Complementos de Física Moderna
Bloco 3 - Aula 03

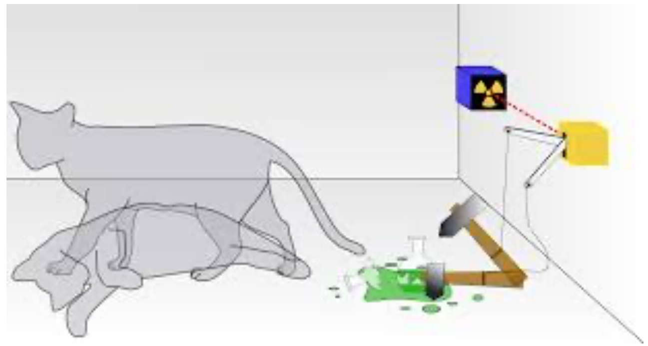
Ivã Gurgel (gurgel@usp.br)
Marcelo G. Munhoz (munhoz@if.usp.br)

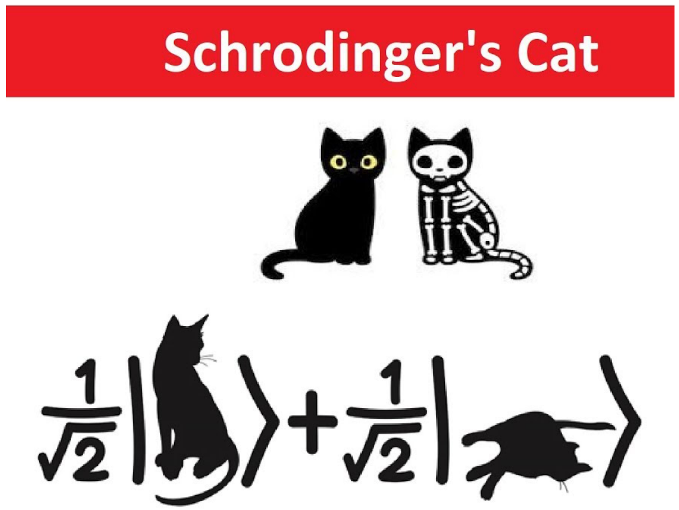
“Porque o formalismo não tem ferido a minha simplicidade, e sim o meu orgulho…”

- Quais são os aspectos mais fundamentais e abstratos da MQ?
- Qual é a sua importância para decidirmos o "por que", o "o que" e "o como"?
- Conhecer um pouco do formalismo matemático da MQ ajuda a entender essa essência e, consequentemente, evitar armadilhas e abordar o tema no EM com mais autonomia?

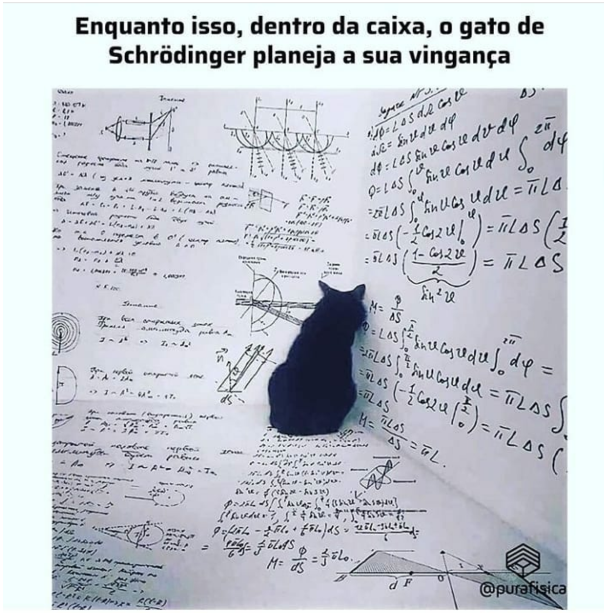
O Famoso Gato de Schroedinger

- O que essa "anedota" pode nos dizer sobre os fundamentos da Física Quântica?
- Como explica-la para os nossos alunos?
- O que o formalismo da Física Quântica tem a ver com isso?

