

# Complementos de Física Moderna

## Bloco 3 - Aula 02

Ivã Gurgel ([gurgel@usp.br](mailto:gurgel@usp.br))

Marcelo G. Munhoz ([munhoz@if.usp.br](mailto:munhoz@if.usp.br))

# Discussão da Aula

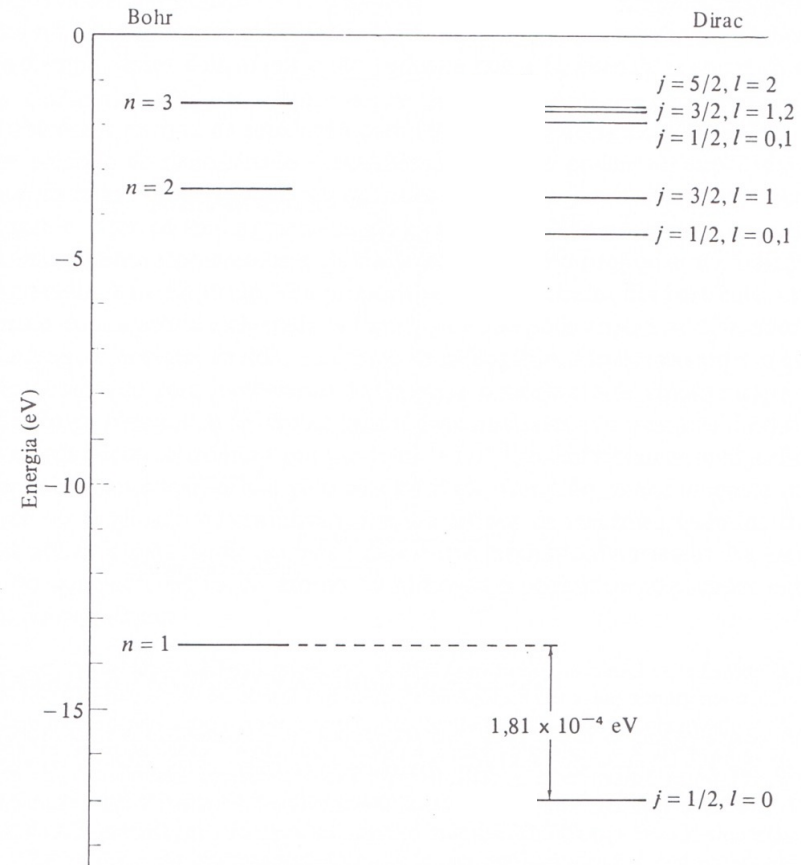
- Vimos no bloco anterior e na discussão da aula anterior, vários aspectos, principalmente empíricos, da dualidade onda-partícula
- Na sua opinião, o formalismo da eq. de Schroedinger ajuda a compreender esse conceito? Ele é necessário para o professor ter autonomia para discutir esse aspecto fundamental da MQ no EM?
- Procure trazer tópicos da FMC (se possível, curiosidades dos alunos) e a conexão desses tópicos com o conceito da dualidade e o formalismo de Schroedinger

# Ao infinito e além!

- Quanto precisamos avançar na contemporaneidade da FMC dentro do Ensino Médio?
- E quanto precisamos avançar nessa mesma direção no Ensino Superior para nos sentirmos a vontade para discuti-la no Ensino Médio?

# Limitações

- Apesar de bem sucedida em vários aspectos, a teoria de Schroedinger apresenta sérias limitações
- Por exemplo, os níveis de energia do átomo mais simples, do hidrogênio, não são precisamente descritos por essa teoria.
- Isso só é obtido considerando-se o *spin* do elétron, que é “estranho” a essa teoria.



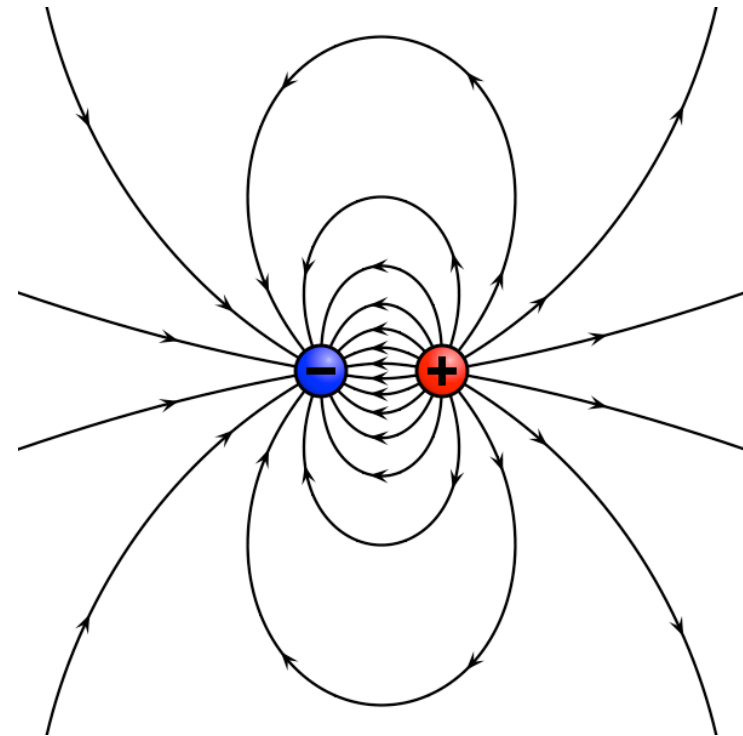
# E o Spin?

- Inicialmente, vamos rever alguns conceitos sobre o spin e discutir como podemos incorporar esse conceito na teoria de uma forma mais fundamental

# Momento de dipolo elétrico

- Antes de discutirmos o spin, vamos lembrar da definição de dipolo elétrico e magnético
- Duas cargas de sinais opostos separadas por uma distância  $d$ , apresentam um momento de dipolo elétrico dado por:

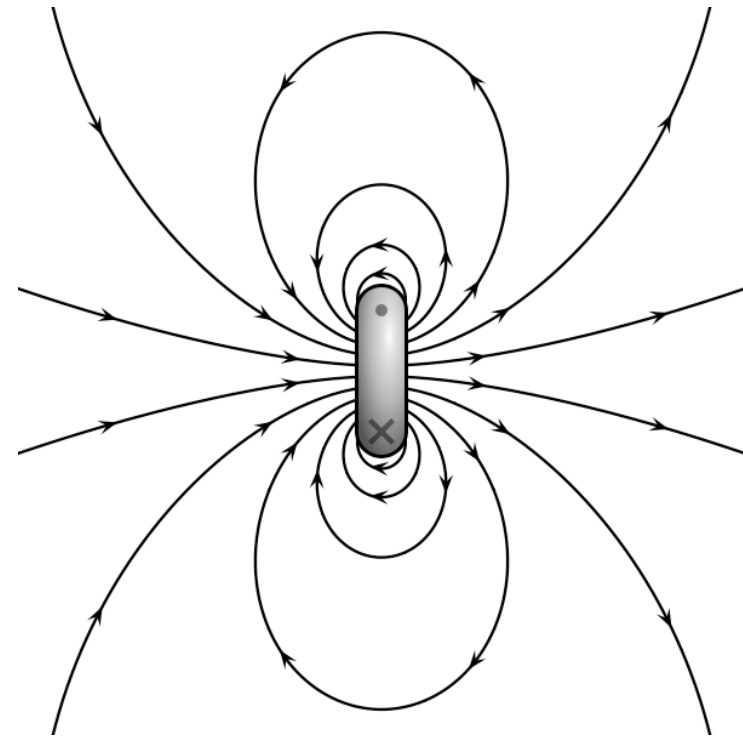
$$\vec{p} = q \cdot \vec{d}$$



Wikipedia, the free encyclopedia

# Momento de dipolo magnético

- Uma espira que compreende uma área  $S$  por onde passa uma corrente elétrica  $i$  gera um campo magnético de características semelhantes ao campo elétrico gerado pelo dipolo elétrico.

