0 = 0$ e $z_0 = 1$) satisfaz a quarta equação. Portanto o ponto é $(1,0,1)$.

Questão 45

a) $T(x,y) = x^3 - 2xy^2$, $(x,y) = (1,1)$

A direção de maior crescimento de uma função é a direção dada pelo vetor gradiente. Assim:

$$\nabla T(x,y) = (T_x, T_y) = (3x^2 - 2y^2, -4xy)$$
$$\nabla T(1,1) = (3\cdot 1^2 - 2\cdot 1^2, -4\cdot 1\cdot 1)$$

Portanto, a direção de maior crescimento da temperatura é dada por

$$\nabla T(1,1) = (1,-4)$$

b) Se a formiga deseja se manter na mesma temperatura, ela deve caminhar ao longo da mesma curva de nível c, de modo que sua taxa de variação naquela direção seja nula. Traduzindo isso matematicamente, precisamos achar um vetor $\vec{u}$, tal que:

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}} = 0$$

Ou

$$\nabla T \cdot \hat{u} = 0$$

Onde $\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$. Em outras palavras, precisamos encontrar um vetor $\vec{u}$ que seja perpendicular ao vetor gradiente no ponto (1,1), onde a formiga está. Se $\vec{u} = (a,b)$, temos:

$$(1,-4)\cdot(a,b) = 0 \Rightarrow a - 4b = 0 \Rightarrow a = 4b$$

Isto é, qualquer vetor do tipo $\vec{u} = (4b, b)$ $(b \in \mathbb{R})$ vai satisfazer a nossa equação. A formiga pode tomar qualquer direção dada por esse vetor e não sentirá mudança de temperatura. Exemplo: $\vec{u} = (4, 1)$.

Questão 46

1. $f(x, y) = x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$

Para encontrar os pontos críticos da função, preciso inicialmente calcular as derivadas parciais de primeira ordem da função e impor que elas sejam nulas:

$$f_x(x, y) = 2x + 3y - 6$$

$$f_y(x, y) = 3x + 8y + 2$$

Agora tenho o seguinte sistema:

$$2x + 3y - 6 = 0$$

$$3x + 8y + 2 = 0$$

A solução desse sistema é

$$y = -\frac{22}{7} \quad e \quad x = \frac{54}{7}$$

Logo, o ponto $\left(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}\right)$ é um candidato a ser máximo ou mínimo local de f. Calculando o Hessiano de f:

$$H_f(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}) = f_{xx}(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}) \cdot f_{yy}(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}) - (f_{xy}(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}))^2$$
$$f_{xx}(x, y) = 2 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
$$f_{yy} = 8 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$
$$f_{xy} = 3 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$H_f(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}) = 2 \cdot 8 - (3)^2 = 7$$

Como $H_f(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}) > 0$ e $f_{xx}(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}) > 0$, segue que o ponto $\left(\frac{54}{7}, -\frac{22}{7}\right)$ é de mínimo local.

2. $f(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 - 5x$

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2y - 5$$
$$f_y(x, y) = 2x + 2y$$

Para achar os pontos críticos, preciso impor $f_x = f_y = 0$:

$$3x^2 + 2y - 5 = 0$$

$$2x + 2y = 0$$

As soluções desse sistema são os ponto $P_1 = (-1, 1)$ e $P_2 = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$. Esses dois pontos são candidatos a serem pontos de máximo ou mínimo local de f. Analisemos as derivadas segundas e o Hessiano de f em cada ponto:

$$f_{xx} = 6x \Rightarrow f_{xx}(-1,1) = -6 \quad e \quad f_{xx}(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}) = 10$$
$$f_{yy} = 2 \quad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$f_{xy} = 2 \quad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

i)

$$H_f(-1,1) = (-6) \cdot 2 - (2)^2 = -16 < 0$$

Como $H_f(-1,1) < 0$, o ponto $(-1,1)$ é um ponto de sela.

ii)

$$H_f(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}) = 10 \cdot 2 - (2)^2 = 16 > 0$$

Como $H_f(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}) > 0$ e $f_{xx}(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}) > 0$, $(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3})$ é ponto de mínimo local.

3. $f(x,y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$

$$f_x = 5x^4 - 5$$
$$f_y = 5y^4 - 5$$

Para achar os pontos críticos, preciso impor $f_x = f_y = 0$:

$$5x^4 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$5y^4 - 5 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

Logo, os pontos $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (1,-1)$,$P_3 = (-1,1)$ e $P_4 = (-1,-1)$ são candidatos a serem pontos de máximo e mínimo local de f.

$$f_{xx}(x,y) = 20x^3 \Rightarrow f_{xx}(1,1) = f_{xx}(1,-1) = 20 \quad e \quad f_{xx}(-1,1) = f_{xx}(-1,-1) = -20$$

$$f_{yy}(x,y) = 20y^3 \Rightarrow f_{yy}(1,1) = f_{yy}(-1,1) = 20 \quad e \quad f_{yy}(1,-1) = f_{xx}(-1,-1) = -20$$

$$f_{xy} = 0 \quad \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

i)

$$H_f(1,1) = 20 \cdot 20 - 0^2 = 400 > 0$$

Como $H_f(1,1) > 0$ e $f_{xx}(1,1) > 0$, o ponto $(1,1)$ é de mínimo local.

ii)

$$H_f(1,-1) = 20 \cdot (-20) - 0^2 = -400 < 0$$

Como $H_f(1,-1) < 0$, o ponto $(1,-1)$ é de sela.

iii)

$$H_f(-1,1) = (-20) \cdot 20 - 0^2 = -400 < 0$$

Como $H_f(-1,1) < 0$, o ponto $(-1,1)$ é de sela.

iv)

$$H_f(-1,-1) = (-20) \cdot (-20) - 0^2 = 400 > 0$$

Como $H_f(-1,-1) > 0$ e $f_{xx}(-1,-1) < 0$, o ponto $(-1,-1)$ é de máximo local.