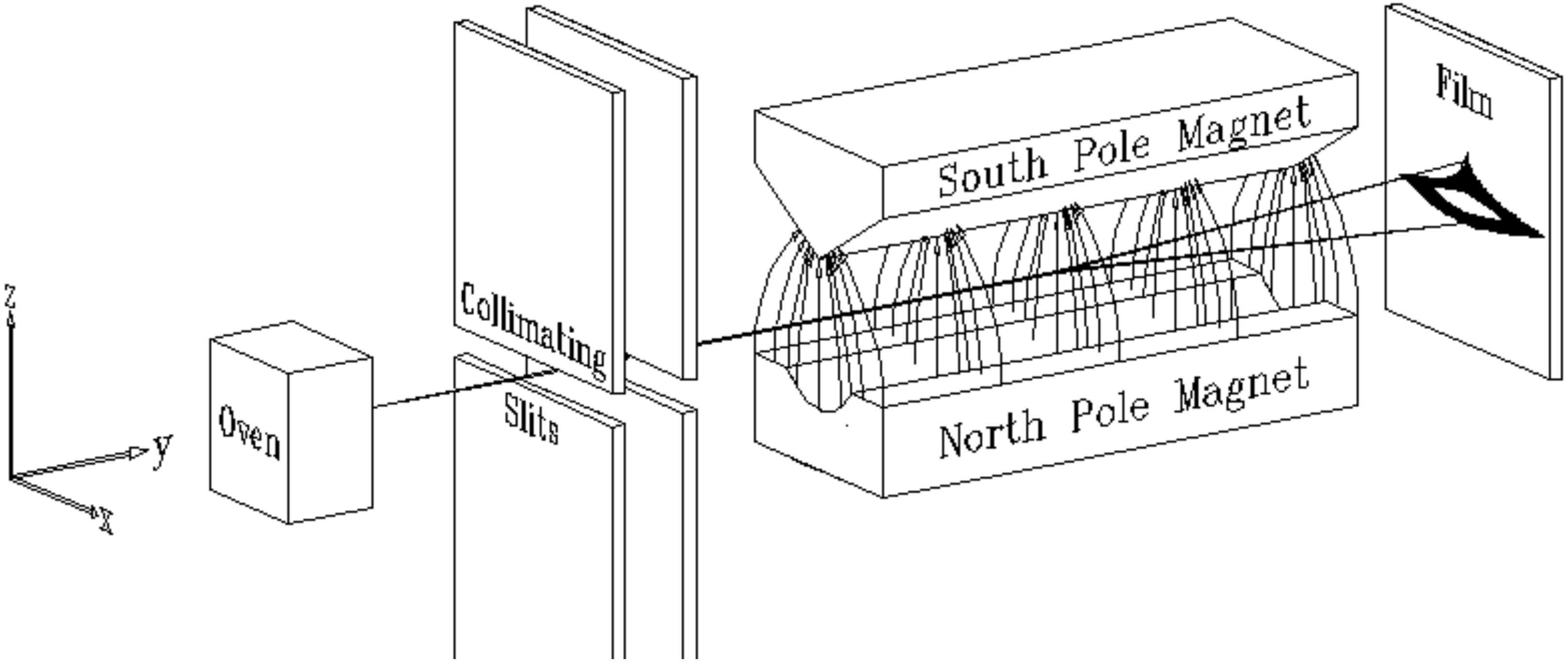




Talvez o assunto mais popular para memes da Física…

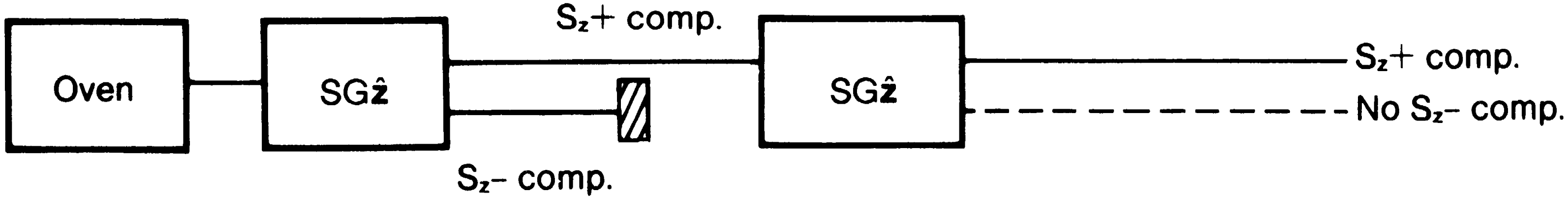


O experimento de Stern e Gerlach



- Qual é o significado do eixo-z neste experimento?
- O resultado mudaria se girarmos o aparato?