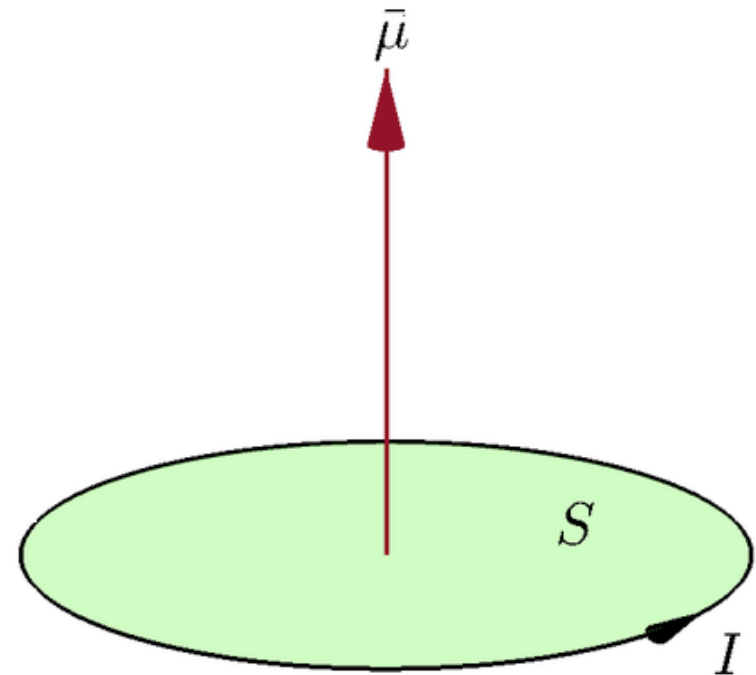


# Momento de dipolo magnético

- Portanto, podemos definir um momento de dipolo magnético ( $\mu$ ) dado por:

$$\vec{\mu} = i \cdot \vec{S}$$

- onde a direção do momento de dipolo magnético é perpendicular à área  $\mathbf{S}$

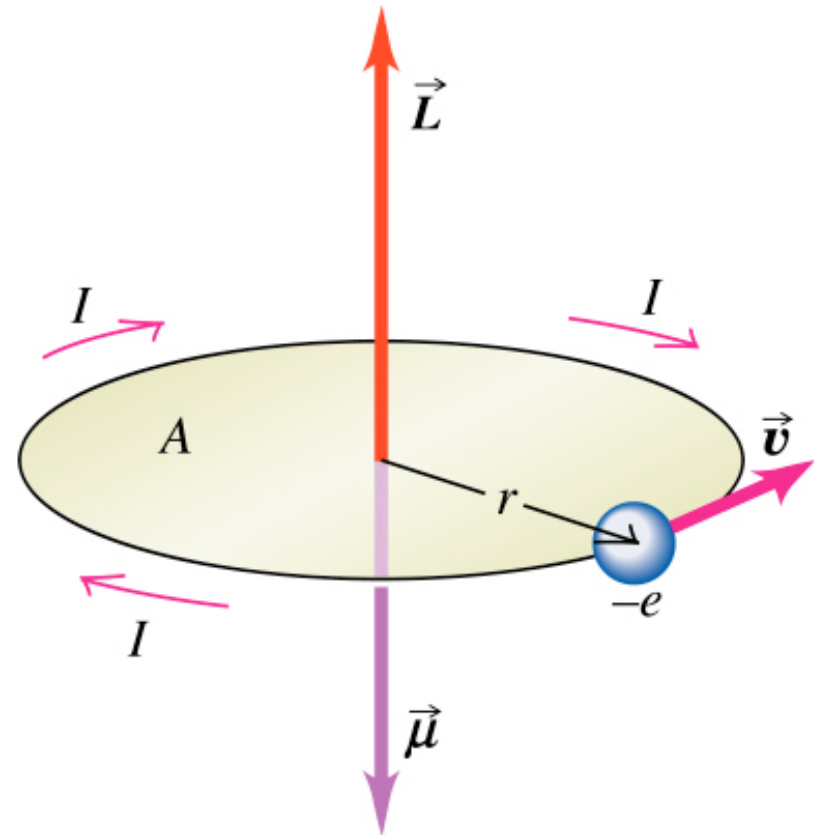




# Momento de dipolo magnético orbital

- Um elétron em órbita gera uma corrente que, por sua vez, produz um campo magnético similar ao de um dipolo magnético.

- A corrente gerada pelo elétron é dada por: 
$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}$$

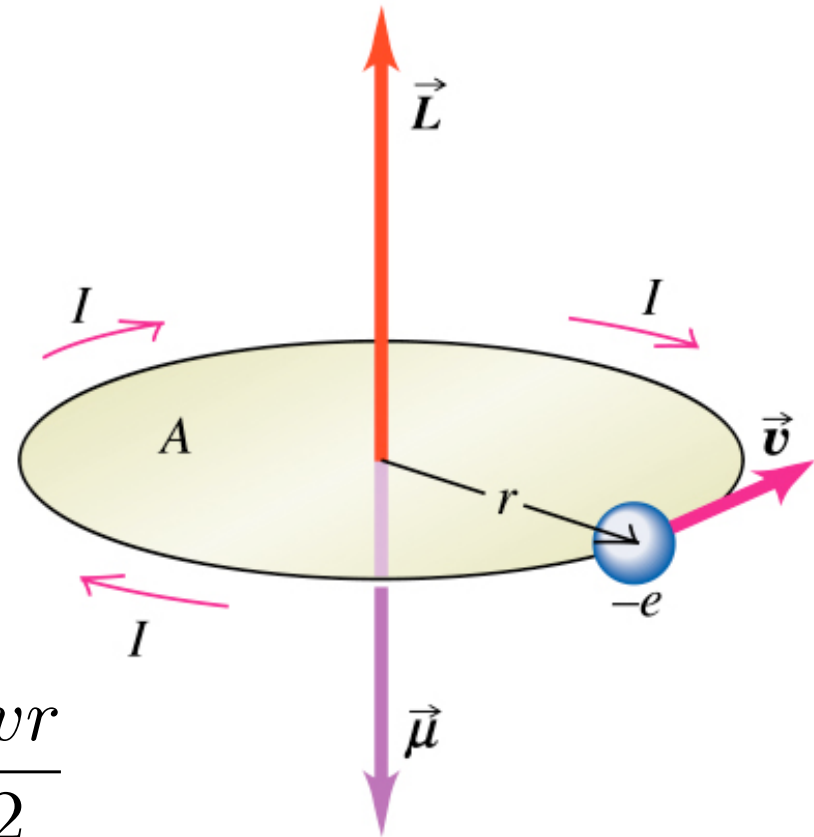


Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

# Momento de dipolo magnético orbital

- Portanto, em uma aproximação semi-clássica, podemos dizer que o elétron em um átomo gera esse momento de dipolo magnético:

$$\mu = I \cdot A = \frac{ev}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{evr}{2}$$