Questão 47

Note que temos duas funções: o plano e a função distância (a qual queremos minimizar).Podemos então definir a partir da equação do plano:

$$g(x,y) \equiv x + 2y - z - 4$$

E

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2$$

que é a função distância em relação à origem ao quadrado.

Aplicando a técnica dos multiplicadores de Lagrange, temos o seguinte sistema:

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$g(x,y,z) = 0$$

i) Derivadas Parciais/ Vetor Gradiente:

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (2x, 2y, 2z)$$

$$\nabla g = (g_x, g_y, g_z) = (1, 2-1)$$

Da primeira condição, obtemos 3 equações:

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(1, 2-1)$$

1)

$$2x = \lambda \Rightarrow x = \frac{\lambda}{2}$$

2)

$$2y = 2\lambda \Rightarrow y = \lambda$$

3)

$$2z = -\lambda \Rightarrow z = -\frac{\lambda}{2}$$

ii) $g(x,y,z) = 0$

$$g(x,y,z) = 0 \Rightarrow x + 2y - z - 4 = 0$$

Substituindo x, y e z em função de λ:

$$\frac{\lambda}{2} + 2\lambda + \frac{\lambda}{2} - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{4}{3}$$

Portanto:

$$x = \frac{4}{3}\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}$$

$$z = -\frac{4}{3}\frac{1}{2} = -\frac{2}{3}$$

Portanto, o ponto do plano mais próximo da origem é $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Questão 48

Seja

$$f(x,y) = xy$$

$$g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1$$

Por Multiplicadores de Lagrange:

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$g(x,y) = 0$$

i) Derivadas Parciais/ Vetor Gradiente:

$$\nabla f = (f_x, f_y) = (y, x)$$

$$\nabla g = (g_x, g_y) = (2x, 4y)$$

$$(y,x) = \lambda(2x, 4y)$$

$$y = \lambda 2x$$

$$x = \lambda 4y$$

Substituindo $y = \lambda 2x$ na equação debaixo:

$$x = \lambda 4 \lambda 2x$$

$$1 = 8\lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ii) $g(x,y)=0$

$$g(x,y)=0 \Rightarrow x^2+2y^2-1=0$$

1) Se $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{2}}$:

$$x^2+2(\frac{1}{2\sqrt{2}}2x)^2-1=0$$

$$x^2+x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Se $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, como $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}2x$, segue que $y=\frac{1}{2}$. Assim $P_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$.
Se $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, como $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}2x$, segue que $y=-\frac{1}{2}$. Assim $P_2=(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})$.

2)Se $\lambda=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$:

$$x^2+2(-\frac{1}{2\sqrt{2}}2x)^2-1=0$$

$$x^2+x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Se $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, como $y=-\frac{1}{2\sqrt{2}}2x$, segue que $y=-\frac{1}{2}$. Assim $P_3=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2})$.
Se $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, como $y=-\frac{1}{2\sqrt{2}}2x$, segue que $y=\frac{1}{2}$. Assim $P_4=(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2})$.

Portanto, em P_1,P_2,P_3 e P_4, f(x,y) assume valores extremos. Avaliando a função nesses pontos:

$$f(P_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$f(P_2)=(-\frac{1}{\sqrt{2}})(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$f(P_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$f(P_4)(-\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Como $f(P_1)=f(P_2)>f(P_3)=f(P_4)$, segue que P_1 e P_2 são pontos de máximo de f e P_3 e P_4 são pontos de mínimo de f.

Questão 49

Precisamos achar T_{max} e T_{min} para $T(x,y)$ sujeito à circunferência de centro (0,0) e raio 1, isto é, ao conjunto compacto tal que $x^2+y^2\leq 1$. Precisamos analisar o valor de f no interior do conjunto e na sua fronteira.

1) No interior, precisamos analisar os pontos críticos de f. Logo, primeiramente calculamos as derivadas parciais de primeira ordem e impomos que sejam nulas:

$$T_x=64(6x-2y)$$

$$T_y = 64(6y - 2x + 2)$$

Agora temos o seguinte sistema:

$$64(6x - 2y) = 0$$

$$64(6y - 2x + 2) = 0$$

A solução desse sistema é:

$$x = \frac{1}{8} \quad y = \frac{3}{8}$$

Perceba que esse ponto não está no interior da circunferência, pois $(\frac{1}{8})^2 + (\frac{3}{8})^2 > 1$, assim, a função não tem pontos críticos no interior do conjunto compacto.