Experimento de Stern-Gerlach Sequencial



(a)

Experimento de Stern-Gerlach Sequencial

- Como podemos interpretar esse resultado?
- Vamos examinar um pouco do formalismo da Mecânica Quântica proposto por P. A.M. Dirac para buscar entender o que está por trás desse resultado, que está ligado aos fundamentos da Física Quântica

Ket Space

- Os estados possíveis de um determinado sistema físico compõem um espaço de vetores complexos cuja dimensão depende da natureza desse sistema físico
- Podemos representar esse vetor de estado pelo símbolo $|\alpha\rangle$, que é chamado de **ket**

Operadores

- Um observável é representado por um operador que atua nesse espaço vetorial
- De forma geral, seja um operador A e um estado $|\alpha\rangle$, a ação desse operador sobre o estado quântico leva a um outro estado quântico dado por $A(|\alpha\rangle) = A|\alpha\rangle$

Operadores

- Vamos considerar o caso específico em que o operador ao ser aplicado em um estado quântico, retorno o próprio estado multiplicado por um número
- $A|a\rangle = a|a\rangle$
- O estado $|a\rangle$ é chamado de auto-estado (*eigenkets*) do operador A e a é o seu auto-valor (*eigenvalue*)

Um estado qualquer…

- Essa ideia de auto-estado é bastante conveniente, pois um estado qualquer pode ser representado por uma combinação linear de auto-estados de um certo operador $|a_i\rangle$:

$$|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i |a_i\rangle$$

- onde os coeficientes c_i podem ser números complexos e N é a dimensão do espaço em questão

O Spin nessa Notação

- Voltando ao experimento de Stern-Gerlach com o campo magnético na direção z, os átomos de prata com spin "para cima" estão em um estado quântico que pode ser representado por um ket dado por:

  $$|S_z; +\rangle$$

- e com spin "para baixo":

  $$|S_z; -\rangle$$

O Spin nessa Notação

- Esses estados são auto-estados de um operador que representa essa grandeza (o spin na direção z), S_z, sendo que podemos definir o spin "para cima":

$$S_z|S_z;+\rangle = \frac{\hbar}{2}|S_z;+\rangle$$

- e o spin "para baixo":

$$S_z|S_z;-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|S_z;-\rangle$$

O Spin nessa Notação

- Portanto, um estado qualquer, $|\alpha\rangle$, do spin de um determinado átomo de prata será uma combinação linear desses dois:

$$|\alpha\rangle = c_1|S_z;+\rangle + c_2|S_z;-\rangle$$

- ou seja, neste caso temos $N = 2$

Espaço físico de 3 dimensões

- Em analogia, $|\alpha\rangle$ é como um vetor no espaço físico tridimensional, onde os versores $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ indicam as dimensões

$$\overrightarrow{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$$

- Porém, $|\alpha\rangle$ é algo mais abstrato que vale para qualquer "espaço", como o dos spins

Bra Space

- Também precisamos definir um outro espaço vetorial, dual ao espaço de kets, chamado de espaço de bras
- Para cada vetor no espaço de kets há um correspondente no espaço de bra, representado por $\langle\alpha|$

Produto Interno ou Produto Escalar

- A partir dessa definição, podemos incluir na teoria o produto interno ou escalar, que é o resultado do "produto" entre um vetor no espaço de kets $|\alpha\rangle$ com outro no espaço de bras $\langle\beta|$, representado por $\langle\beta|\alpha\rangle$
- O resultado desse produto é um número complexo

Produto Interno ou Produto Escalar

- Algumas propriedades de produto interno:
  - $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle *$
  - $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$
  - Ortogonalidade: $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$
  - Normalização: $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$

Produto Externo

- Podemos também definir um Produto Externo dado por:

  $$|\beta\rangle\langle\alpha|$$

- que ao contrário do produto interno, define um operador e não um número

Base de Auto-estados

- Após essas definições, podemos voltar à representação de um estado quântico como uma soma de auto-estados de um determinado operador:

$$|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i |a_i\rangle$$

- Notando que:

$$(|a_i\rangle\langle a_i|)(|\alpha\rangle) = (|a_i\rangle)(\langle a_i|\alpha\rangle) = c_i|a_i\rangle$$

Base de Auto-estados

- Podemos escrever que:

$$|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i|a_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} |a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle$$