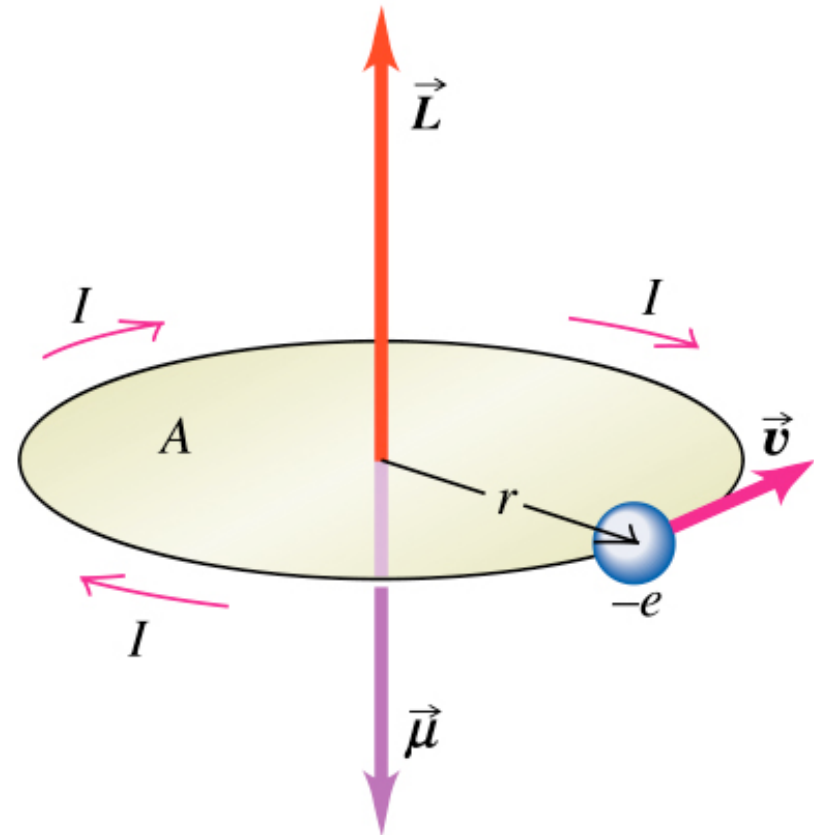
Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

# Momento de dipolo magnético orbital

- Podemos agora associar esse momento de dipolo magnético com o momento angular do elétron, que é dado por:

$$L = mvr$$

- Portanto:  $\mu = \frac{e}{2m}L$



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

# Momento de dipolo magnético orbital

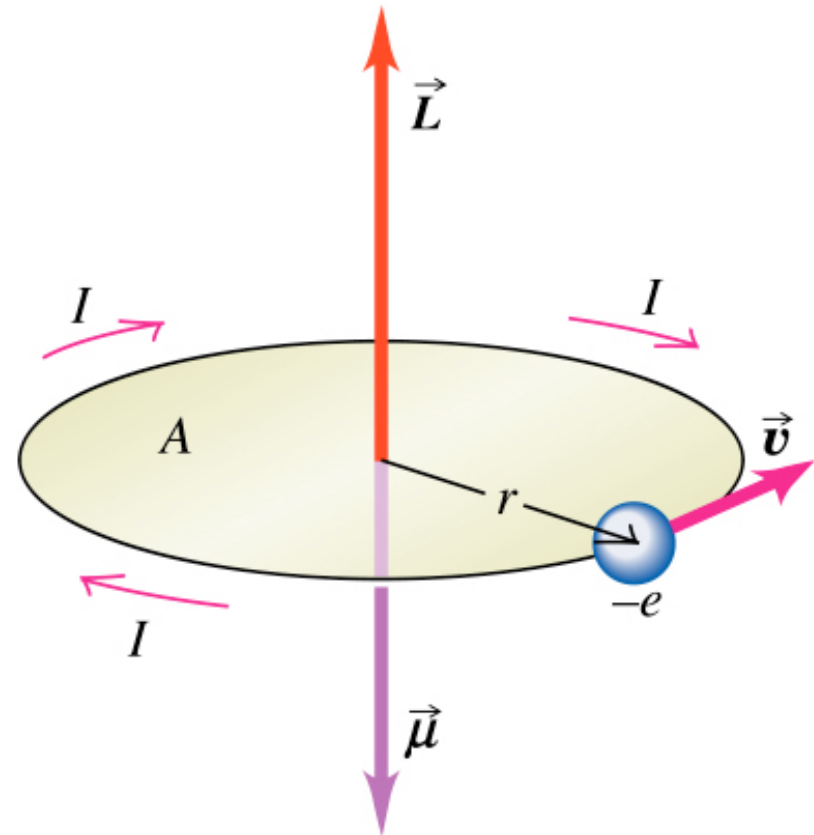
- Por convenção, escreve-se essa relação como:

$$\vec{\mu} = -\frac{g_l \mu_b}{\hbar} \vec{L}$$

- onde:

$$\mu_b = \frac{e\hbar}{2m}$$

- e  $g_l = 1$



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.

# Momento de dipolo magnético orbital

- Quanticamente, devemos lembrar que o valor esperado do momento angular é dado por:

$$\bar{L} = \hbar\sqrt{l(l+1)}$$

- Portanto, o valor esperado para o momento de dipolo magnético do elétron no átomo é dado por:

$$\bar{\mu}_l = \frac{g_l\mu_b}{\hbar} \cdot \hbar\sqrt{l(l+1)} = g_l\mu_b \cdot \sqrt{l(l+1)}$$

# Momento de dipolo magnético orbital

- De forma semelhante, a componente z do momento angular é dada por:

$$\bar{L}_z = \hbar \cdot m_l$$

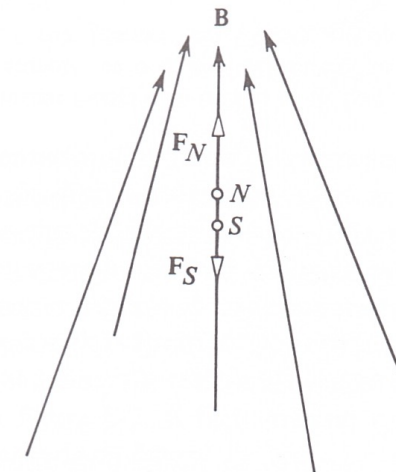
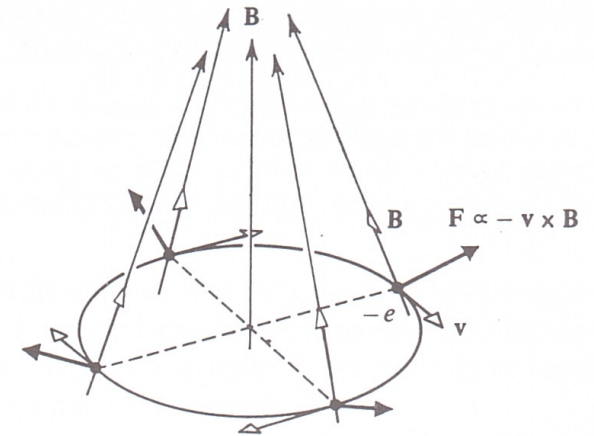
- Portanto, o valor esperado para a componente z do momento de dipolo magnético do elétron no átomo é dado por:

$$\bar{\mu}_z = \frac{g_l \mu_b}{\hbar} \cdot \bar{L}_z = \frac{g_l \mu_b}{\hbar} \cdot \hbar \cdot m_l = g_l \mu_b \cdot m_l$$