2) Fronteira

Para estudar pontos de extremo de T na fronteira do conjunto compacto, vamos parametrizar a fronteira da circunferência e analisar a função T nesses pontos. A fronteira do conjunto é uma circunferência de raio 1. Sua parametrização pode ser dada como:

$$\gamma(t) = (cost, sent) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Avaliando a composta $T(\gamma(t))$:

$$T(\gamma(t)) = T(cost, sent)$$

$$T(\gamma(t)) = 64(3cos^2t - 2costsent + 3sen^2t + 2sent + 5) = 64(3 - 2costsent + 2sent + 5) = 64(8 + 2sent - 2co$$

$$\Rightarrow T(\gamma(t)) = 64(8 + 2sent - sen(2t))$$

Para achar os valores de T_{max} e T_{min} na fronteira do conjunto, devemos impor que $T(\gamma(t))' = 0$ (agora temos uma função de 1 variável, igual ao Cálculo 1):

$$T(\gamma(t))' = 0 \Rightarrow 64(2cost - 2cos(2t)) = 0$$

$$2cost - 2cos(2t) = 0$$

$$cost - cos(2t) = 0$$

$$cost - (2cos^2t - 1) = 0$$

$$2cos^2t - cost - 1 = 0$$

Utilizando a Fórmula de Bhaskara e resolvendo a equação de segundo grau para $cost$, temos como resultado:

$$cost = 1 \Rightarrow t = 0 \quad ou \quad t = 2\pi$$

ou

$$cost = -\frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{3} \quad ou \quad t = \frac{4\pi}{3}$$

Se $t = 0$, $x = cos(0) = 1$, $y = sen(0) = 0$. $P_1 = (1, 0)$.
Se $t = 2\pi$, $x = cos(2\pi) = 1$, $y = sen(2\pi) = 0$ (temos o mesmo ponto que P_1).
Se $t = \frac{2\pi}{3}$, $x = cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, $y = sen(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $P_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Se $t = \frac{4\pi}{3}$, $x = cos(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$, $y = sen(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $P_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Avaliando a função nos pontos:

$$T(P_1) = T(1,0) = 64(3+5) = 512^oC$$

$$T(P_2) = T(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = 678,3^oC$$

$$T(P_3) = T(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = 345,7^oC$$

Como o maior valor de T acontece em P_2, este ponto é de máximo da função na fronteira do compacto, onde $T_{max} = 678,3^oC$. Como o menor valor de T acontece em P_3, este ponto é de mínimo da função na fronteira do compacto, onde $T_{min} = 345,7^oC$.

Questão 50

a) $f(x,y) = 3x - y$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

1) No interior

$$f_x = 3 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f_y = -1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Logo, não existem pontos no interior de A onde $f_x = 0$ e $f_y = 0$, f não assume pontos críticos no interior de A.

2) Na fronteira ($x^2 + y^2 = 1$):
Multiplicadores de Lagrange:

$$f(x,y) = 3x - y$$

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

i) Derivadas parciais/ Vetor gradiente:

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$\nabla f = (3, -1)$$

$$\nabla g = (2x, 2y)$$

$$(3,-1) = \lambda(2x, 2y)$$

$$3 = 2x\lambda \Rightarrow x = \frac{3}{2\lambda}$$

$$-1 = 2y\lambda \Rightarrow y = -\frac{1}{2\lambda}$$

ii) $g(x, y) = 0$

$$g(x,y) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$(\frac{3}{2\lambda})^2 + (-\frac{1}{2\lambda})^2 = 1$$
$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

Se $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, $x = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$ e $y = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$. $P_1 = (\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}})$
Se $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$ e $y = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$. $P_2 = (-\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}})$
Avaliando a função nesses 2 pontos:

$$f(P_1) = \frac{9\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$$
$$f(P_2) = -\frac{9\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = -\frac{10\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$$

Como $f(P_1) > f(P_2)$, P_1 é ponto de máximo de f na fronteira do compacto e P_2 é ponto de mínimo de f na fronteira do compacto.

b) $f(x,y) = x^2 + 3xy - 3x$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1 - x\}$

Note que o conjunto A pode ser representado graficamente da seguinte maneira:

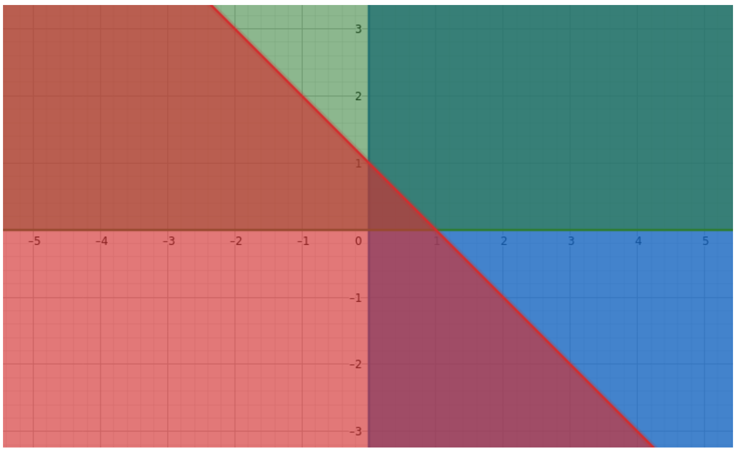

Figura 2: Em azul, $x \geq 0$, em verde $y \geq 0$ e em vermelho $y \leq 1-x$. Note que a intersecção dessas 3 condições ocorre na intersecção das 3 cores (triângulo de vértices (0,0), (0,1) e (1,0)).