- que, por sua vez, leva a:

$$\sum_{i=1}^{N} |a_i\rangle\langle a_i| = 1, \text{ ou seja}$$

- que é a chamada relação de completeza

Operador Projeção

- O operador $|a_i\rangle\langle a_i|$ é chamado de operador de projeção, pois retorna o coeficiente correspondente a um auto-estado na expansão do estado quântico e esse auto-estado

$$(|a_i\rangle\langle a_i|)(|\alpha\rangle) = (|a_i\rangle)(\langle a_i|\alpha\rangle) = c_i|a_i\rangle$$

Valor Esperado

- O valor esperado de uma grandeza é dado por:

$$\langle A \rangle \equiv (\langle \alpha |)(A|\alpha\rangle) = \langle \alpha | A | \alpha \rangle$$

- ou seja:

$$\langle A \rangle = \sum_i \sum_j \langle \alpha | a_i \rangle \langle a_i | A | b_j \rangle \langle b_j | \alpha \rangle = \sum_i a_i \langle a_i | \alpha \rangle |^2$$

Operador Hermitiano

- Um operador também pode atuar em um estado no espaço de bras
- $\langle\alpha|A$
- e o seu conjugado com relação ao espaço de kets é representado por $A^\dagger$
- $A|\alpha\rangle \leftrightarrow \langle\alpha|A^\dagger$
- Se $A = A^\dagger$, o operador é hermitiano

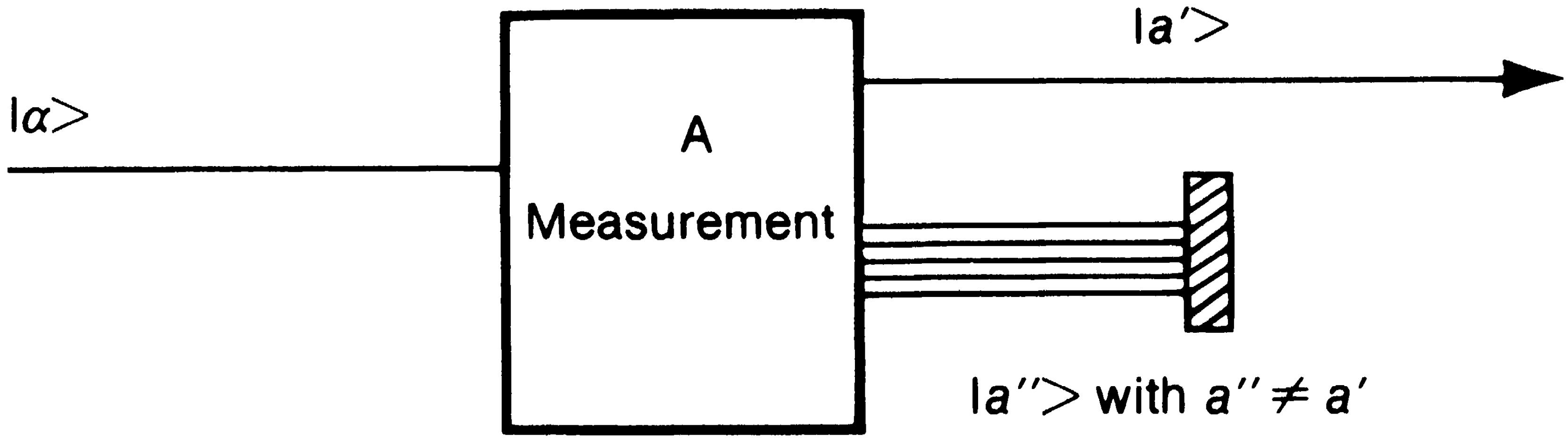
Medidas

- P. A. M. Dirac: "uma medida sempre faz o sistema pular para um auto-estado da variável dinâmica que está sendo medida"

  $$|\alpha\rangle \stackrel{A}{\rightarrow} |a_i\rangle$$

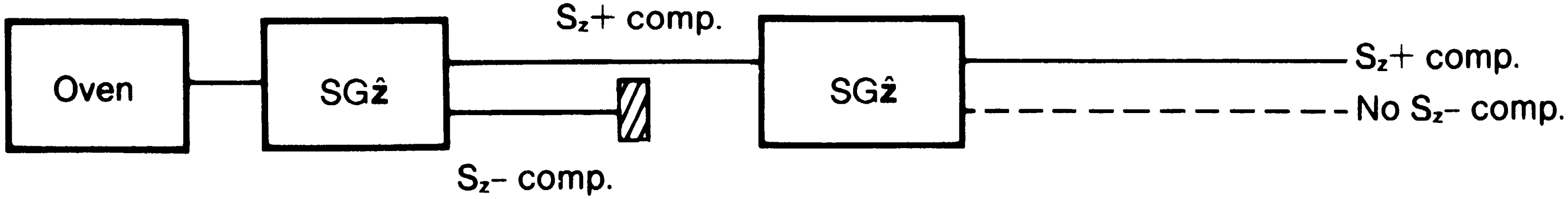
- A probabilidade dessa medida é dada por $|\langle a_i|\alpha\rangle|^2$