# Comportamento de um dipolo em um campo magnético

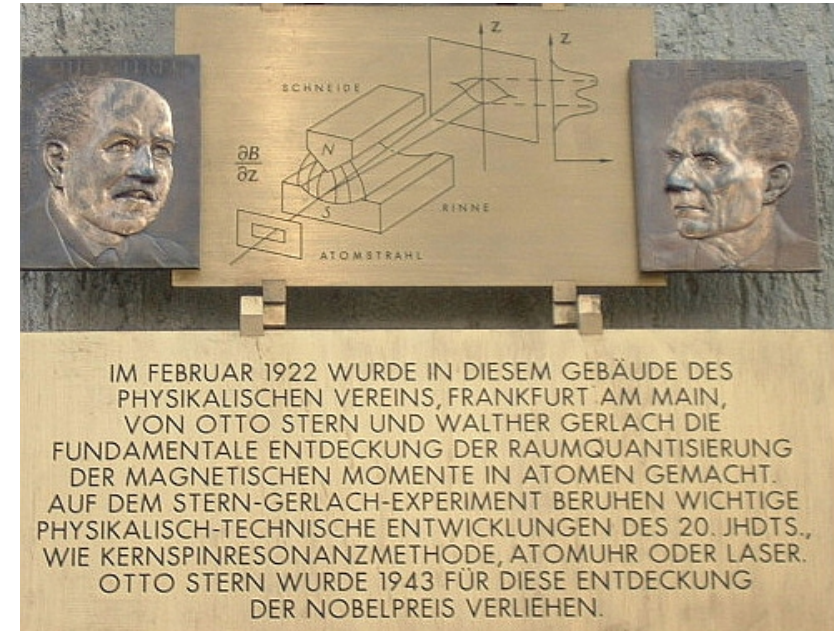
- Quando um dipolo magnético qualquer é colocado na presença de um campo magnético não uniforme, surge uma força média na direção  $\mathbf{z}$  agindo no elétron durante sua órbita dada por:

$$\bar{F}_z = \frac{\partial B_z}{\partial z} \cdot \mu_z$$



# O experimento de Stern e Gerlach

- Em 1922, Stern e Gerlach realizaram um experimento para medir o momento magnético de átomos devido aos seus elétrons.

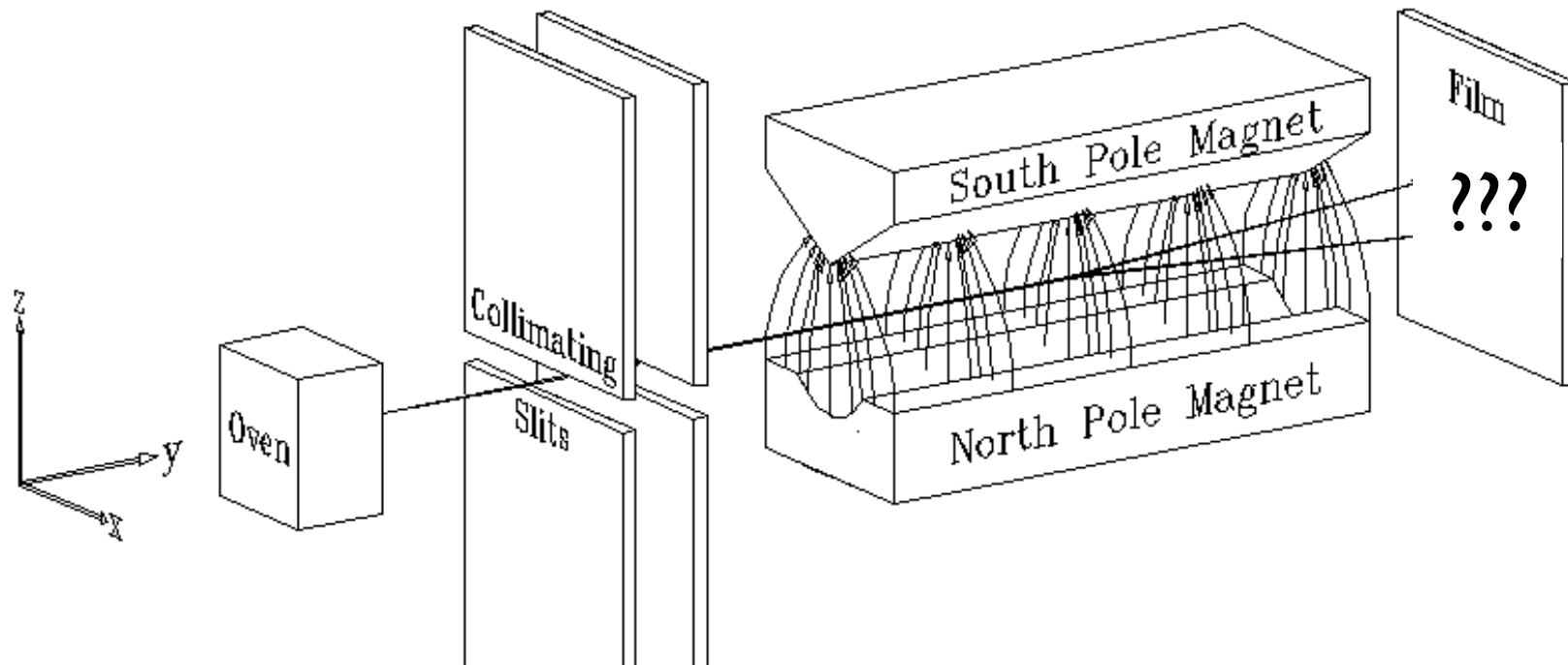


Placa comemorativa no Instituto de Física da FFM (Frankfurt)