Podemos concluir que A é compacto e sua fronteira é delimitada por 3 caminhos $\gamma_1(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 1$, $\gamma_2(t) = (t, 1-t), 0 \leq t \leq 1$ e $\gamma_3(t) = (0, t), 0 \leq t \leq 1$.

i) No interior de A

$$f_x(x,y) = 2x + 3y - 3$$

$$f_y(x, y) = 3x$$

Impondo $f_x = f_y = 0$ para encontrar os pontos críticos:

$$2x + 3y - 3 = 0$$

$$3x = 0$$

Dessa sistema, tiramos que $x = 0$ e $y = 1$. O ponto $(1, 0)$ é ponto da fronteira de A, então eventualmente aparecerá nas contas que se seguem. Entretando, já podemos avaliar que $f(1, 0) = 0$.

ii) Na fronteira de A

1) $\gamma_1(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 1$

Nos extremos do intervalo:

$$t = 0 \Rightarrow \gamma_1(0) = (0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow \gamma_1(1) = (1, 0) \Rightarrow f(1, 0) = -2$$

Derivando a função composta e verificando para quais valores de t ela é nula:

$$f(\gamma_1(t)) = f(t, 0) = t^2 - 3t \Rightarrow f'(\gamma_1(t)) = 2t - 3$$

$$2t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

Como nosso "pedaço da fronteira "$\gamma_1(t)$, foi definido para $0 \leq t \leq 1$, se $t = \frac{3}{2} > 1$, não estamos no caminho $\gamma_1(t)$. Logo, os únicos candidatos à pontos críticos de f em $\gamma_1(t)$ são os extremos onde $t = 0$ e $t = 1$.

2) $\gamma_2(t) = (t, 1 - t), 0 \leq t \leq 1$

Nos extremos do intervalo:

$$t = 0 \Rightarrow \gamma_2(0) = (0, 1) \Rightarrow f(0, 1) = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow \gamma_2(1) = (1, 0) \Rightarrow f(1, 0) = -2$$

Derivando a função composta e verificando para quais valores de t ela é nula:

$$f(\gamma_2(t)) = f(t, 1 - t) = t^2 + 3t - 3t^2 - 3t \Rightarrow f(\gamma_2(t)) = -2t^2$$

$$f'(\gamma_2(t)) = -4t$$

$$-4t = 0 \Rightarrow t = 0$$

Como já verificamos, se $t = 0$, o ponto é (0,1) e $f(0, 1) = 0$.

3) $\gamma_3(t) = (0, t), 0 \leq t \leq 1$

Nos extremos do intervalo:

$$t = 0 \Rightarrow \gamma_3(0) = (0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow \gamma_3(1) = (0, 1) \Rightarrow f(0, 1) = 0$$

Derivando a função composta e verificando para quais valores de t ela é nula:

$$f(\gamma_3(t)) = f(0, t) = 0$$

Portanto, como $f(\gamma_3(t))$ é igual à uma constante, segue que $f'(\gamma_3(t)) = 0$, $\forall t \in [0, 1]$.

Comparando os valores que a função assume nos pontos encontrados, concluímos que o menor valor de f é -2 e ocorre no ponto (1,0) e o maior valor é 0 e ocorre em qualquer ponto do tipo (0,y). Assim, pontos do tipo (0,y) representam pontos de máximo e o ponto (1,0) é o ponto de mínimo de f em A.

c) $f(x, y) = xy$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 5\}$

Note que podemos representar graficamente o conjunto A da seguinte maneira (note que A é compacto):

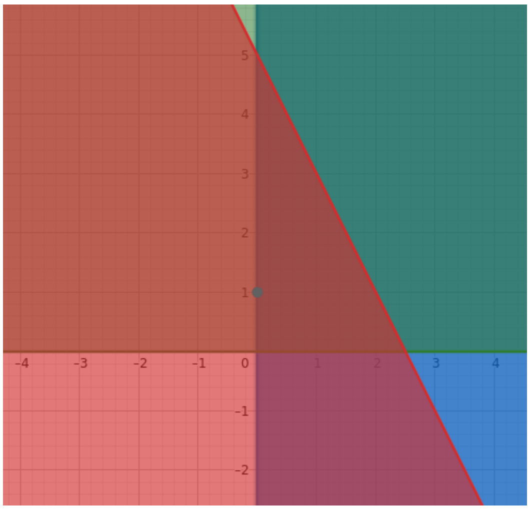

Figura 3: Em azul, $x \geq 0$, em verde $y \geq 0$ e em vermelho $y \leq 5 - 2x$. Note que a intersecção dessas 3 condições ocorre na intersecção das 3 cores (triângulo de vértices (0,0), (0,5) e (5/2,0)).

Novamente, podemos subdividir a fronteira de A em 3 caminhos: $\gamma_1(t) = (0, t), 0 \leq t \leq 5$, $\gamma_2(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 5/2$ e $\gamma_3(t) = (t, 5 - 2t), 0 \leq t \leq 5/2$.

i) No interior de A

$$f_x(x, y) = y$$

$$f_y(x, y) = x$$

Impondo $f_x = f_y = 0$:

$$y = 0$$
$$x = 0$$

Dessa sistema, tiramos que $x = 0$ e $y = 0$. O ponto $(0,0)$ é ponto da fronteira de A, então eventualmente aparecerá nas contas que se seguem. Entretando, já podemos avaliar que $f(0,0) = 0$.

ii) Na fronteira de A

1) $\gamma_1(t) = (0, t), 0 \leq t \leq 5$

Nos extremos:

$$t = 0 \Rightarrow \gamma_1(0) = (0,0) \Rightarrow f(0,0) = 0$$
$$t = 1 \Rightarrow \gamma_1(1) = (0,1) \Rightarrow f(0,1) = 0$$

Derivando a função composta e verificando para quais valores de t ela é nula:

$$f(\gamma_1(t)) = f(0,t) = 0 \quad \forall t$$

Assim,

$$f'(\gamma_1(t)) = 0 \forall t$$

Logo, pontos do tipo $(0, y)$ são candidatos à máximos ou mínimos de f sujeito ao compacto A e $f(0, y) = 0$.