Medida Seletiva



$$(|a_i\rangle\langle a_i|)(|\alpha\rangle) = (|a_i\rangle)(\langle a_i|\alpha\rangle) = c_i|a_i\rangle$$

Experimento de Stern-Gerlach Sequencial

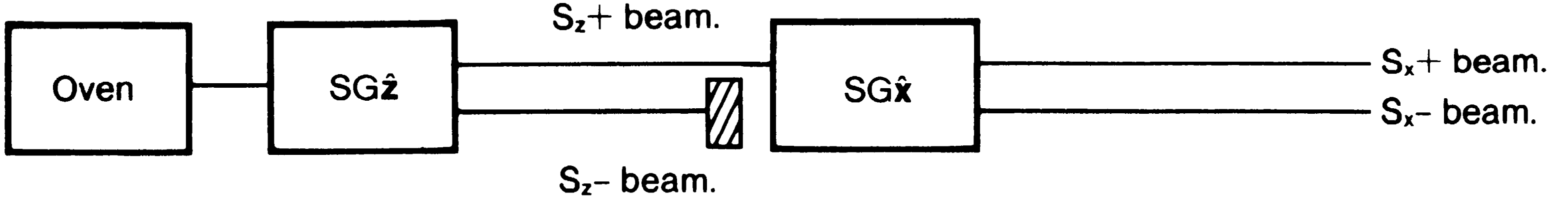


(a)

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z;+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z;-\rangle$$

Experimento de Stern-Gerlach Sequencial

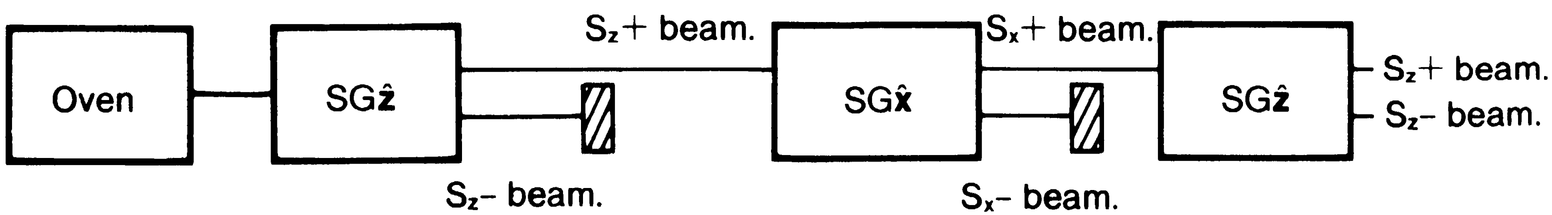
$$|\alpha\rangle = |S_z;+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_x;+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S_x;-\rangle$$



(b)

Experimento de Stern-Gerlach Sequencial

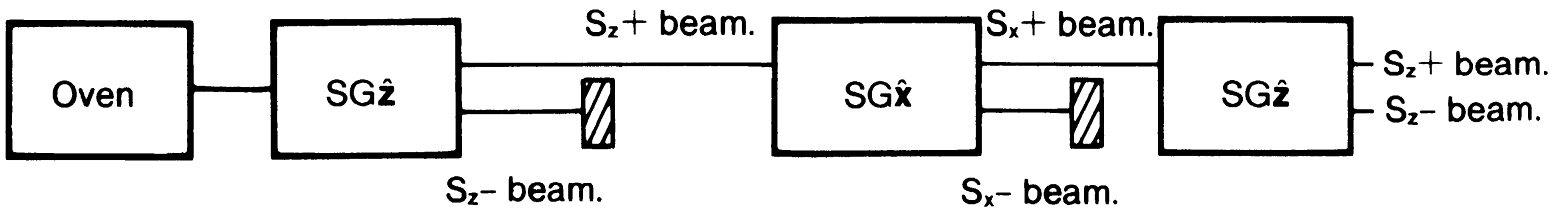
$$|\alpha\rangle = |S_x; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z; +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z; -\rangle$$



(c)

Experimento de Stern-Gerlach Sequencial

- E se trocarmos x por y, o resultado deve ser diferente?
- Porém, é razoável que $|S_x;+\rangle$ seja igual a $|S_y;+\rangle$? Como representar este último?