Wikipedia, the free encyclopedia

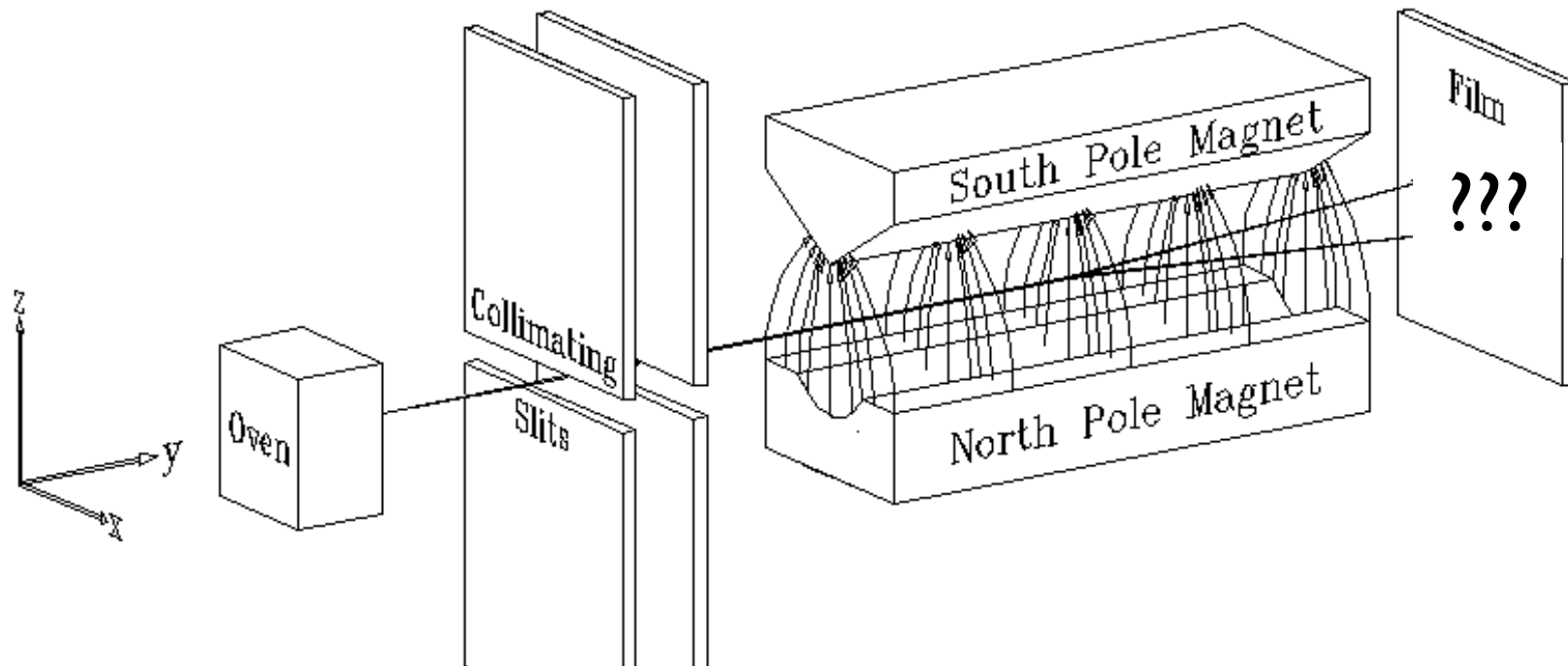


# O experimento de Stern e Gerlach



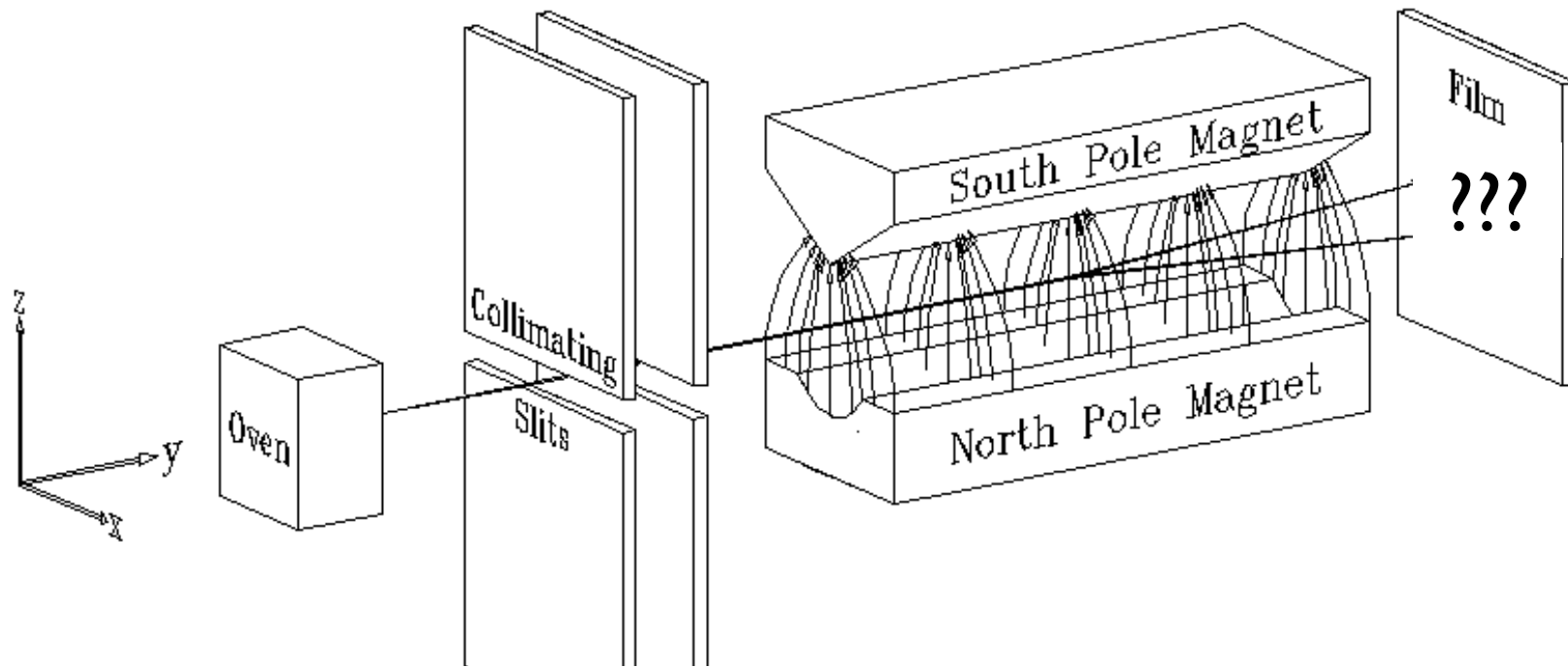
- Eles fizeram átomos de prata atravessarem um campo magnético não uniforme e mediram o efeito desse campo na trajetória dos átomos

# O experimento de Stern e Gerlach



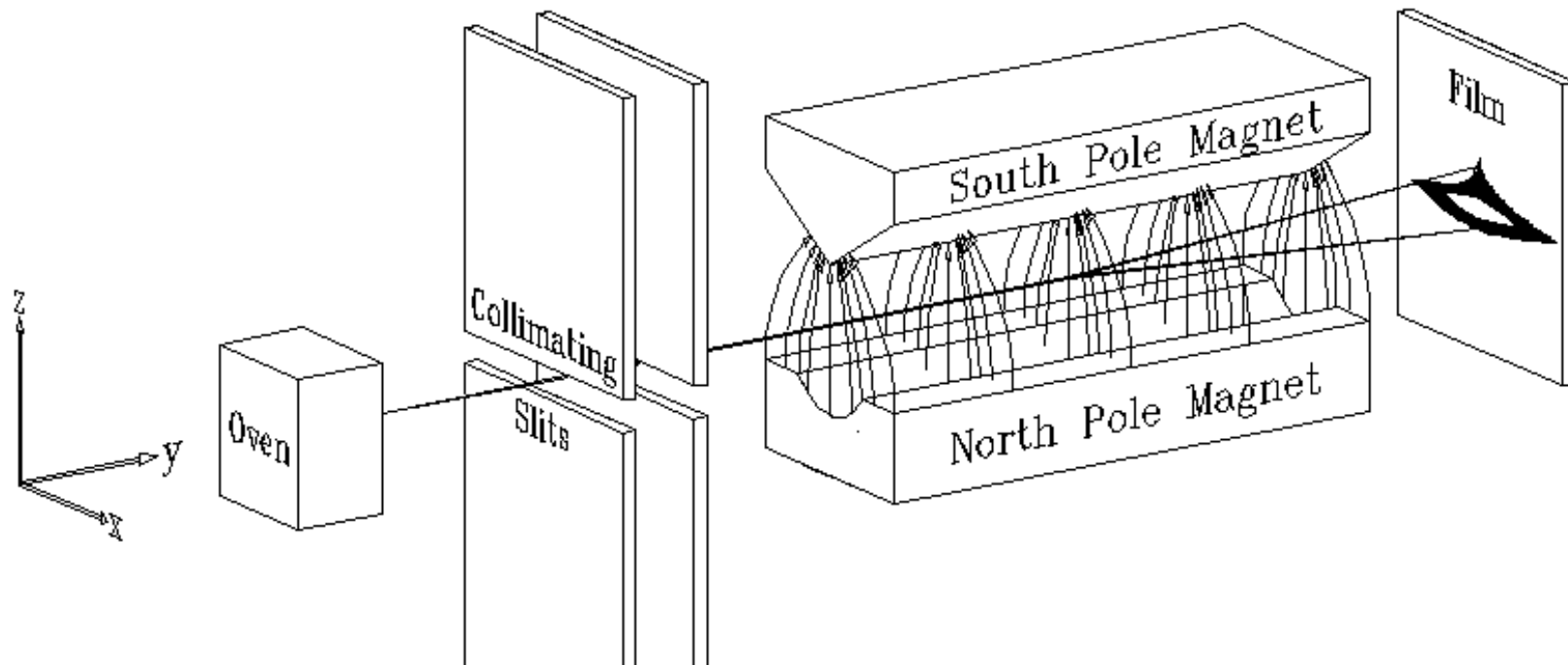
- Segundo a física clássica, deveria surgir uma distribuição uniforme de átomos no filme, uma vez que a força é proporcional a componente  $z$  do momento de dipolo magnético e os átomos podem ter qualquer orientação