2) $\gamma_2(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 5/2$

Nos extremos:

$$t = 0 \Rightarrow \gamma_2(0) = (0,0) \Rightarrow f(0,0) = 0$$
$$t = 1 \Rightarrow \gamma_2(1) = (1,0) \Rightarrow f(1,0) = 0$$

Derivando a função composta e verificando para quais valores de t ela é nula:

$$f(\gamma_2(t)) = f(t,0) = 0 \quad \forall t$$

Assim,

$$f'(\gamma_2(t)) = 0 \forall t$$

Logo, pontos do tipo $(x, 0)$ são candidatos à máximos ou mínimos de f sujeito ao compacto A e $f(x, 0) = 0$.

3) $\gamma_3(t) = (t, 5 - 2t), 0 \leq t \leq 5/2$.

Nos extremos:

$$t = 0 \Rightarrow \gamma_3(0) = (0,5) \Rightarrow f(0,5) = 0$$
$$t = 5/2 \Rightarrow \gamma_3(5/2) = (5/2,0) \Rightarrow f(5/2,0) = 0$$

Derivando a função composta e verificando para quais valores de t ela é nula:

$$f(\gamma_3(t)) = f(t, 5-2t) = 5t - 2t^2 \Rightarrow f'(\gamma_3(t)) = 5 - 4t$$

$$5 - 4t = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{4}$$

Se $t = \frac{5}{4}$, $(x, y) = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right)$ é candidato à máximo ou mínimo de f em A. Veja que $f\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right) = \frac{25}{8}$.

Note então que o maior valor que f assume no compacto é $\frac{25}{8}$ e este ocorre quando o ponto é $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right)$ e o menor valor de f é zero e ocorre para quaisquer pontos do tipo (0,y) ou (x,0). Assim, pontos do tipo (x,0) e (0,y) representam os pontos mínimos de f sobre A e o ponto $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right)$ é o ponto máximo de f sobre A.

Questão 51

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

A região retangular é compreendida pelas retas $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$ e $y = 2$.

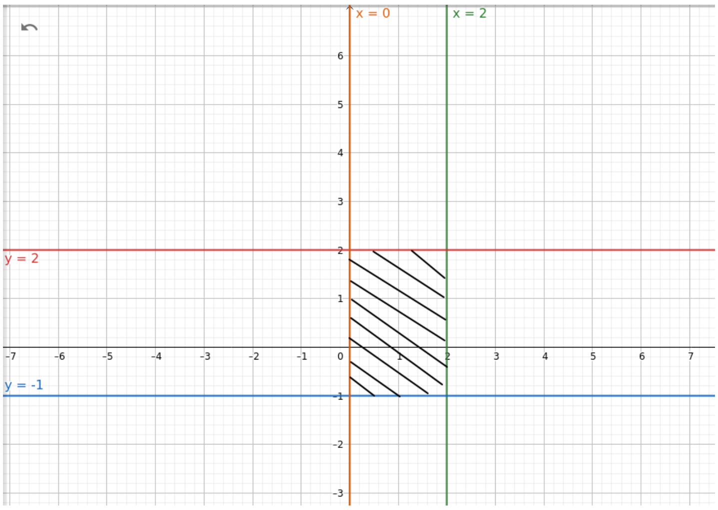

Figura 4: Região Retangular hachurada em preto.

Podemos chamar região retangular de A (note que A é um conjunto compacto). Podemos entender a fronteira dessa região como subdividida em 4 partes: $\gamma_1(t) = (t, -1), 0 \leq t \leq 2$, $\gamma_2(t) = (2, t), -1 \leq t \leq 2$, $\gamma_3(t) = (t, 2), 0 \leq t \leq 2$, $\gamma_4(t) = (0, t), -1 \leq t \leq 2$.

i) No interior:

$$f_x = 3x^2 - 3y$$

$$f_y = 3y^2 - 3x$$

Pontos críticos: $f_x = f_y = 0$:

$$3x^2 - 3y = 0$$

$$3y^2 - 3x = 0$$

A solução desse sistema é: $y = 0$ e $x = 0$ (ponto (0,0)) e $y = 1$ e $x = 1$ (ponto (1,1)). O ponto (0,0) está na fronteira do conjunto A então eventualemente aparecerá nos cálculos, podemo adiantar que $f(0,0) = 0$ e o ponto (1,1) é, de fato, um ponto interior de A, no qual $f(1,1) = -1$.

ii) Fronteira de A:

1) $\gamma_1(t) = (t, -1), 0 \leq t \leq 2$

Nos extremos:

$$t = 0 \Rightarrow \gamma_1(0) = (0, -1) \Rightarrow f(0, -1) = -1$$

$$t = 2 \Rightarrow \gamma_1(2) = (2, -1) \Rightarrow f(2, -1) = 13$$

Derivando a função composta e verificando para quais valores de t ela é nula:

$$f(\gamma_1(t)) = f(t, -1) = t^2 - 1 + 3t \Rightarrow f'(\gamma_1(t)) = 2t + 3$$

$$2t + 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{2}$$

Perceba que estamos considerando t no intervalo $[0, 2]$ e $-\frac{3}{2}$ não está nesse intervalo.