(c)

Experimento de Stern-Gerlach Sequencial

- Precisamos inserir justamente um coeficiente complexo
- $|S_y; +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z; +\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|S_z; -\rangle$
- $|S_y; -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z; +\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|S_z; -\rangle$

Experimento de Stern-Gerlach Sequencial

- Com este resultado, se descreve a observação experimental e ainda se consegue que os dois estados sejam ortogonais

$$|S_x; \pm\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z; +\,\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z; -\,\rangle$$

$$|S_y; \pm\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_z; +\,\rangle \pm \frac{i}{\sqrt{2}}|S_z; -\,\rangle$$

Auto-estados de Posição

- Toda essa discussão pode ser transportada para o caso de dimensões contínuas, como por exemplo a posição de uma partícula
- Por exemplo, podemos ter um auto-estado do operador posição, ou seja:

  $$x|x'\rangle = x'|x'\rangle$$

- como tínhamos antes ($A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$), mas x' pode assumir qualquer valor contínuo

E a Função de Onda?

- Como fica então o estado de um sistema físico qualquer representado em termos da posição?
- Ao invés da somatória como fizemos antes:

$$|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i |a_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} |a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle$$

- Teremos uma integral:

$$|\alpha\rangle = \int dx' |x'\rangle\langle x'|\alpha\rangle$$

E a Função de Onda?

- Dessa expansão, notamos que a densidade de probabilidade será dada por
- $|\langle x'|\alpha\rangle|^2 dx'$
- Ou seja, a função de onda como conhecemos será dada por:
- $\psi_\alpha(x') = \langle x'|\alpha\rangle$

Voltando ao Pacote de Onda

- Vimos na primeira aula deste bloco, que uma partícula livre pode ser representada por um pacote de onda:

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx-\omega t)} dk$$

- Será que conseguimos compreender um pouco mais a fundo esse resultado a partir deste formalismo?

Auto-estados do Momento

- Se podemos escrever um estado quântico em termos dos auto-vetores de um operador qualquer, por que não do momento:

$$p|p'\rangle = p'|p'\rangle$$

- E o estado quântico será dado por:

$$|\alpha\rangle = \int dp'|p'\rangle\langle p'|\alpha\rangle$$

Auto-estados do Momento

- E, em seguida, escrever a nossa velha conhecida função de onda a partir dessa base:

$$\psi_\alpha(x') = \langle x'|\alpha\rangle = \int dp' \langle x'|p'\rangle\langle p'|\alpha\rangle$$

- Comparando com a função de onda que escrevemos para o pacote de onda, mas deixando de fora a parte temporal:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx)} dk$$

- podemos comparar cada termo lembrando que $p = \hbar k$

Auto-estados do Momento

- O primeiro termo da expressão é:

  $\langle x'|p'\rangle = e^{ipx/\hbar}$

- e o segundo termo:

  $\langle p'|\alpha\rangle = A(k = p/\hbar)$

- Portanto, o pacote de onda corresponde à combinação do estado do elétron com um determinado momento p' em termos da posição ($\langle x'|p'\rangle$) com a função de onda daquele estado escrita em termos do momento ($\langle p'|\alpha\rangle$)

Voltando ao Gato de Schroedinger…

- Portanto, a alegoria do gato de Schroedinger pode ser escrita nesse formalismo como:

$$|\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{N} |a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|vivo\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|morto\rangle$$

- Lembrando agora a afirmação de Dirac: "uma medida sempre faz o sistema pular para um auto-estado da variável dinâmica que está sendo medida", só saberemos se o gato está vivo ou morto se abrirmos a caixa

Discussão da Aula

- Os conceitos de anti-matéria e spin se "encaixam" no EM? Por exemplo, a BNCC ou o Novo Currículo do Estado de SP contemplam essas ideias?
  - Em caso afirmativo, como eles poderiam ser inseridos no EM? Há exemplos na literatura e no material didático?
  - Caso contrário, é importante para um professor compreender a origem desses conceitos na MQ mesmo assim?

Discussão da Próxima Aula

- Qual é o conhecimento básico de FMC necessário para os professores alcançarem a autonomia (ou superarem os obstáculos) para abordar esse tema no EM?