# O experimento de Stern e Gerlach



- Quanticamente, espera-se linhas discretas, pois:  
$$\bar{\mu}_z = g_l \mu_b \cdot m_l$$
- e,  $m_l = -l, -l+1, \dots, l+1, l$

# O experimento de Stern e Gerlach



- Porém, o que se observou foram **sempre** apenas duas linhas, independente do valor de  $l$  dos átomos utilizados!! Em 1927, por exemplo, Phipps e Taylor reproduziram o experimento com átomos de H ( $l=0$ ) e obtiveram o mesmo resultado.

# O experimento de Stern e Gerlach

- Como explicar essa observação?
- Ela parece estar qualitativamente de acordo com a previsão da física quântica (linhas discretas), mas com algumas inconsistências (apenas duas!)



Fig. 2.

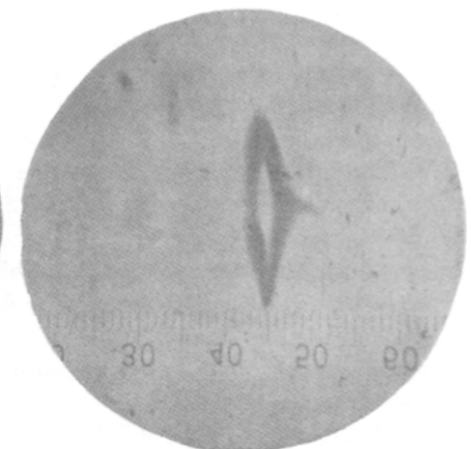


Fig. 3.

Walther Gerlach, Otto Stern, "Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld," Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, Vol 9, No. 1, 349-352, 1922

# A descoberta do *spin* do elétron

- A hipótese que melhor explica essa observação é supor que há um outro momento angular associado aos elétrons ( $\mathbf{S}$ ) que gera um momento de dipolo magnético ( $\mu_s$ ) e cuja componente z (ou seja, em uma dada direção) só pode ter dois valores.

# A descoberta do *spin* do elétron

- Portanto, se  $\bar{S} = \hbar\sqrt{s(s+1)}$  que leva a  $\bar{S}_z = \hbar m_s$
- e  $s = 1/2$  que leva a  $m_s = -1/2$  e  $+1/2$
- chega-se aos resultados observados no experimento, com  $g_s = 2$

# A descoberta do *spin* do elétron

- Mas afinal, o que é o *spin* do elétron?
- Ele é compatível com uma rotação dessa partícula em torno do próprio eixo? Por quê?
- Quais as consequências da existência do *spin* do elétron para o tratamento dado ao átomo de um elétron pela Teoria de Schroedinger?



# A descoberta do *spin* do elétron

- Como o elétron apresenta um momento angular intrínseco e, por consequência, apresenta um momento de dipolo magnético intrínseco (e não devido ao seu movimento orbital) dado por:

$$\vec{\mu}_S = -\frac{g_s \mu_B}{\hbar} \vec{S}$$

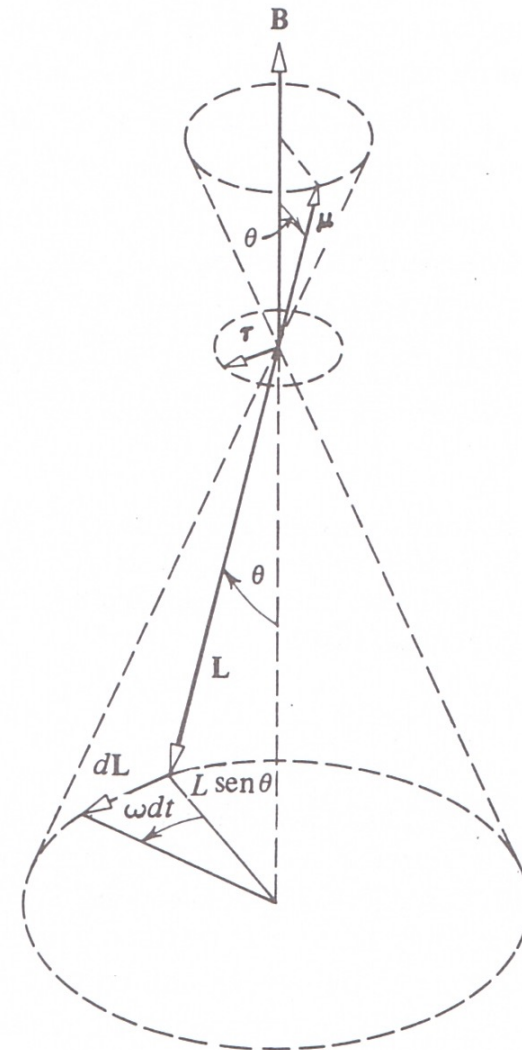
- deve surgir uma interação entre esse momento de dipolo magnético intrínseco e o campo magnético gerado pelo movimento do elétron em torno do núcleo

# Comportamento de um dipolo em um campo magnético

- Essa interação leva a um energia potencial de “orientação” dada por:

$$\Delta E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

- Portanto, o sistema tenderá a ter o momento de dipolo magnético alinhado ao campo, que só ocorrerá se houver algum agente externo



# Interação *Spin*-Órbita

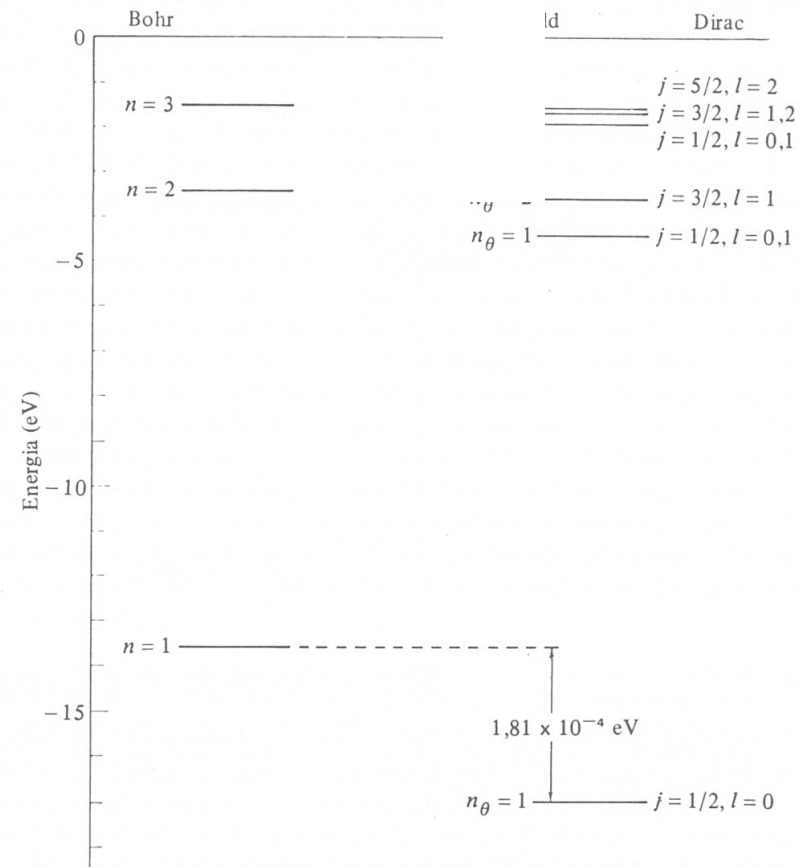
- Essa interação é chamada de interação *spin*-órbita, cuja energia potencial associada é dada por:

$$\Delta E = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \vec{S} \cdot \vec{L}$$