2) $\gamma_2(t) = (2, t), -1 \leq t \leq 2$

Nos extremos:

$$t = -1 \Rightarrow \gamma_2(-1) = (2, -1) \Rightarrow f(2, -1) = 13$$

$$t = 2 \Rightarrow \gamma_2(2) = (2, 2) \Rightarrow f(2, 2) = 4$$

Derivando a função composta e verificando para quais valores de t ela é nula:

$$f(\gamma_2(t)) = f(2, t) = 8 + t^2 - 6t \Rightarrow f'(\gamma_2(t)) = 2t - 6$$

$$2t - 6 = 0 \Rightarrow t = 3$$

Perceba que $t = 3$ não faz parte do intervalo que estamos considerando ($[-1, 2]$).

3) $\gamma_3(t) = (t, 2), 0 \leq t \leq 2$

Nos extremos:

$$t = 0 \Rightarrow \gamma_3(0) = (0, 2) \Rightarrow f(0, 2) = 8$$

$$t = 2 \Rightarrow \gamma_3(2) = (2, 2) \Rightarrow f(2, 2) = 4$$

Derivando a função composta e verificando para quais valores de t ela é nula:

$$f(\gamma_3(t)) = f(t,2) = t^2 + 8 - 6t \Rightarrow f'(\gamma_3(t)) = 2t - 6$$

$$2t - 6 = 0 \Rightarrow t = 3$$

Perceba que $t = 3$ não faz parte do intervalo que estamos considerando ($[0,2]$).

4) $\gamma_4(t) = (0,t), -1 \leq t \leq 2.$

Nos extremos:

$$t = -1 \Rightarrow \gamma_4(-1) = (0,-1) \Rightarrow f(0,-1) = -1$$

$$t = 2 \Rightarrow \gamma_4(2) = (0,2) \Rightarrow f(0,2) = 8$$

Derivando a função composta e verificando para quais valores de t ela é nula:

$$f(\gamma_4(t)) = f(0,t) = t^3 \Rightarrow f'(\gamma_4(t)) = 3t^2$$

$$3t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$$

Se $t = 0$, temos o ponto $(0,0)$. Note que $f(0,0) = 0$.

Comparando o valor que f assume nos pontos encontrados, percebemos que o maior valor da função é 13 e ocorre no ponto (2,-1) e o menor valor da função é -1 e ocorre nos pontos (0,-1) e (1,1). Logo, o ponto (2,-1) é ponto de máximo da função em A e os pontos (0,-1) e (1,1) são pontos de mínimo da função em A.

Questão 52

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-4)^2$$

A região do triângulo compreendido entre as 3 retas $x = 0$, $y = 0$ e $y = 1 - x$ foi chamada de A e está representada abaixo (note que A é compacto).

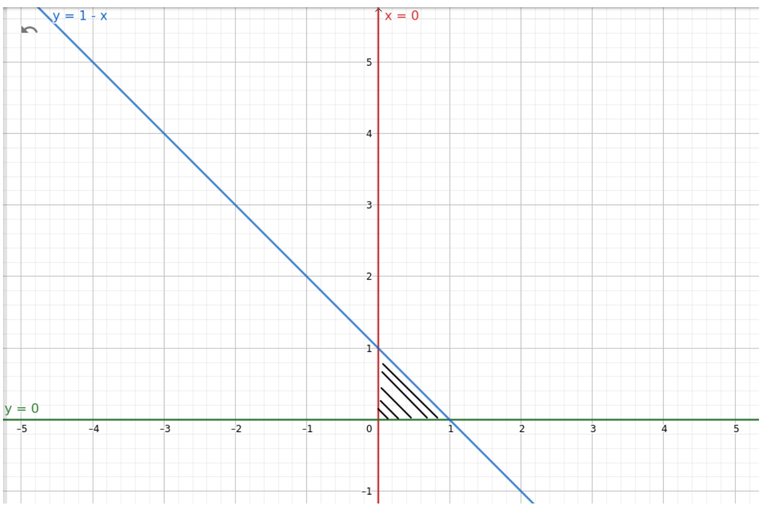

Figura 5: Região triangular A hachurada.

Podemos então subdividir a fronteira de A em 3 partes: $\gamma_1(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 1$, $\gamma_2(t) = (0, t), 0 \leq t \leq 1$, $\gamma_3(t) = (t, 1-t), 0 \leq t \leq 1$.

i) No interior de A:

$$f_x = 2(x-1)$$

$$f_y = 2(y-4)$$

Para encontrar os pontos críticos $f_x = f_y = 0$:

$$2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$2(y-4) = 0 \Rightarrow y = 4$$

Note que o único ponto crítico de f é o ponto (1,4), que não está no interior de A.

ii) Fronteira de A

1) $\gamma_1(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 1$

Nos extremos:

$$t = 0 \Rightarrow \gamma_1(0) = (0,0) \Rightarrow f(0,0) = 17$$

$$t = 1 \Rightarrow \gamma_1(1) = (1,0) \Rightarrow f(1,0) = 16$$

Derivando a função composta e analisando os pontos em que ela se anula:

$$f(\gamma_1(t)) = f(t,0) = (t-1)^2 + 16 \Rightarrow f'(\gamma_1(t)) = 2(t-1)$$

$$2(t-1) = 0 \Rightarrow t = 1$$

Como já vimos, se $t = 1$, o ponto é (1,0) 4 $f(1,0) = 16$.

