## MAT0315 - Introdução à Análise - 2020

## Gabarito - Questão 4 - Prova 1

Eram 4 versões, com mesmo nível de dificuldade. Todas tinham a seguinte observação: *Basta apresentar a função $f$ (defina direitinho, certifique-se de que não falta nada, não sobra nada, não repete nada). Não precisa demonstrar que $f$ é bijetora.*

Tipo 1 Seja $A = \left\{2^k : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Prove que $A$ é enumerável apresentando uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to A$.

Solução: Basicamente, a resolução consiste em organizar uma forma de associar os elementos de $\mathbb{N}$ aos expoentes dos elementos de $A$, de modo que "não falte nada, não sobre nada, não repita nada".

Vale observar que havíamos visto em aula uma bijeção de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$. Bastava, portanto, associar agora cada elemento de $\mathbb{Z}$ ao expoente das potências em $A$.

Encontrei 3 soluções distintas, todas corretas:

(a) Esta solução associa os elementos de $\mathbb{N}$ aos de $A$ da sequinte maneira:

$$\begin{array}{lcrcl} \mathbb{N} & & \mathbb{Z} & & A \\ 1 & \mapsto & 0 & \mapsto & 2^0 \\ 2 & \mapsto & 1 & \mapsto & 2^1 \\ 3 & \mapsto & -1 & \mapsto & 2^{-1} \\ 4 & \mapsto & 2 & \mapsto & 2^2 \\ 5 & \mapsto & -2 & \mapsto & 2^{-2} \\ \cdots & & & & \end{array}$$

Note que estamos associando os naturais pares às potências de expoentes positivos e os naturais ímpares diferentes de 1 às potências de expoentes negativos. Em resumo, podemos escrever

$$f(n) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \text{se } n \text{ for par;} \\ \\ 2^{\frac{1-n}{2}}, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

(b) Outra solução que apareceu na prova foi:

$$f(n) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, & \text{se } n \text{ for ímpar;} \\ \\ 2^{\frac{-n}{2}}, & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

Essa função leva os naturais pares nas potências de expoentes negativos e os naturais ímpares diferentes de 1 nas potências de expoentes positivos.

(c) A terceira solução correta que apareceu na prova é um pouco menos natural, mas é correta:

$$f(n) = \begin{cases} 2^{\frac{n-2}{2}}, & \text{se } n \text{ for par;} \\ \\ 2^{\frac{-1-n}{2}}, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Diferentemente das anteriores, a função leva 2 em $2^0$. Também leva:
1 em $2^{-1}$, 3 em $2^{-2}$, 5 em $2^{-3}$, $\ldots$, 4 em $2^1$, 6 em $2^2$, $\ldots$
Intuitivamente, não falta nada, não sobra nada, não repete nada!

Tipo 2 Seja $B = \left\{ \dfrac{1}{2^k} : k \in \mathbb{Z} \right\}$. Prove que $B$ é enumerável apresentando uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to B$.

Solução: Basicamente as mesmas soluções apresentadas no Tipo 1 acima funcionam aqui, apenas trocando-se a base da potência, que era 2 e agora passa a ser $\frac{1}{2}$:

(a) $f(n) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}, & \text{se } n \text{ for par;} \\ \\ \frac{1}{2^{\frac{1-n}{2}}}, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases} = \begin{cases} 2^{-\frac{n}{2}}, & \text{se } n \text{ for par;} \\ \\ 2^{\frac{n-1}{2}}, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$

(b) $f(n) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}, & \text{se } n \text{ for ímpar;} \\ \\ \frac{1}{2^{\frac{-n}{2}}}, & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$

(c) $f(n) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}}, & \text{se } n \text{ for par;} \\ \\ \frac{1}{2^{\frac{-1-n}{2}}}, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$

Tipo 3 Fixado um número $q \in \mathbb{N}$, defina o conjunto $F_q = \left\{ \dfrac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \right\}$. Prove que $F_q$ é enumerável apresentando uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to F_q$.

Solução: Note que $F_q$ é o conjunto de todas as frações de denominador fixado igual a $q$. Um diagrama interessante foi apresentado na resolução de um colega:

$$\begin{array}{lccccccc} \mathbb{N}: & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{Z}: & 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & 3, & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ F_q: & \frac{0}{q}, & \frac{1}{q}, & \frac{-1}{q}, & \frac{2}{q}, & \frac{-2}{q}, & \frac{3}{q}, & \dots \end{array}$$

Nesse caso, a função é escrita como

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2q}, & \text{se } n \text{ for par;} \\ \\ \frac{1-n}{2q}, & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Há outras possíveis funções bijetoras de $\mathbb{N}$ em $F_q$, análogas às apresentadas nas soluções do Tipo 1.

Tipo 4 Seja $G = \{3^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Prove que $G$ é enumerável apresentando uma função bijetora $f : \mathbb{N} \to G$.

Solução: Análoga à solução da versão Tipo 1, trocando-se a base da potência de 2 para 3.

Uma última observação, que acho interessante vocês conhecerem, já que serão professores também. Eu pensei em colocar também um outro conjunto enumerável formado por todas as frações de numerador $p$ fixado: $\left( H_p = \left\{ \dfrac{p}{q} : q \in \mathbb{Z}^* \right\} \right)$. Mudei de ideia porque este seria ligeiramente mais fácil do que os anteriores. Vocês conseguem perceber por quê?