- Essa interação é muito importante para compreendermos melhor os níveis de energia do átomo de H

# Limitações na Abordagem de Schroedinger

- Considerar o acoplamento *spin-órbita* ajuda, mas não resolve o problema
- A descrição mais exata desses níveis de energia só pode ser obtida com a teoria de Dirac



# It's the relativity, stupid!

- O que está faltando na Abordagem de Schroedinger?
  - A Relatividade!
- A equação de Schroedinger não é consistente com a Teoria da Relatividade Especial, pois não é invariante por Transformações de Lorentz

# E agora, como proceder?

- A primeira tentativa seria escrever um equivalente da equação de Schroedinger, mas partindo da expressão da energia relativística:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

- Lembrando que:  $\hat{p} \leftrightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$  e  $\hat{E} \leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

# E agora, como proceder?

- Esse *ansatz* levaria a uma equação do tipo:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = (-\hbar^2 \nabla^2 c^2 + m^2 c^4) \psi$$

- que é conhecida como equação de Klein-Gordon
- Mas qual é o problema com essa equação?
  - Ela permite que  $|\psi|^2 < 0$  !

# Equação de Dirac

- Em 1927, Dirac propõe uma nova equação que:
  - busca manter a derivada de primeira ordem no tempo, para que a função de onda contenha toda a informação sobre o estado quântico
  - busca manter a simetria entre tempo e espaço, ou seja, a parte espacial também deve apresentar uma derivada de primeira ordem
  - cujas soluções também sejam compatíveis com a equação de Klein-Gordon



# Equação de Dirac

- Retornamos a:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

- e:  $\hat{p} \leftrightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$  e  $\hat{E} \leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

- Porém tomando essa equação de forma linear, ou seja:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2) \psi$$

- e introduzindo  $\vec{\alpha}$  e  $\beta$  para tentar “ajustar” essa equação

# Equação de Dirac

- Logo Dirac notou que essa equação não poderia ser resolvida se não fosse assumido um caráter vetorial a ela, ou seja:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dots \\ \psi_N \end{pmatrix}$$

- e  $\vec{\alpha}$  e  $\beta$  devem ser matrizes  $N \times N$ , com  $N$  a ser definido

# Equação de Dirac

- Impondo a compatibilidade com a equação de Klein-Gordon, chega-se que o menor valor possível para a dimensão desse vetor é  $N = 4$  e as matrizes  $\vec{\alpha}$  e  $\beta$  podem ser escritas como:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

# Equação de Dirac

- Para facilitar, podemos escrever:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- onde  $\sigma_i$  são as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- e o 1 na matriz  $\beta$  são as matrizes identidade  $2 \times 2$

# Equação de Dirac

- Para interpretarmos fisicamente essa equação, vamos tomar o caso de um elétron em repouso, cuja função de onda deve satisfazer a equação:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \beta mc^2 \psi$$

- ou seja:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

# Equação de Dirac

- Que corresponde na verdade a 4 equações:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = mc^2 \psi_1$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = mc^2 \psi_2$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_3}{\partial t} = -mc^2 \psi_3$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_4}{\partial t} = -mc^2 \psi_4$$

# Equação de Dirac

- Portanto, uma possível solução para essa equação diferencial é:

$$\psi = \begin{pmatrix} e^{-(imc^2/\hbar)t} \\ e^{-(imc^2/\hbar)t} \\ e^{+(imc^2/\hbar)t} \\ e^{+(imc^2/\hbar)t} \end{pmatrix}$$

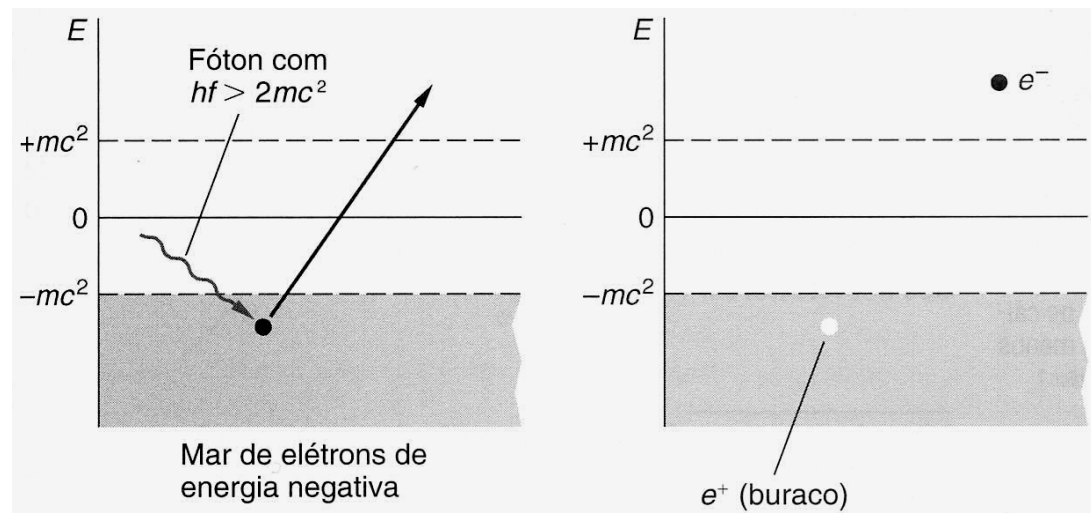
- que corresponde a **duas soluções com energia positiva e duas com energia negativa**

# Spin e Anti-matéria

- Mas como podemos agora interpretar o significado de cada uma dessas 4 dimensões da função de onda?
- A interpretação dada (e verificada posteriormente) é que as duas dimensões (com energia positiva) correspondem a elétrons com spin “para cima” e spin “para baixo” e as duas soluções com energias negativas à anti-matéria



