MAT0234 - Medida e Integração -

IME - segundo semestre 2020

Lista Espaços L^p

1. Mostre que o Teorema da Convergência Dominada vale nos espaços L^p, se a função g pertencer a L^p. Sugestão: tente imitar a demonstração dada para o Teorema (p=1).

2. se as funções $f_n,\ f\ g$ pertencerem a L^∞ o que acontece com o Teorema da Convergência Dominada? $||f_n - f||_\infty \to 0$?

3. Prove esta versão mais geral do Teorema da Convergência Dominada, refazendo a demonstração do Teorema: Sejam $f_n,\ g_n,\ f,\ g$ funções em L^1, com $f_n \to f,\ g_n \to g$ qtp e $|f_n| \leq g_n$; $\int g_n\ d\mu \to \int g\ d\mu$.
Então $\int f_n\ d\mu \to \int f\ d\mu$. Sugestão: tente imitar a demonstração dada para o Teorema. Qual hipótese substitui a hipótese de dominação por uma função, do Teorema original? Comente.

4. Seja f_n uma sequência de funções em L^1 que converge qtp para $f \in L^1$. Mostre que $f_n \to f\ em\ L^1 \iff ||f_n||_1 \to ||f||_1$.
Solução: Considere $h_n = |f_n| + |f| - |f_n - f|$ e aplique o Lema de Fatou.

5. Se $f \in L^p(X, \mathcal{X}, \mu),\ 1 \leq p < +\infty\ e\ \epsilon > 0$ então $\exists\ \phi$ uma função simples com $||f - \phi||_p < \epsilon$. Sugestão: use a sequência de funções simples definida na lista de Funções Mensuráveis. O que acontece no caso de L_∞?

6. Se $f \in L^p e\ g \in L^\infty$ então $fg \in L^p e\ ||fg||_p \leq ||f||_p ||g||_\infty$.

7. Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida finita e f mensurável. Seja $E_n = \{x \in X; (n-1) \leq |f(x)| < n$
Mostre que $f \in L^p \iff \sum_{n=1}^\infty n^p \mu(E_n) < +\infty$.

8. Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida e f mensurável, $f \in L^{p_1} \cap L^{p_2},\ p_1 < p_2$. Mostre que $f \in L^p\ \forall\ p \in\ [p_1, p_2]$.

9. Seja $f \in L^p(X)$ uma função limitada. Mostre que $f \in L^q(X)\ \forall q\ \geq\ p$.

10. Desigualdade de Chebyshev: Se $f \in L^p(X)$ então $||f||_p^p\ \geq\ c^p\ \mu(\{|f(x)|\ \geq\ c\})$.

11. Mostre que $L^\infty(X, \mathcal{X}, \mu)$ está contido em $L^1(X, \mathcal{X}, \mu) \iff \mu(X) < +\infty$.
Sugestão: considere a função $f = 1$.

12. Se $f \in L^\infty\ e\ \mu(X) = 1$ então $||f||_{+\infty} = \lim_{p\to+\infty} ||f||_p$.
Solução: seja $\phi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{E_k}$ simples, com a representação padrão e com máximo em a_1. Então $(\int |\phi|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} = a_1 \left[\sum_{k=1}^n (\frac{a_k}{a_1})^p \mu(E_k)\right]^{\frac{1}{p}}$. Observe para $k = 1$, colocando em evidência a_1, temos a primeira parcela igual a $\mu(E_1)$, e em todas as outras os coeficientes são potências com base < 1 e expoente p. Quando $p \to +\infty$ as outras parcelas tendem para 0. Tomamos p suficientemente grande de modo que a soma das parcelas com $k \geq 2$ torna-se $< 1 - \mu(E_1)$ e assim temos que $||\phi||_p \leq a_1[\mu(E_1) + \sum_{k=2}^n (\frac{a_k}{a_1})^p \mu(E_k)]^{\frac{1}{p}} \leq a_1\,[\mu(E_1) + 1 - \mu(E_1)]^{\frac{1}{p}} = a_1$. Agora aproximamos f por uma função ϕ simples. Lembre que se f limitada, então a sequência ϕ_n da Lista de Funções Mensuráveis converge uniformemente.

13. Usando o exercício anterior calcule $\lim_{p\to\infty}\ ||sen(x)||_p\ para\ Lp[0,1]$. Qual é o $lim \int_{[0,1]} sen^p(x)\ d\mu$?

14. Seja $X = \mathbb{N}$ e λ a medida em X, com $\lambda(n) = \frac{1}{n^2}$. Mostre que $\lambda(X) < +\infty$. Seja $f(n) = \sqrt{n}$. Mostre que $f \in L^p \iff 1 \leq p < 2$. O análogo acontece se $X = (0,1)$ com a medida de Lebesgue e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.