2) $\gamma_2(t) = (0, t), 0 \leq t \leq 1$

Nos extremos:

$$t = 0 \Rightarrow \gamma_2(0) = (0,0) \Rightarrow f(0,0) = 17$$

$$t = 1 \Rightarrow \gamma_2(1) = (0,1) \Rightarrow f(0,1) = 10$$

Derivando a função composta e analisando os pontos em que ela se anula:

$$f(\gamma_2(t)) = f(0,t) = 1 + (t-4)^2 \Rightarrow f'(\gamma_2(t)) = 2(t-4)$$

$$2(t-4) = 0 \Rightarrow t = 4$$

Note que $t = 4$ não pertence ao intervalo que estamos considerando para esse caminho ($t \in [0,1]$).

3) $\gamma_3(t) = (t, 1-t), 0 \leq t \leq 1$

Nos extremos:

$$t = 0 \Rightarrow \gamma_3(0) = (0,1) \Rightarrow f(0,1) = 10$$

$$t = 1 \Rightarrow \gamma_3(1) = (1,0) \Rightarrow f(1,0) = 16$$

Derivando a função composta e analisando os pontos em que ela se anula:

$$f(\gamma_3(t)) = f(t, 1-t) = (t-1)^2 + (-3-t)^2 \Rightarrow f'(\gamma_3(t)) = 2(t-1) - 2(-3-t)$$

$$2(t-1) - 2(-3-t) = 2t - 2 + 6 + 2t = 0 \Rightarrow 4t = 4 \Rightarrow t = 1$$

Como já vimos, se t = 1, o ponto é $(1,0)$ e $f(1,0) = 16$.

Logo, o maior valor que f assume em A é 17 e ocorre no ponto (0,0) e o menor valor que f assume em A é 10 e ocorre no ponto (0,1). Portanto, o ponto (0,0) é ponto de máximo de f sobre A e o ponto (0,1) é ponto de mínimo de f sobre A.

Questão 53

a) $f(x,y) = 3x + y, \quad x^2 + 2y^2 = 1$

Podemos definir:

$$g(x,y) \equiv x^2 + 2y^2 - 1$$

Aplicando o Método dos Multiplicadores de Lagrange, temos que:

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$g(x,y) = 0$$

i) Derivadas Parciais/ Vetor Gradiente:

$$\nabla f = (3,1)$$

$$\nabla g = (2x, 4y)$$

$$(3,1) = \lambda(2x, 4y)$$

Daí, tiramos que:

$$3 = \lambda 2x \Rightarrow x = \frac{3}{2\lambda}$$

$$1 = \lambda 4y \Rightarrow y = \frac{1}{4\lambda}$$

ii) $g(x,y) = 0$

$$g(x,y) = 0 \Rightarrow x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

Substituindo em função de λ:

$$(\frac{3}{2\lambda})^2 + 2(\frac{1}{4\lambda})^2 = 1$$

A solução dessa equação é:

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{19}{8}}$$

Se $\lambda = \sqrt{\frac{19}{8}}$, $x = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{19}}$ e $y = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{19}}$. Observe que $f(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{19}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{19}}) = \frac{19\sqrt{8}}{4\sqrt{19}}$.
Se $\lambda = -\sqrt{\frac{19}{8}}$, $x = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{19}}$ e $y = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{19}}$. Observe que $f(-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{19}}, -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{19}}) = -\frac{19\sqrt{8}}{4\sqrt{19}}$.

Como $f(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{19}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{19}}) > f(-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{19}}, -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{19}})$, segue que $\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{19}}, \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{19}}\right)$ é ponto de máximo de f e $\left(-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{19}}, -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{19}}\right)$ é ponto de mínimo de f.

b) $f(x, y) = xy, \quad x^2 + 4y^2 = 8$

Definimos:

$$g(x, y) \equiv x^2 + 4y^2 - 8$$

Multiplicadores de Lagrange:

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$g(x, y) = 0$$

i) Derivadas Parciais/ Vetor Gradiente:

$$\nabla f = (y, x)$$

$$\nabla g = (2x, 8y)$$

$$(y, x) = \lambda(2x, 8y)$$

Temos então que:

$$y = 2\lambda x$$

$$x = 8\lambda y$$

Substituindo a equação debaixo na e cima:

$$y = 2\lambda 8\lambda y \Rightarrow y(1 - 16\lambda^2) = 0$$

Note que $y = 0$ é solução dessa equação, mas se $y = 0$, temos que $x = 0$ e o ponto (0,0) não satisfaz a equação $x^2 + 4y^2 = 8$. Assim, as soluções dessa equação que são viáveis são:

$$1 - 16\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{4}$$

Se $\lambda = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{4}2x \Rightarrow y = \frac{x}{2}$.
Se $\lambda = -\frac{1}{4}$, $y = -\frac{1}{4}2x \Rightarrow y = -\frac{x}{2}$.

ii) $g(x, y) = 0$

$$g(x, y) = 0 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 8$$

1) Para $y = \frac{x}{2}$:

$$x^2 + 4\frac{x^2}{4} = 8 \Rightarrow x = \pm 2$$

Se $x = 2$, temos que $y = 1$. $P_1 = (2, 1)$
Se $x = -2$, temos que $y = -1$. $P_2 = (-2, -1)$.

