

Estatística de Redes Sociais

Segunda lista de complementos e exercícios da aula 14.
2 de novembro de 2020

- Dado $u \in \mathcal{S}_N$, para todo $a \in \{1, \dots, N\}$ seja

$$r(a|u) = \frac{e^{+u(a)} + e^{-u(a)}}{\sum_{b \in \mathcal{A}} [e^{(+1)u(b)} + e^{(-1)u(b)}]}.$$

- Dado $u \in \mathcal{S}_N$, seja

$$a_1(u) = \operatorname{argmax}\{|u(a)| : a \in \mathcal{A}\},$$

$$a_2(u) = \operatorname{argmax}\{|u(a)| : a \in \mathcal{A} \setminus \{a_1(u)\}\},$$

...

$$a_N(u) = \operatorname{argmax}\{|u(a)| : a \in \mathcal{A} \setminus \{a_1(u), a_2(u), \dots, a_{N-1}(u)\}\}.$$

- Para todo $\xi \in [0, 1]$, defina

$$A(u, \xi) = \inf\{a \in \mathcal{A} : \sum_{b=1}^a r(a_b(u)|u) > \xi\}.$$

- Dado $u \in \mathcal{S}_N$ e $a \in \{1, \dots, N\}$, para todo $\xi \in \{0, 1\}$ seja

$$O(u(a), \xi) = \begin{cases} +1, & \text{se } \xi < \frac{1}{1 + e^{-2u(a)}}, \\ -1, & \text{em caso contrário.} \end{cases}$$

1 Pseudocódigo: Algoritmo 1

Objetivo: construção simultânea de duas evoluções partindo de duas listas distintas quaisquer, visando levá-las para dentro da faixa $\{-(N-1), \dots, N-1\}$.

1. Inicialização: Escolha duas listas $u \in \mathcal{S}_N$ e $v \in \mathcal{S}_N$.
2. Escolha uma regra de parada $R \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\mathcal{S}_N \times \mathcal{S}_N)^n$.
3. Defina $U_0^u = u, U_0^v = v$ e $H = (U_0^u, U_0^v)$.
4. Para $n \geq 1$, faça:
 - 4.1 Sorteie (independentemente dos sorteios anteriores) ξ_n^1 uniforme em $[0, 1]$
 - 4.2 Atualize $A_n^u = A(U_{n-1}^u, \xi_n^1)$ e $A_n^v = A(U_{n-1}^v, \xi_n^1)$.
 - 4.3 Sorteie (independentemente dos sorteios anteriores) ξ_n^2 uniforme em $[0, 1]$.
 - 4.4 Atualize $O_n^u = O(U_{n-1}^u(A_n^u), \xi_n^2)$ e $O_n^v = O(U_{n-1}^v(A_n^v), \xi_n^2)$.
 - 4.5 Defina $U_n^u = \pi_{A_n^u, O_n^u}(U_{n-1}^u)$ e $U_n^v = \pi_{A_n^v, O_n^v}(U_{n-1}^v)$.
 - 4.6 Atualize H concatenando a sequência anterior H com (U_n^u, U_n^v) : $H = (U_0^u, U_0^v) \dots (U_n^u, U_n^v)$.
 - 4.7 Se $H \notin R$, continue o laço.
 - 4.8 Se $H \in R$, termine o laço e imprima H .

2 Exercícios

1. Sejam u, v duas listas quaisquer em $\mathcal{S}_N$. Verifique que a seguinte afirmação é verdadeira: no item 4.2 do Algoritmo 1, se $\xi_1^1 < \min\{r(a_1(u)|u), r(a_1(v)|v)\}$, então $A_1(u, \xi_1^1) = a_1(u)$ e $A_1(v, \xi_1^1) = a_1(v)$.

Generalizando, verifique que se

$$\xi_m^1 < \min\{r(a_1(U_m^u)|U_m^u), r(a_1(U_m^v)|U_m^v)\},$$

então

$$A_m(u, \xi_m^1) = a_1(U_m^u) \text{ e } A_m(v, \xi_m^1) = a_1(U_m^v).$$

2. Sejam u, v duas listas quaisquer em $\mathcal{S}_N$. Verifique se as seguintes afirmações são verdadeiras:

•

$$\bigcap_{m=1}^N \left\{ \xi_m^1 < 1/N \right\} \subset \bigcap_{m=1}^N \left\{ \xi_m^1 < \min\{r(a_1(U_m^u)|U_m^u), r(a_1(U_m^v)|U_m^v)\} \right\}$$

•

$$\bigcap_{m=1}^N \left\{ \xi_m^1 < \min\{r(a_1(U_m^u)|U_m^u), r(a_1(U_m^v)|U_m^v)\} \right\} \subset \bigcap_{a \in \mathcal{A}} \left\{ |U_N^u(a)| < N, |U_N^v(a)| < N \right\}.$$

- Usando as duas inclusões acima, concluímos que

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{a \in \mathcal{A}} \left\{ |U_N^u(a)| < N, |U_N^v(a)| < N \right\} \right) \geq \left(\frac{1}{N} \right)^N.$$