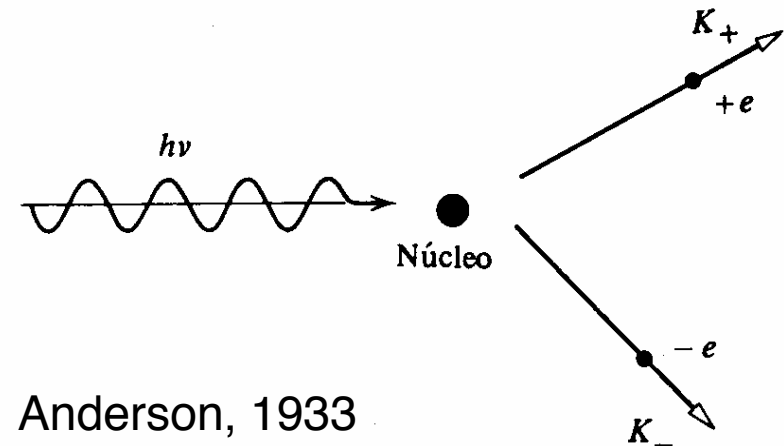
# Interpretação de Paul Dirac



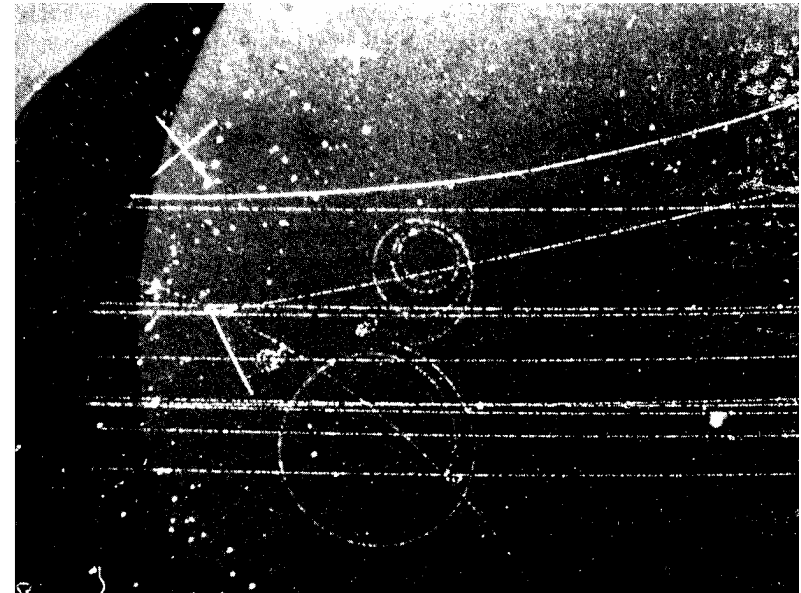
- Existe um “mar de elétrons” que pode ser “excitado” e criar um elétron deixando um “buraco” que é o pósitron

# Produção de pares

- Fótons produzem um par elétron-pósitron (conservação de carga) a partir da sua interação com o núcleo atômico (conservação de momento e energia)
- Esse processo precisa respeitar as diversas leis de conservação da natureza

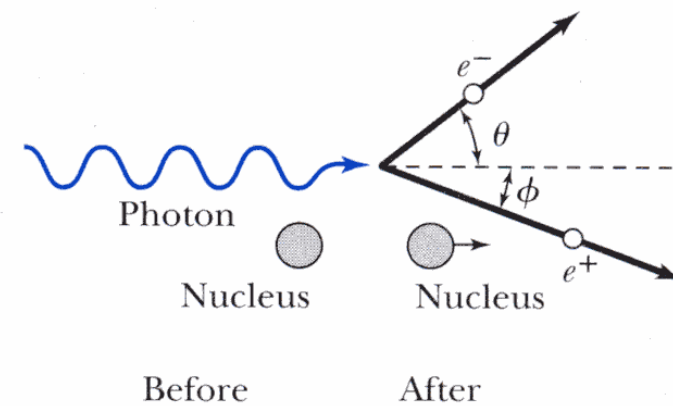
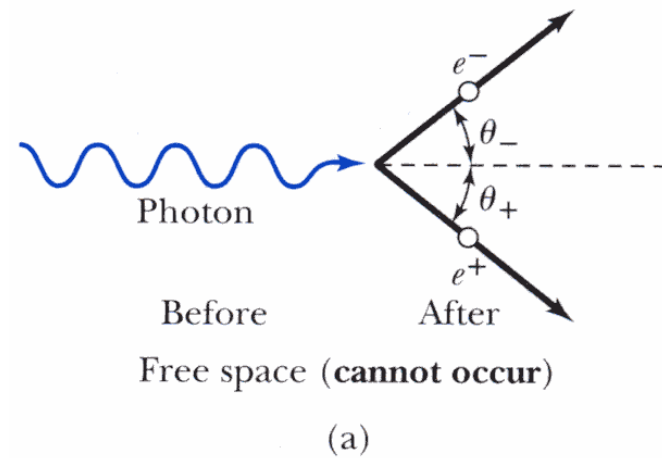


Anderson, 1933



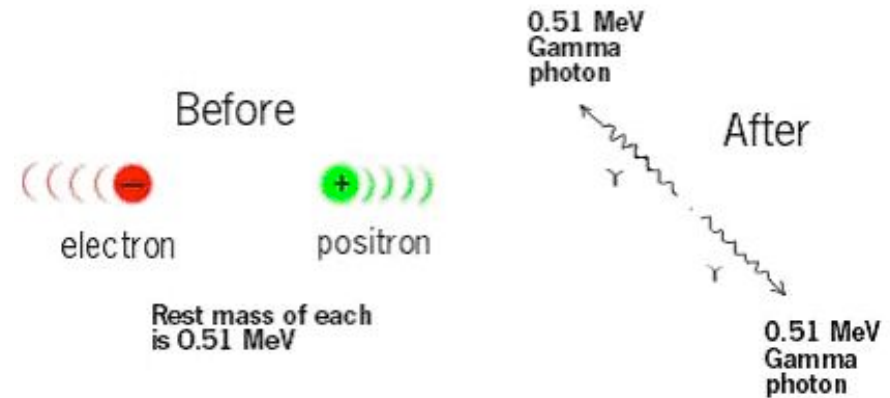
# Produção de pares

- A única maneira desse processo conservar momento e energia é se o núcleo atômico estiver presente e absorver parte da energia e momento do fóton



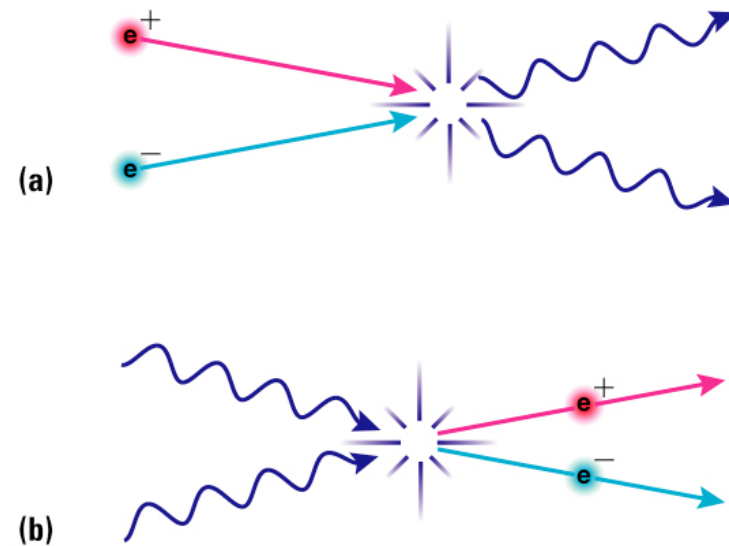
# Aniquilação de pares

- O processo inverso também pode ocorrer: um elétron e um pósitron podem se aniquilar produzindo fótons



# Produção e aniquilação de pares

- Podemos enxergar a produção e aniquilação de pares como sendo as duas “faces” do mesmo processo



Copyright © Addison Wesley

# Discussão da Próxima Aula

- Os conceitos de anti-matéria e spin se "encaixam" no EM? Por exemplo, a BNCC ou o Novo Currículo do Estado de SP contemplam essas ideias?
- Em caso afirmativo, como eles poderiam ser inseridos no EM? Há exemplos na literatura e no material didático?
- Caso contrário, é importante para um professor compreender a origem desses conceitos na MQ mesmo assim?