1) Para $y = -\frac{x}{2}$:

$$x^2 + 4\frac{x^2}{4} = 8 \Rightarrow x = \pm 2$$

Se $x = 2$, temos que $y = -1$. $P_3 = (2, -1)$
Se $x = -2$, temos que $y = 1$. $P_4 = (-2, 1)$.

Avaliando a função nos 4 pontos temos:

$$f(P_1) = f(2, 1) = 2$$

$$f(P_2) = f(-2, -1) = 2$$

$$f(P_3) = f(2, -1) = -2$$

$$f(P_4) = f(-2, 1) = -2$$

Note que $f(P_1) = f(P_2) > f(P_3) = f(P_4)$. Logo, P_1 e P_2 são pontos de máximo de f P_3 e P_4 são pontos de mínimo de f.

c) $f(x, y) = x^2 - 2y^2, \quad x^2 + y^2 - 2x = 0$

Definindo:

$$g(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 2x$$

APlicando o Método dos Multiplicadores de Lagrange:

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

$$g(x, y) = 0$$

i) Derivadas Parciais/ Vetor Gradiente:

$$\nabla f = (2x, -4y)$$

$$\nabla g = (2x - 2, 2y)$$

$$(2x, -4y) = \lambda(2x - 2, 2y)$$

Temos o seguinte sistema:

$$2x = \lambda(2x - 2)$$

$$-4y = \lambda 2y \Rightarrow y(4 + 2\lambda) = 0$$

Temos duas soluções possíveis: $y = 0$ ou $\lambda = -2$.

ii) $g(x, y) = 0$

$$g(x, y) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Para $y = 0$ temos que:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$$

Portanto, temos os pontos $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = (2, 0)$.

Para $\lambda = -2$, temos que $2x = \lambda(2x - 2) = (-2)(2x - 2)$ e, portanto, $x = -2x + 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$.

$$(\frac{2}{3})^2 + y^2 - 2(\frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{3} - \frac{4}{9}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$$

Logo, temos os pontos $P_3 = (\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{8}}{3})$ e $P_4 = (\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{8}}{3})$.

Analisando a função nos pontos encontrados:

$$f(P_1) = f(0, 0) = 0$$

$$f(P_2) = f(2, 0) = 4$$

$$f(P_3) = f(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{8}}{3}) = -\frac{12}{9}$$

$$f(P_4) = f(\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{8}}{3}) = -\frac{12}{9}$$

O maior valor que f assume é 4 e ocorre no ponto P_2 e o menor valor que f assume é $-\frac{12}{9}$ e ocorre nos pontos P_3 e P_4. Portanto, P_2 é ponto de máximo de f e P_3 e P_4 são pontos de mínimo de f.

Questão 54

Para utilizar o Método dos Multiplicadores de Lagrange, temos que definir 2 funções (a que quero encontrar os extremos chamo de f e a outra chamo de g). O produto das coordenadas de uma função de 2 variáveis é simplesmente xy. Assim, definimos:

$$f(x, y) \equiv xy$$

$$g(x, y) \equiv x + 2y - 1$$

i) Derivadas Parciais/ Vetor Gradiente:

$$\nabla f = (y, x)$$

$$\nabla g = (1, 2)$$

$$(y, x) = \lambda(1, 2)$$

Daí, tiramos que:

$$y = \lambda$$
$$x = 2\lambda$$

ii) $g(x, y) = 0$

$$g(x, y) = 0 \Rightarrow x + 2y - 1 = 0$$
$$2\lambda + 2\lambda = 1 \Rightarrow = \frac{1}{4}$$

Como $= \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{4}$. Logo, o ponto que maximiza o produto das coordenadas da reta é o ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Questão 55

Novamente, temos que utilizar a função distância. Para facilitar, podemos definir f como sendo a função distância ao quadrado. A função distância ao quadrado em relação ao ponto (x_0, y_0) é dada como:

$$f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

No nosso caso, temos que $(x_0, y_0) = (14, 1)$. Assim, temos:

$$f(x, y) = (x - 14)^2 + (y - 1)^2$$
$$g(x, y) = y - x^2$$

i) Derivadas Parciais/ Vetor Gradiente:

$$\nabla f = (2(x - 14), 2(y - 1))$$
$$\nabla g = (-2x, 1)$$

$$(2(x - 14), 2(y - 1)) = \lambda(-2x, 1)$$

Temos então duas equações:

$$2(x - 14) = -2x\lambda \Rightarrow x - 14 = -x\lambda \Rightarrow x = \frac{14}{1 + \lambda}$$
$$2(y - 1) = \lambda \Rightarrow y = \frac{2 + \lambda}{2}$$

ii) $g(x, y) = 0$

$$g(x, y) = 0 \Rightarrow y - x^2 = 0$$
$$\frac{2 + \lambda}{2} - (\frac{14}{1 + \lambda})^2 = 0$$

A solução real dessa equação é $\lambda = 6$.

Se $\lambda = 6$, $x = \frac{14}{1+6} = 2$ e $y = \frac{2+6}{2} = 4$. Assim, o ponto da parábola mais próximo do ponto (14,1) é o ponto (2,4).